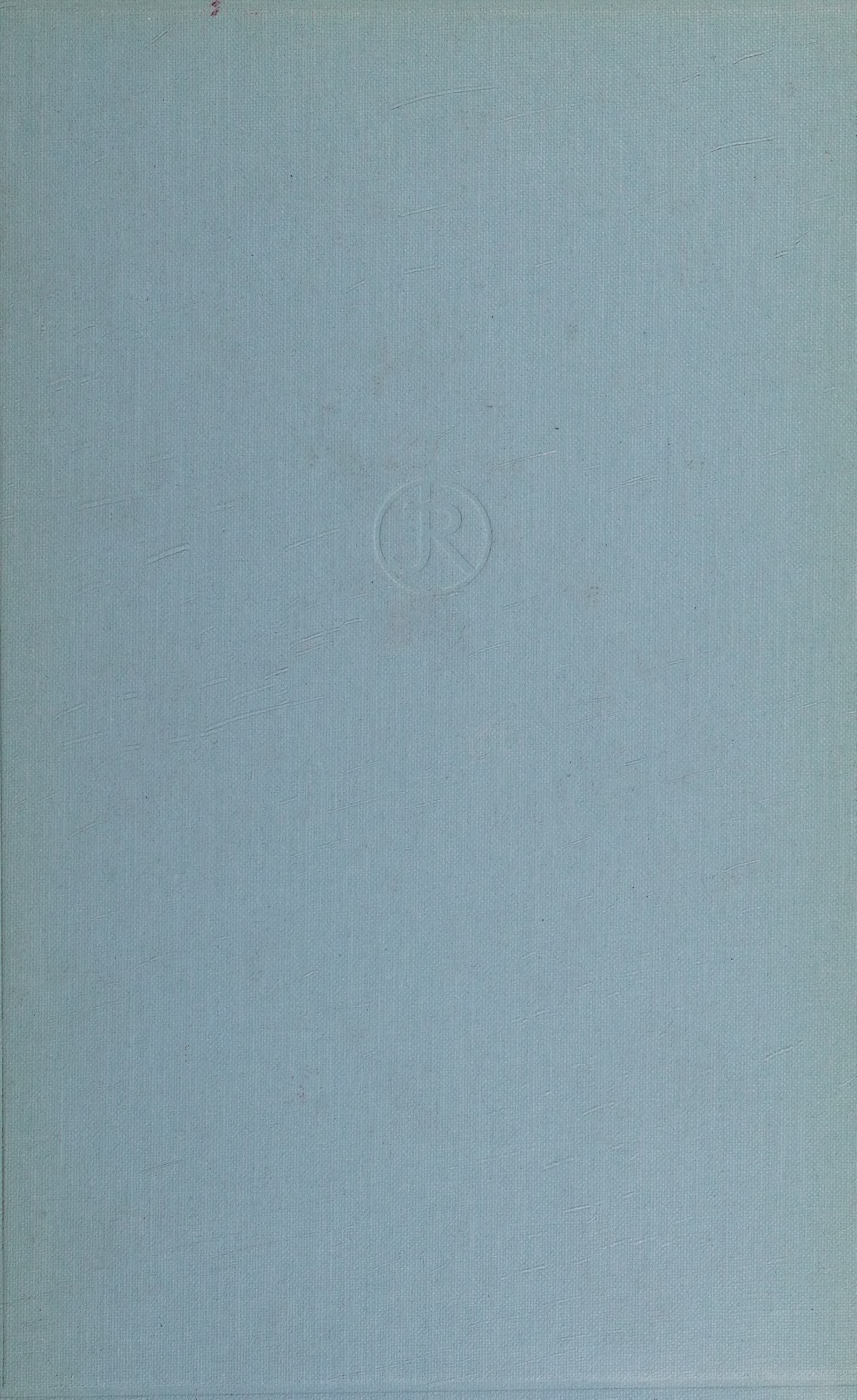




ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

СЕРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

Том 5

BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

SÉRIE MATHÉMATIQUE

Tome 5

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

Москва 1941

Reprinted with the permission of Mezhdunarodnaja Kniga, Moscow

JOHNSON REPRINT CORPORATION
111 Fifth Avenue
New York 3, New York

Johnson Reprint Company Limited
Berkeley Square House
London, W. 1

First reprinting, 1963, Johnson Reprint Corporation

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Серия математическая 5 (1941), 3—14 Série mathématique

А. Н. КОЛМОГОРОВ

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ И ЭКСТРАПОЛИРОВАНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Устанавливаются спектральные условия для возможности экстраполировать и интерполировать стационарные случайные последовательности по достаточно большому числу членов с любой заданной точностью.

Введение

Пусть каждому целому t $(-\infty < t < +\infty)$ соответствует действительная случайная величина $x(t)$ с конечным математическим ожиданием квадрата. Последовательность $\{x(t)\}$ случайных величин $x(t)$ будем называть **стационарной**, если математические ожидания *

$$m = \mathrm{M}\, x(t)$$

и

$$B(k) = \mathrm{M}\,[(x(t+k)-m)(x(t)-m)]$$

не зависят от t. Без ограничения общности можно положить

$$m = \mathrm{M}\, x(t) = 0. \tag{1}$$

Тогда

$$B(k) = \mathrm{M}\,[x(t+k)\, x(t)]. \tag{2}$$

Так как

$$B(-k) = B(k), \tag{3}$$

то достаточно рассматривать вторые моменты $B(k)$ лишь для $k \geqslant 0$.

Задача линейного экстраполирования стационарной последовательности, удовлетворяющей условию (1), заключается в подборе при заданных $n > 0$ и $m \geqslant 0$ таких действительных коэффициентов a_s, при которых линейная комбинация

$$L = a_1 x(t-1) + a_2 x(t-2) + \dots + a_n x(t-n)$$

случайных величин

$$x(t-1),\ x(t-2),\ \dots,\ x(t-n)$$

---

* Математическое ожидание случайной величины y обозначается далее через $\mathrm{M}\, y$.

доставляет возможно более точное приближение к случайной величине $x(t+m)$. За меру точности такого приближения естественно принять математическое ожидание

$$\sigma^2 = \mathrm{M}\,(x(t+m)-L)^2 =$$
$$= B(0) - 2\sum_{s=1}^{n} B(m+s)\,a_s + \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} B(p-q)\,a_p a_q.$$

Если вторые моменты $B(k)$ известны, то легко решается задача разыскания таких значений коэффициентов a_s, при которых σ^2 достигает наименьшего значения. Это наименьшее значение σ^2 будем обозначать через $\sigma_E^2(n, m)$.

Очевидно, при увеличении n величина $\sigma_E^2(n, m)$ не может возрастать. Поэтому существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_E^2(n, m) = \sigma_E^2(m). \tag{4}$$

Определение этого предела и является первой из решаемых в настоящей работе задач.

Что касается задачи интерполирования, то мы рассмотрим лишь случай оценки $x(t)$ по величинам

$$x(t+1),\, x(t+2),\, \ldots,\, x(t+n),$$
$$x(t-1),\, x(t-2),\, \ldots,\, x(t-n).$$

Для этого случая обозначим через $\sigma_I^2(n)$ минимальное значение математического ожидания

$$\sigma^2 = \mathrm{M}\,(x(t)-Q)^2,$$

где Q есть линейная форма:

$$Q = a_1 x\,(t+1) + a_2 x\,(t+2) + \ldots + a_n x\,(t+n) +$$
$$+ a_{-1} x(t-1) + a_{-2} x(t-2) + \ldots + a_{-n} x(t-n)$$

с постоянными действительными коэффициентами a_s.

При возрастании n величина $\sigma_I^2(n)$ не возрастает. Поэтому существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_I^2(n) = \sigma_I^2. \tag{5}$$

Нашей второй задачей является определение σ_I^2. Предлагаемое далее решение двух сформулированных выше задач было сообщено без доказательства в моей заметке ([1]) *. Оно опирается на понятия, относящиеся к спектральной теории стационарных случайных процессов.

Спектральная теория стационарных случайных процессов была построена А. Я. Хинчиным для случая непрерывного изменения временного аргумента t ([2]). Для интересующего нас сейчас случая дискрет-

* В формуле (1) этой заметки допущена опечатка. Правильный вид формулы (1) таков:

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n^2(I) = \sigma^2(I) = \frac{\pi}{\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{d\lambda}{s(\lambda)}}.$$

ной стационарной последовательности подробное изложение теории дано в книге H. Wold'a ([3]). Основное значение здесь имеет следующая теорема *.

ТЕОРЕМА 1. *Для любой стационарной последовательности* $\{x(t)\}$ *вторые моменты* $B(k)$ *можно представить в виде*

$$B(k)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos k\lambda \, dW(\lambda), \tag{6}$$

где $W(\lambda)$ *есть неубывающая действительная функция, определяемая формулой*

$$W(\lambda)=B(0)\lambda+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B(k)}{k}\sin k\lambda. \tag{7}$$

Производная

$$w(\lambda)=\frac{dW(\lambda)}{d\lambda}$$

неубывающей функции $W(\lambda)$ существует почти всюду, неотрицательна и суммируема. Так как

$$\log w(\lambda)\leqslant w(\lambda),$$

то из суммируемости $w(\lambda)$ вытекает, что интеграл

$$P=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \log w(\lambda)\,d\lambda \tag{8}$$

либо конечен, либо равен $-\infty$ **. Далее мы доказываем следующую теорему:

ТЕОРЕМА 2. *Если* $P=-\infty$, *то* $\sigma_E^2(m)=0$ *для всех* $m\geqslant 0$. *Если же интеграл* P *конечен, то*

$$\sigma_E^2(m)=e^P(1+r_1^2+r_2^2+\ldots+r_m^2), \tag{9}$$

где r_s *определяются из соотношений*

$$e^{a_1\zeta+a_2\zeta^2+\ldots}=1+r_1\zeta+r_2\zeta^2+\ldots, \tag{10}$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos k\lambda \log w(\lambda)\,d\lambda. \tag{11}$$

Так как $w(\lambda)\geqslant 0$, то интеграл

$$R=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\lambda}{w(\lambda)} \tag{12}$$

либо конечен, либо равен $+\infty$ ***. Мы докажем далее такую теорему:

ТЕОРЕМА 3. *Если* $R=+\infty$, *то* $\sigma_I^2=0$. *Если же интеграл* R *конечен, то*

$$\sigma_I^2=\frac{1}{R}. \tag{13}$$

* См. ([3]), § 17.

** Если $w(\lambda)=0$ на множестве положительной меры, то считаем $P=-\infty$.

*** Если $w(\lambda)=0$ на множестве положительной меры, то считаем $R=+\infty$.

В моей работе (4) построена теория стационарных последовательностей элементов комплексного гильбертова пространства. В § 1 настоящей статьи я показываю, что стационарные случайные последовательности в определенном выше смысле могут рассматриваться как частный случай стационарных последовательностей, рассмотренных в (4). Это позволяет получить сформулированные выше теоремы 1, 2 и 3 в качестве простых следствий из результатов работы (4).

В дальнейшем изложении ссылки на формулы с номерами из двух чисел, разделенных точкой [например (8.44)], относятся к формулам из (4).

1. Стационарные случайные последовательности и геометрия гильбертова пространства

Будем исходить из аксиоматики и построения основных понятий теории вероятностей, предложенных в моей книге (5), с тем изменением, что рассматриваемые далее случайные величины могут принимать не только действительные, но и комплексные значения *.

Рассмотрим множество $\mathfrak{H}$ всех случайных величин x какого-либо борелевского поля вероятностей (F, P), имеющих конечное математическое ожидание квадрата абсолютной величины, считая при этом эквивалентные случайные величины (т. е. случайные величины, отличающиеся друг от друга лишь с вероятностью равной нулю) за тождественные. Введем в $\mathfrak{H}$ скалярное произведение

$$(x, y) = \mathrm{M}(x\bar{y}). \tag{14}$$

Норму в $\mathfrak{H}$ определим формулой

$$\|x\|^2 = (x, x) = \mathrm{M}\,|x|^2, \tag{15}$$

сложение же элементов $\mathfrak{H}$ и их умножение на комплексные числа будем понимать в обычном смысле.

Легко проверить, что множество $\mathfrak{H}$ при установленных сейчас определениях удовлетворяет постулатам A, B и E книги M. Stone'а (6). т. е. всем постулатам абстрактного унитарного пространства.

Пусть теперь $\{x(t)\}$ есть стационарная последовательность действительных случайных величин $x(t)$ поля вероятностей (F, P) в смысле, принятом во введении, удовлетворяющая дополнительному условию (1). Тогда в силу (2) и действительности $x(t)$

$$B(k) = \mathrm{M}\,[x(t+k)\,x(t)] = (x(t+k), x(t)).$$

---

* Комплексная функция $x(\xi)$, определенная на множестве E элементарных событий ξ, называется случайной величиной, если при любом выборе действительных чисел a и b множество всех ξ, для которых действительная и мнимая части $x(t)$ удовлетворяют соответственно неравенствам $Rx(\xi) < a$, $Ix(\xi) < b$, принадлежит системе F.

Так как, по определению, $B(k)$ не зависит от t, то $\{x(t)\}$ является стационарной последовательностью элементов пространства $\mathfrak{H}$ в смысле ([4]).

В ([4]) я рассматриваю стационарные последовательности, лежащие в гильбертовом пространстве, т. е. в пространстве, удовлетворяющем, кроме постулатов A, B и E, еще постулатам C и D книги M. Stone'a ([6]). Это ограничение, однако, несущественно. В самом деле, обозначим через H_x минимальное замкнутое линейное подпространство пространства $\mathfrak{H}$, содержащее все элементы последовательности $\{x(t)\}$. Легко доказывается, что H_x сепарабельно, т. е. удовлетворяет постулату D. Сепарабельное унитарное пространство или само является гильбертовым (т. е. удовлетворяет, кроме A, B, D и E, еще постулату C) или конечномерно и в последнем случае может быть расширено до некоторого гильбертова пространства H.

Таким образом, к последовательности $\{x(t)\}$ можно применить, полагая

$$B(k) = B_{xx}(k) = (x(t+k),\ x(t)), \tag{16}$$

все результаты, полученные в ([4]).

2. Доказательство теоремы 1

В силу (3) и (16) в случае действительных случайных величин $x(t)$

$$B_{xx}(-k) = B_{xx}(k). \tag{17}$$

Поэтому из формулы (3. 10) получаем

$$W_{xx}(\lambda) = B_{xx}(0)\,\lambda - \sum_{k\neq 0} \frac{B_{xx}(k)}{ik} e^{-ik\lambda} = \\ = B_{xx}(0)\,\lambda + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{xx}(k)}{k} \sin k\lambda. \tag{18}$$

Из (18) вытекает, что

$$W_{xx}(-\lambda) = -W_{xx}(\lambda). \tag{19}$$

Наконец, из (3. 1), (3. 9) и (19) получаем

$$B(k) = B_{xx}(k) = \int_{-\pi}^{+\pi} e^{ik\lambda}\, dF_{xx}(\lambda) = \\ = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{ik\lambda}\, dW_{xx}(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos k\lambda\, dW_{xx}(\lambda). \tag{20}$$

Из формул (18) и (3. 9) и теоремы 2 работы ([4]) ясно, что $W_{xx}(\lambda)$ есть действительная неубывающая функция. Вместе с равенствами (18) и (20) это показывает, что функция

$$W(\lambda) = W_{xx}(\lambda)$$

удовлетворяет требованиям теоремы 1.

3. $\sigma_E^2(m)$ в общем случае

Обозначим, следуя ([4]), через $H_x(t-1)$ минимальное линейное замкнутое подпространство пространства H_x, содержащее элементы

$$x(t-1),\ x(t-2),\ \dots,\ x(t-n),\ \dots$$

Элемент $x(t+m)$ при любом $m \geqslant 0$ единственным образом представляется в виде

$$x(t+m) = \xi(t-1, m) + \Delta(t-1, m), \tag{21}$$

где $\xi(t-1, m)$ принадлежит $H_x(t-1)$, а $\Delta(t-1, m)$ ортогонально $H_x(t-1)$.

Легко показать, что в случае стационарной последовательности действительных случайных величин *

$$\sigma_E^2(m) = \|\Delta(t-1, m)\|^2. \tag{22}$$

В общем случае стационарных последовательностей в смысле ([4]) будем считать (22) за определение величины $\sigma_E^2(m)$.

Если последовательность $\{x(t)\}$ сингулярна, то $H_x(t-1) = H_x$, и следовательно

$$\sigma_E^2(m) = 0. \tag{23}$$

Если последовательность $\{x(t)\}$ не сингулярна, то по формуле (7. 8)

$$x(t+m) = s_x(t+m) + \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(x)} u_x(t+m-n). \tag{24}$$

Так как $s_x(t+m)$ и $u_x(t+m-n)$ при $n > m$ лежат в $H_x(t-1)$, а $u_x(t+m-n)$ при $n \leqslant m$ ортогональны $H_x(t-1)$, то сопоставление (21) с (24) дает

$$\Delta(t-1, m) = c_0^{(x)} u_x(t+m) + c_1^{(x)} u_x(t+m-1) + \dots + c_m^{(x)} u_x(t). \tag{25}$$

Так как элементы $u_x(t+i)$ попарно ортогональны и нормированы, то из (25) вытекает

$$\sigma_E^2(m) = \|\Delta(t-1, m)\|^2 = (c_0^{(x)})^2 + (c_1^{(x)})^2 + \dots + (c_m^{(x)}). \tag{26}$$

---

* Как известно, $\|\Delta(t-1, m)\|$ равняется «расстоянию» точки $x(t+m)$ от пространства $H_x(t-1)$, т. е. нижней грани расстояний $\|x(t+m) - y\|$ для всех y из $H_x(t-1)$. Так как элементы вида

$$L = a_1 x(t-1) + a_2 x(t-2) + \dots + a_n x(t-n)$$

всюду плотны на $H_x(t-1)$, то $\|\Delta(t-1, m)\|$ равняется также нижней грани расстояний

$$\|x(t+m) - L\| = \sqrt{\mathrm{M}\,|x(t+m) - L|^2}. \tag{$\bullet$}$$

Если все $x(s)$ являются действительными случайными величинами, то нижняя грань выражения ($\bullet$) не изменяется при ограничении одними действительными коэффициентами a_k, в этом же случае она, очевидно, совпадает с $\sigma_E(m)$.

4. $\sigma_E^2(m)$ в действительном случае

Для стационарных последовательностей действительных случайных величин из формулы (26) легко вывести теорему 2. Этому выводу посвящен настоящий параграф.

В силу формулы (3.9) имеем

$$f_{xx}(\lambda)=\frac{dF_{xx}(\lambda)}{d\lambda}=\frac{1}{2\pi}\,\frac{dW_{xx}(\lambda)}{d\lambda}=\frac{1}{2\pi}w(\lambda). \tag{27}$$

Из (19) вытекает, что

$$w(-\lambda)=w(\lambda). \tag{28}$$

Пользуясь (27) и (28), получаем

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\log f_{xx}(\lambda)\,d\lambda=2\int_{0}^{\pi}\log w(\lambda)\,d\lambda-2\pi\log 2\pi. \tag{29}$$

Формула (29) вместе с теоремой (23) из ([4]) показывает, что равенство

$$P\doteq\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\log w(\lambda)\,d\lambda=-\infty$$

необходимо и достаточно для сингулярности последовательности $\{x(t)\}$. Мы уже видели в § 3, что в этом и только в этом случае

$$\sigma_E^2(m)=0. \tag{30}$$

Если последовательность $\{x(t)\}$ не сингулярна, то из (8.44) и (29) вытекает

$$(c_0^{(x)})^2=2\pi\exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\log f_{xx}(\lambda)\,d\lambda\right)=$$

$$=\exp\left(\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\log w\lambda\,d\lambda\right)=e^{P}. \tag{31}$$

В том же предположении, что последовательность $\{x(t)\}$ не сингулярна *, из (8.31), (27) и (28) заключаем, что при $k\geqslant 0$

$$\left.\begin{aligned}a_k^{(x)}&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\cos k\lambda\log f_{xx}(\lambda)\,d\lambda=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos k\lambda\log w(\lambda)\,d\lambda,\\ b_k^{(x)}&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\sin k\lambda\log f_{xx}(\lambda)\,d\lambda=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\sin k\lambda\log w(\lambda)\,d\lambda=0.\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Из (8.16), (8.29), (8.30) и (32) вытекает, что

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n^{(x)}\zeta^n=\Gamma_x(\zeta)=\Gamma_x(0)\,\frac{\Gamma_x(\zeta)}{\Gamma_x(0)}=\Gamma_x(0)\,e^{Q_x(\zeta)-Q_x(0)}=$$

$$=c_0^{(x)}\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_k^{(x)}\zeta^k\right). \tag{33}$$

---

* Как указано в теореме 23 из ([4]), формулы (8.16), (8.29), (8.30) и (8.31) применимы к любой несингулярной последовательности.

Положив

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(x)}\zeta^k\right) = 1 + r_1\zeta + r_2\zeta^2 + \ldots, \tag{34}$$

имеем из сравнения (33) с (34)

$$\frac{c_n^{(x)}}{c_0^{(x)}} = r_n. \tag{35}$$

Из (35) и (26) вытекает

$$\sigma_E^2(m) = (c_0^{(x)})^2 (1 + r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_m^2). \tag{36}$$

Формулы (30), (31) и (36) полностью доказывают теорему 2.

5. Определение σ_I^2

Обозначим, следуя (4), через $\hat{H}_x(t)$ минимальное линейное замкнутое подпространство пространства H_x, содержащее элементы

$$x(t+1),\ x(t+2),\ \ldots,\ x(t+n),\ \ldots,$$
$$x(t-1),\ x(t-2),\ \ldots,\ x(t-n),\ \ldots$$

Элемент $x(t)$ однозначно представляется в виде (10. 3):

$$x(t) = \nu(t) + \delta(t),$$

где $\nu(t)$ лежит в $\hat{H}_x(t)$, а $\delta(t)$ ортогонально $\hat{H}_x(t)$. Легко показать, что в случае стационарной последовательности действительных случайных величин

$$\sigma_I^2 = \|\delta(t)\|^2 = d_x^2. \tag{37}$$

По теореме 24 из (4)

$$d_x^2 = \frac{(2\pi)^2}{\int\limits_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\lambda}{f_{xx}(\lambda)}}, \tag{38}$$

причем в случае бесконечности интеграла в знаменателе правой части

$$d_x^2 = 0.$$

Из (37), (38), (27) и (28) заключаем, что

$$\sigma_I^2 = d_x^2 = \frac{\pi}{\int\limits_0^{\pi} \frac{d\lambda}{w(\lambda)}} = \frac{1}{R},$$

что и доказывает теорему 3.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии Наук СССР

Получено
26. XI. 1940

ЛИТЕРАТУРА

[1] Kolmogoroff A., Sur l'interpolation et extrapolation des suites stationnaires, Comptes Rundus de l'Acad. Sci., Paris, 208 (1939), 2043—2045.
[2] Khintchine A., Korrelationstheorie der stationären stochastischen Prozesse, Math. Annalen, 109 (1934), 604—615.
[3] Wold H., A study in the analysis of stationary time series, Uppsala, 1938.
[4] Колмогоров А. Н., Стационарные последовательности в гильбертовом пространстве, Бюллетень МГУ (Bulletin de l'Université de Moscou), 2 (1941), n° 6.
[5] Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, М. 1936.
[6] Stone M., Linear transformations in Hilbert space, American Mathem. Soc. Colloquium Publications, 15 (1932).

A. KOLMOGOROFF. INTERPOLATION UND EXTRAPOLATION VON STATIONÄREN ZUFÄLLIGEN FOLGEN

ZUSAMMENFASSUNG

Es möge jedem ganzen t $(-\infty < t < \infty)$ eine reelle zufällige Grösse $x(t)$ mit endlicher mathematischen Erwartung des Quadrats entsprechen. Die Folge $\{x(t)\}$ der zufälligen Grössen $x(t)$ werden wir stationär nennen, wenn die mathematischen Erwartungen

$$m = \mathrm{M}\, x(t)$$

und

$$B(k) = \mathrm{M}\,[(x(t+k) - m)(x(t) - m)]$$

von t nicht abhängen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man

$$m = \mathrm{M}\, x(t) = 0 \tag{1}$$

setzen. Dann haben wir

$$B(k) = \mathrm{M}\,[x(t+k)\, x(t)]. \tag{2}$$

Da

$$B(-k) = B(k) \tag{3}$$

ist, so genügt es die zweiten Momente $B(k)$ nur für $k \geqslant 0$ zu betrachten.

Die Aufgabe der linearen Extrapolation der stationären Folge, die der Bedingung (1) genügt, besteht in der Bestimmung bei gegebenen $n > 0$ und $m \geqslant 0$ solcher reeller Koeffizienten a_s, für die die lineare Kombination

$$L = a_1 x(t-1) + a_2 x(t-2) + \ldots + a_n x(t-n)$$

der zufälligen Grössen

$$x(t-1),\ x(t-2),\ \ldots,\ x(t-n)$$

die bestmögliche Approximation der zufälligen Grösse $x(t+m)$ ergibt. Für das Mass der Güte einer solchen Approximation ist es natürlich die mathematische Erwartung

$$\sigma^2 = \mathrm{M}\,(x(t+m) - L)^2 = B(0) - 2\sum_{s=1}^{n} B(m+s)\, a_s + \sum_{p,q=1}^{n} B(p-q)\, a_p a_q$$

zu nehmen.

Falls die zweiten Momente $B(k)$ bekannt sind, so kann die Aufgabe der Auffindung solcher Werte der Koeffizienten a_s, für die σ^2 minimal ist, leicht gelöst werden. Diesen kleinsten Wert von σ^2 werden wir mit $\sigma_E^2(n, m)$ bezeichnen.

Offenbar kann die Grösse $\sigma_E^2(n, m)$ mit wachsendem n nicht zunehmen. Daher existiert der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_E^2(n, m) = \sigma_E^2(m). \tag{4}$$

Die Bestimmung dieses Grenzwertes ist die erste Aufgabe der vorliegenden Arbeit, die in ihr gelöst wird.

Was die Aufgabe der Interpolation anbetrifft, so betrachten wir nur den Fall der Abschätzung von $x(t)$ nach den Grössen

$$x(t+1),\ x(t+2),\ \ldots,\ x(t+n),$$
$$x(t-1),\ x(t-2),\ \ldots,\ x(t-n).$$

In diesem Fall bezeichnen wir mit $\sigma_I^2(n)$ den kleinsten Wert der mathematischen Erwartung

$$\sigma^2 = \mathrm{M}(x(t) - Q)^2,$$

wo Q die lineare Form

$$Q = a_1 x(t+1) + a_2 x(t+2) + \ldots + a_n x(t+n) +$$
$$+ a_{-1} x(t-1) + a_{-2} x(t-2) + \ldots + a_{-n} x(t-n)$$

mit konstanten reellen Koeffizienten a_s bedeutet.

Mit wachsendem n nimmt die Grösse $\sigma_I^2(n)$ nicht zu. Daher existiert der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_I^2(n) = \sigma_I^2. \tag{5}$$

Unsere zweite Aufgabe besteht in der Bestimmung von σ_I^2.

Die unten angeführte Lösung der beiden oben formulierten Aufgaben wurde von mir ohne Beweis in meiner Note (1) * mitgeteilt. Sie stützt sich auf Begriffe aus der Spektraltheorie der stationären zufälligen Prozesse.

Die Spektraltheorie der stationären zufälligen Prozesse wurde für den Fall der stetigen Änderung der Zeitveränderlichen t von A. Khintchine [siehe (2)] entwickelt. Für den uns hier interessierenden Fall einer diskreten stationären Folge ist eine ausführliche Darlegung der Theorie in dem Buch von H. Wold (3) enthalten. Von fundamentaler Bedeutung ist hier der folgende

* In der Formel (1) dieser Note ist ein Druckfehler unterlaufen. Die Formel (1) muss so aussehen:

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n^2(I) = \sigma^2(I) = \frac{\pi}{\displaystyle\int_0^\pi \frac{d\lambda}{s(\lambda)}}. \tag{1}$$

SATZ 1. *Für eine beliebige stationäre Folge $\{x(t)\}$ können die zweiten Momente $B(k)$ in der Form*

$$B(k) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos k\lambda \, dW(\lambda) \tag{6}$$

dargestellt werden, wo $W(\lambda)$ eine nichtabnehmende reelle Funktion ist, die durch die Formel

$$W(\lambda) = B(0)\lambda + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B(k)}{k} \sin k\lambda \tag{7}$$

bestimmt wird.

Die Ableitung $w(\lambda) = \frac{dW(\lambda)}{d\lambda}$ der nichtabnehmenden Funktion $W(\lambda)$ existiert fast überall und ist nichtnegativ und summierbar. Da

$$\log w(\lambda) \leqslant w(\lambda)$$

ist, so folgt aus der Summierbarkeit von $w(\lambda)$, dass das Integral

$$P = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \log w(\lambda) \, d\lambda \tag{8}$$

entweder endlich, oder gleich $-\infty$ ist*. Ferner beweisen wir den folgenden

SATZ 2. *Falls $P = -\infty$ ist, so ist $\sigma_E^2(m) = 0$ für alle $m > 0$. Wenn aber das Integral P endlich ist, so ist*

$$\sigma_E^2(m) = e^P (1 + r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_m^2), \tag{9}$$

wo die r_s aus den Beziehungen

$$e^{a_1 z + a_2 z^2 + \dots} = 1 + r_1 z + r_2 z^2 + \dots, \tag{10}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos k\lambda \log w(\lambda) \, d\lambda \tag{11}$$

bestimmt werden.

Da $w(\lambda) \geqslant 0$ ist, so ist das Integral

$$R = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\lambda}{w(\lambda)} \tag{12}$$

entweder endlich, oder gleich $+\infty$ *. Wir beweisen nun den folgenden

SATZ 3. *Falls $R = +\infty$ ist, so ist $\sigma_I^2 = 0$. Wenn aber das Integral R endlich ist, so ist*

$$\sigma_I^2 = \frac{1}{R}. \tag{13}$$

---

* Wenn $w(\lambda) = 0$ auf einer Menge positiven Masses ist, so setzen wir $P = -\infty$ und $R = +\infty$.

In meiner Arbeit ([4]) ist die Theorie der stationären Folgen von Elementen des komplexen Hilbertschen Raumes entwickelt worden. In §1 der vorliegenden Arbeit zeige ich, dass die stationären zufälligen Folgen in dem oben definierten Sinn als ein Sonderfall der stationären Folgen aufgefasst werden können, die in ([4]) betrachtet sind. Dies gestattet die oben formulierten Sätze 1, 2 und 3 als einfache Folgerungen aus den Resultaten der Arbeit ([4]) zu erhalten.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 5 (1941), 15—42 Série mathématique

С. Н. БЕРНШТЕЙН

О ПРИБЛИЖЕНИИ НЕПРЕРЫВНОЙ ФУНКЦИИ ЛИНЕЙНЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРОМ ОТ МНОГОЧЛЕНА

Работа посвящена исследованию необходимых и достаточных условий для того, чтобы данный линейный дифференциальный оператор от многочлена мог равномерно приблизить произвольную непрерывную функцию.

Пусть

$$D_k(Y(x)) = \sum_{i=0}^{k} \varphi_i(x)\, Y^{(k-i)}(x) \tag{1}$$

будет некоторый дифференциальный оператор k-го порядка с данными непрерывными коэффициентами $\varphi_i(x)$.

Если в промежутке (a, b) старший коэффициент $\varphi_0(x) \gtrless 0$, то, как известно, уравнение

$$D_k(Y) = A(x), \tag{2}$$

где $A(x)$—непрерывная функция, имеет в этом промежутке k независимых решений, регулярных в классическом смысле, т. е. непрерывных вместе со своими производными k первых порядков. В таком случае, применяя теорему Вейерштрасса к k-ой производной какого-нибудь из этих решений, можно без труда получить многочлены $P_\varepsilon(x)$, которые при любом $\varepsilon > 0$ удовлетворяют неравенству

$$|D_k(P_\varepsilon(x)) - A(x)| < \varepsilon \tag{3}$$

на всем отрезке (a, b). Иначе говоря, в этом случае ($\varphi_0(x) \gtrless 0$) система функций ($k = 0, 1, 2, \ldots$)

$$f_n(x) = D_k(x^n) = \sum_{i=0}^{k} n(n-1)\ldots(n-i+1)\, x^{n-i} \varphi_{k-i}(x) \tag{4}$$

является полной на отрезке (a, b).

Настоящая статья имеет целью исследовать необходимые и достаточные условия для того, чтобы система функций (4) была полной на данном отрезке, и кроме того, в случае, когда она является неполной, выяснить свойства и число функций, которые к ней нужно добавить, чтобы сделать ее полной. Для краткости будем называть операторами класса (S) на (a, b) операторы (1), дающие полную систему функций, т. е. позволяющие осуществить неравенства (3) на (a, b) при

любом $\varepsilon > 0$, какова бы ни была данная непрерывная функция $A(x)$; в противном случае оператор (1) будет называться оператором $(\bar{S})$.

Очевидно, что оператор должен быть $(\bar{S})$, если все коэффициенты $\varphi_i(x)$ одновременно обращаются в нуль в какой-нибудь точке (a, b).

В предлагаемой работе рассматриваются только операторы, у которых $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ не обращаются в нуль одновременно.

ГЛАВА ПЕРВАЯ

Условие, необходимое и достаточное для принадлежности оператора к классу (S)

1

Регулярные решения. Для обобщения указанного в начале классического результата необходимо обобщить понятие регулярного решения дифференциального уравнения (2). Пусть E будет множество точек x_0 на (a, b), где $\varphi_0(x_0) = 0$ (по предположению $\varphi_1(x_0) \gtrless 0$); дополнительное к E множество обозначим через $\bar{E}$.

В таком случае $Y(x)$ будет называться регулярным на (a, b) решением уравнения (2), если оно удовлетворяет этому уравнению во всех точках $\bar{E}$ и непрерывно вместе со своими $k-1$ первыми производными во всех точках (a, b), причем во всех точках x_0 множества E

$$\sum_{i=1}^{k} \varphi_i(x_0)\, Y^{(k-i)}(x_0) = A(x_0). \tag{5}$$

В дальнейшем термин «регулярность» будет применяться только в этом смысле (а не в классическом). Например регулярным решением уравнения

$$x^2 \frac{dy}{dx} + y = x$$

на любом отрезке (a, b), где $a < 0 < b$, будет функция $Y(x)$, определяемая формулами

$$Y(x) = e^{\frac{1}{x}} \int_0^x \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t}\, dt \quad \text{при } x > 0;$$

$$Y(x) = e^{\frac{1}{x}} \int_{x_0}^x \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t}\, dt,$$

какова бы ни была постоянная $x_0 < 0$, при $x < 0$;

$$Y(0) = 0.$$

В качестве второго примера рассмотрим уравнение

$$x^2 \sin\frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + y = x;$$

множество E состоит из точек 0 и $\pm\frac{1}{k\pi}$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Регулярное ре-

шение на любом отрезке (a, b) представится в виде нечетной функции

$$Y(x) = \operatorname{tg}\frac{1}{2x}\int\limits_{\frac{1}{(2k+1)\pi}}^{x}\frac{dt}{2t\sin^2\frac{1}{2t}} \quad \text{при} \quad \frac{1}{2(k+1)\pi} < x < \frac{1}{2k\pi},$$

$$Y(x) = x \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{и} \quad x = \frac{1}{(k+1)\pi} \quad (\text{целое число } k \geqslant 0).$$

Мы можем теперь перейти к доказательству основной теоремы.

2

ТЕОРЕМА. *Для того чтобы оператор* (1) *был оператором* (S) *на* (a, b), *необходимо и достаточно, чтобы уравнение* (2) *имело регулярное решение на* (a, b), *какова бы ни была непрерывная функция* $A(x)$.

Для доказательства достаточности рассмотрим какое-нибудь регулярное решение $Y(x)$ уравнения (2). Разделим (a, b) на достаточно малые промежутки $(a, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{n-1}, b)$ так, чтобы при данном произвольно малом $\varepsilon > 0$, колебания $A(x)$, $Y^{(i)}(x)$ $(i = 0, 1, \ldots, k-1)$ и $\sum\limits_1^k \varphi_i(x) Y^{(k-i)}(x)$ были менее ε в каждом промежутке; так как требуемое свойство промежутков не нарушится, если мы разобьем их на части, то можем принять, что если в промежутке (x_h, x_{h+1}) есть точка из множества E, то по крайней мере один из его концов (x_h или x_{h+1}) принадлежит множеству $\overline{E}$. Таким образом у нас будут промежутки одной из трех категорий: 1) все точки (x_h, x_{h+1}) принадлежат $\overline{E}$, 2) все точки (x_h, x_{h+1}) принадлежат E, 3) по крайней мере один из концов x_h или x_{h+1} принадлежит $\overline{E}$, причем в промежутке (x_h, x_{h+1}) есть хоть одна точка из E.

Вместо $Y(x)$ введем функцию $Z(x)$, имеющую непрерывные производные первых k порядков, которую построим следующим образом.

В промежутках первой категории полагаем

$$Z^{(k)}(x) = Y^{(k)}(x).$$

В промежутках второй категории полагаем в обоих концах

$$Z^{(k-1)}(x_h) = Y^{(k-1)}(x_h), \quad Z^{(k-1)}(x_{h+1}) = Y^{(k-1)}(x_{h+1}),$$

и требуя, чтобы во всем промежутке колебание $Z^{(k-1)}(x)$ было (как и у $Y^{(k-1)}(x)$) менее ε, осуществляем непрерывность $Z^{(k)}(x)$ с дополнительным условием

$$Z^{(k)}(x_h) = Z^{(k)}(x_{h+1}) = 0.$$

Наконец, в том из концов промежутка (x_h, x_{h+1}) третьей категории, который принадлежит $\overline{E}$ (например x_h), полагаем

$$Z^{(k)}(x_h) = Y^{(k)}(x_h),$$

считая в другом конце

$$Z^{(k)}(x_{h+1}) = Y^{(k)}(x_{h+1}) \text{ или } 0,$$

в зависимости от того, принадлежит ли x_{h+1} множеству $\overline{E}$ или E; кроме того, в какой-нибудь из точек ξ_h этого промежутка, принадлежащей E, полагаем

$$Z^{(k-1)}(\xi_h) = Y^{(k-1)}(\xi_h);$$

требуя непрерывности k-ой производной $Z^{(k)}(x)$, подчиняем ее еще условию

$$|\varphi_0(x) Z^{(k)}(x)| < 2\varepsilon$$

(которое не противоречит принятым значениям для $Z^{(k)}(x_h)$ и $Z^{(k)}(x_{h+1})$, так как по условию $\left|\sum_1^k \varphi_i(x_h) Y^{(k-i)}(x_h) - A(x_h)\right| < 2\varepsilon$); при этом, принимая во внимание, что $Z^{(k-1)}(x)$ зафиксировано лишь в одной точке ξ_h промежутка (x_h, x_{h+1}), можем сделать колебание $Z^{(k-1)}(x)$ меньше ε во всем промежутке. Вследствие этого имеем

$$|Z^{(k-1)}(x) - Y^{(k-1)}(x)| < 2\varepsilon \tag{6}$$

во всех промежутках третьей, как и второй категории; но, учитывая, что в промежутках первой категории $Z^{(k)}(x) - Y^{(k)}(x) = 0$, заключаем, что неравенство (6) соблюдается на всем отрезке (a, b). Поэтому, если для определения $Z(x)$ мы потребуем еще, чтобы $Z(x_0) = Y(x_0), \ldots$ $\ldots, Z^{(k-2)}(x_0) = Y^{(k-2)}(x_0)$ в какой-нибудь точке x_0 отрезка (a, b), то найдем последовательно

$$|Z^{(k-2)}(x) - Y^{(k-2)}(x)| < 2\varepsilon |x - x_0|, \quad |Z^{(k-3)}(x) - Y^{(k-3)}(x)| < \varepsilon |x - x_0|^2, \ldots;$$

т. е. можно указать такую постоянную H [зависящую только от длины отрезка (a, b)], что

$$|Z^{(i)}(x) - Y^{(i)}(x)| < H\varepsilon \quad (i = 0, 1, \ldots, k-1) \tag{7}$$

на всем отрезке (a, b). Отсюда следует также, что можно указать такую постоянную H_1, что

$$\left|\sum_1^k \varphi_i(x) Z^{(k-i)}(x) - \sum_1^k \varphi_i(x) Y^{(k-i)}(x)\right| < H_1\varepsilon \quad (a \leqslant x \leqslant b), \tag{8}$$

а потому во всех промежутках первой категории [где $Z^{(k)}(x) = Y^{(k)}(x)$] так же, как во всех точках множества E, в частности, во всех промежутках второй категории, имеем

$$|D_k(Z(x)) - A(x)| < H_1\varepsilon. \tag{9}$$

Что же касается точек из $\overline{E}$, находящихся в промежутках третьей категории, то, по условию, $|\varphi_0(x) Y^{(k)}(x)| < 2\varepsilon$, $|\varphi_0(x) Z^{(k)}(x)| < 2\varepsilon$ во всех этих точках; поэтому из (8) вытекает, что для них справедливо неравенство

$$|D_k(Z(x)) - A(x)| < (H_1 + 4)\varepsilon, \tag{10}$$

которое таким образом соблюдается на всем отрезке (a, b).

Можем заметить, что, в сущности, мы доказали, что если уравнение (2) имеет регулярное решение (в нашем смысле), то как бы мало ни было данное $\varepsilon > 0$, существует непрерывная функция $A_1(x)$, отличающаяся от $A(x)$ меньше, чем на $(H_1 + 4)\varepsilon$, для которой уравнение $D_k(Z(x)) = A_1(x)$ имеет регулярное решение в классическом смысле. Следовательно, согласно сделанному в начале замечанию, для всякой непрерывной функции $A(x)$ возможно построить многочлены $P_\varepsilon(x)$, удовлетворяющие неравенствам (3), т. е. рассматриваемый оператор $D_k(Y(x))$ является оператором (S).

3

Для доказательства необходимости высказанного в теореме условия нам нужно предварительно установить две леммы.

ЛЕММА 1. *Если для некоторой непрерывной функции существуют многочлены $P_\varepsilon(x)$, удовлетворяющие неравенствам*

$$|D_k(P_\varepsilon(x)) - A(x)| < \varepsilon \quad (a \leqslant x \leqslant b) \tag{3}$$

при любых $\varepsilon > 0$, то каково бы ни было число m данных на (a, b) точек $x_1, x_2, \ldots, x_m$ и каково бы ни было число $l > 0$, можно построить последовательность многочленов $P_\varepsilon(x)$, удовлетворяющих тем же неравенствам (3), и кроме того таких, что для некоторой системы конечных значений $\rho_i^{(h)}$ все $P_\varepsilon(x)$ удовлетворяют lm равенствам

$$P_\varepsilon^{(h)}(x_i) = \rho_i^{(h)} \quad (i = 1, 2, \ldots, m;\ h = 0, 1, \ldots, l-1). \tag{11}$$

В самом деле, допустим, что данные нам многочлены $P_\varepsilon(x)$ не удовлетворяют какому-нибудь из условий (11); пусть, например, значение $P_\varepsilon(x_1)$ зависит от ε. Тогда возможны два случая: либо $|P_\varepsilon(x_1)|$ имеет верхнюю границу, либо при всяком $\varepsilon > 0$ найдется такое $\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon$, что $|P_{\varepsilon_1}(x_1)| > 3|P_\varepsilon(x_1)|$.

Рассмотрим сначала второй случай и построим многочлен

$$R(x) = \lambda P_\varepsilon(x) + (1-\lambda) P_{\varepsilon_1}(x), \tag{12}$$

где $\lambda = \frac{P_{\varepsilon_1}(x_1)}{P_{\varepsilon_1}(x_1) - P_\varepsilon(x_1)} > 0$ [очевидно, что если $P_\varepsilon(x)$ и $P_{\varepsilon_1}(x)$ удовлетворяли некоторым другим из равенств (11), то этим же свойством обладает и $R(x)$]. Следовательно, $R(x_1) = 0$ и

$$|D_k(R(x)) - A(x)| = |\lambda(D_k(P_\varepsilon(x)) - A(x)) + (1-\lambda)(D_k(P_{\varepsilon_1}(x) - A(x))| <$$
$$< \lambda\varepsilon + |1-\lambda|\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon[\lambda + |1-\lambda|] \leqslant \varepsilon \frac{|P_{\varepsilon_1}(x_1)| + |P_\varepsilon(x_1)|}{|P_{\varepsilon_1}(x_1)| - |P_\varepsilon(x_1)|} < 2\varepsilon,$$

т. е. многочлены $R(x) = P_{2\varepsilon}(x)$ удовлетворяют не только (3) и тем из условий (11), которым удовлетворяли данные $P_\varepsilon(x)$, но еще и условию $P_{2\varepsilon}(x_1) = \rho_1^{(0)} = 0$.

Таким образом можем поступать до тех пор, пока не удовлетворим всем равенствам (11); если же некоторые из этих равенств еще не будут выполнены, то во всяком случае соответствующие им $|P_\varepsilon^{(h)}(x_i)|$ будут ограничены. Поэтому можем так выбрать наши многочлены $P_\varepsilon(x)$, что все они будут удовлетворять равенствам

$$\lim_{\varepsilon \to 0} P_\varepsilon^{(h)}(x_i) = \rho_i^{(h)} \quad (i = 1, \ldots, m;\ h = 0, \ldots, l-1). \tag{13}$$

Теперь остается лишь положить $R_\varepsilon(x) = P_\varepsilon(x) + S_\varepsilon(x)$, где $S_\varepsilon(x)$ — интерполяционный многочлен степени ниже ml, определенный стремящимися к нулю значениями $S_\varepsilon^{(h)}(x_i) = \rho_i^{(h)} - P_\varepsilon^{(h)}(x_i)$, который, следовательно, при $\varepsilon \to 0$ равномерно стремится к нулю на (a, b) вместе со своими производными любого порядка; а потому $R_\varepsilon(x)$ удовлетворяют условиям (11) и неравенствам, равноценным (3).

4

ЛЕММА II. *Если $z(x)$ непрерывна на (a, b) вместе со своими производными первых k порядков и удовлетворяет неравенству*

$$|D_k(z(x))| < L, \tag{14}$$

причем $|\varphi_0(x)| + |\varphi_1(x)| \geqslant \lambda > 0$; если отрезок (a, b) разбит на конечное число достаточно малых промежутков (x_l, x_{l+1}) так, что в каждой из точек x_l деления $z(x_l) = z'(x_l) = \ldots = z^{(k-1)}(x_l) = 0$, то на всем отрезке (a, b)

$$|z^{(i)}(x)| < \frac{4L\delta^{k-i-1}}{\lambda} \quad (i = 0, 1, \ldots, k-1), \tag{15}$$

где δ — длина наибольшего из промежутков.

В самом деле, берем промежутки (x_l, x_{l+1}) настолько малыми, чтобы колебание $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ в каждом из них было не более $\frac{\lambda}{3}$, тогда в каждом промежутке (x_l, x_{l+1}) будет все время соблюдено по крайней мере одно из неравенств: $|\varphi_0(x)| \geqslant \frac{\lambda}{3}$ или $|\varphi_1(x)| \geqslant \frac{\lambda}{3}$. Предположим сначала, что во всех точках промежутка (x_l, x_{l+1}) имеем $|\varphi_0(x)| \geqslant \frac{\lambda}{3}$, и пусть P будет максимум $z^{(k)}(x)$; в таком случае

$$|z^{(k-1)}(x)| < P\delta, \ |z^{(k-2)}(x)| < P\delta^2, \ldots, |z(x)| < P\delta^k. \tag{16}$$

Поэтому, обозначая через M наибольший из максимумов $|\varphi_i(x)|$ $(i = 1, \ldots, k)$ на (a, b), имеем вследствие (14)

$$\frac{\lambda}{3} P < L + PM(\delta + \delta^2 + \ldots + \delta^k),$$

и полагая $\delta \leqslant \frac{\lambda}{14M}$, $\delta \leqslant \frac{1}{7}$, имеем

$$P < \frac{L}{\frac{\lambda}{3} - \frac{7\delta M}{6}} \leqslant \frac{4L}{\lambda},$$

и вследствие (16)

$$|z^{(k-1)}(x)| < \frac{4L\delta}{\lambda} < \frac{4L}{\lambda}, \ |z^{(k-2)}(x)| < \frac{4L\delta}{\lambda} \text{ и т. д.}$$

Если же $|\varphi_1(x)| \geqslant \frac{\lambda}{3}$, то замечая, что в точке, где $|z^{(k-1)}(x)|$ достигает максимума P_1, имеем $z^{(k)}(x) = 0$, заключаем, подобно предыдущему, что

$$\frac{\lambda}{3} P_1 < L + P_1 M(\delta + \ldots + \delta^{k-1}),$$

откуда

$$P_1 < \frac{L}{\frac{\lambda}{3} - \frac{7\delta M}{6}} \leqslant \frac{4L}{\lambda},$$

т. е.

$$|z^{(k-1)}(x)| < \frac{4L}{\lambda}, \quad |z^{(k-2)}(x)| < \frac{4L\delta}{\lambda} \text{ и т. д.}$$

5

Итак, если есть многочлены $P_\varepsilon(x)$, удовлетворяющие (3), то существует последовательность многочленов $P_{\varepsilon_n}(x)$, удовлетворяющих неравенствам

$$|D_k(P_{\varepsilon_n}(x)) - A(x)| < \varepsilon_n, \tag{3bis}$$

где $P_{\varepsilon_n}^{(h)}(x_i)$ принимают не зависящие от n значения $\varphi_i^{(h)}$ в точках x_i $(h=0, 1, \ldots, k-1;\ i=1, 2, \ldots, m)$, причем точки x_i удовлетворяют условиям леммы II, и ряд $\sum_1^n \varepsilon_n$ сходится. Поэтому, вследствие леммы II, ряд

$$z(x)=P_{\varepsilon_1}(x)+\sum_1^\infty u_n(x),$$

где $u_n(x)=P_{\varepsilon_{n+1}}(x)-P_{\varepsilon_n}(x)$, равномерно и абсолютно сходится на (a, b) вместе со своими производными первых $k-1$ порядков (так как $u_n^{(h)}(x_i)=0$ и $|D_k(u_n(x))|<\varepsilon_n+\varepsilon_{n+1}$).

Покажем, что непрерывная вместе со своими производными первых $k-1$ порядков функция $z(x)$ является регулярным решением уравнения (2). Действительно, во всех точках отрезка (a, b)

$$\left|\sum_1^k \varphi_i(x)\, z^{(k-i)}(x)-\sum_1^k \varphi_i(x)\, P_{\varepsilon_{n_0}}^{(k-i)}(x)\right|=$$

$$=\left|\sum_{i=1}^k \sum_{n=n_0}^\infty \varphi_i(x)\, u_n^{(k-i)}(x)\right|<H(\varepsilon_{n_0}+2\varepsilon_{n_0+1}+2\varepsilon_{n_0+2}+\ldots), \qquad (17)$$

где H — некоторая постоянная; поэтому во всех точках множества E

$$\sum_1^k \varphi_i(x)\, z^{(k-i)}(x)=D_k(z(x))=A(x).$$

С другой стороны, во всякой точке множества $\overline{E}$ ряд $z^{(k)}(x)$ также сходится и

$$|\varphi_0(x)\,[z^{(k)}(x)-P_{\varepsilon_{n_0}}^{(k)}(x)]|=\left|\varphi_0(x)\sum_{n=n_0}^\infty u_n^{(k)}(x)\right|<(H+1)\Big(\varepsilon_{n_0}+2\sum_{n_0+1}^\infty \varepsilon_n\Big),$$

следовательно, благодаря (3^{bis}) и (17), во всех точках множества $\overline{E}$ имеем также

$$|D_k(z(x))-A(x)|<\varepsilon_{n_0}+(2H+1)\Big(\varepsilon_{n_0}+2\sum_{n_0+1}^\infty \varepsilon_n\Big),$$

а потому во всех этих точках

$$D_k(z(x))=A(x).$$

ГЛАВА ВТОРАЯ

Критерии принадлежности оператора к классу (S), основанные на свойствах его особых точек

1

Из основной теоремы следует, что вопрос о принадлежности оператора $D_k(Y(x))$ к классу (S) на отрезке (a, b) эквивалентен вопросу о существовании регулярного решения уравнения (2) на этом отрезке при любом $A(x)$. Поэтому мы сейчас займемся этой последней задачей.

Точки множества E, где $\varphi_0(x)=0$, будем называть **особыми** точками данного оператора. Будем называть особую точку x_0 **изолированной**, если при достаточно малом $\alpha>0$ в промежутке $(x_0-\alpha, x_0+\alpha)$ нет более особых точек; если в промежутке $(x_0, x_0+\alpha)$ нет особой точки отличной от x_0, то x_0 называется изолированной **справа**; аналогично определяется изолированная **слева** особая точка.

ЛЕММА I. *Если $\varphi_0(x)\varphi_1(x)>0$ при $x_0<x\leqslant x_0+\alpha$ вблизи изолированной справа особой точки x_0, то уравнение*

$$D_k(Y(x))=A(x) \tag{2}$$

имеет одно и только одно регулярное решение на отрезке $(x_0, x_0+\alpha)$, определяемое условиями $Y(x_0)=c_0, \ldots, Y^{(k-1)}(x_0)=c_{k-1}$, каковы бы ни были значения c_i, связанные равенством *

$$\sum_1^k \varphi_i(x_0)\, c_{k-i}=A(x_0) \tag{5bis}$$

(*вытекающим из определения регулярности*).

Докажем сначала, что не может быть более одного решения, соответствующего данным значениям c_i $(i=0, 1, \ldots, k-1)$. Для этого, очевидно, достаточно убедиться, что $Z(x)=0$ есть единственное регулярное решение на $(x_0, x_0+\alpha)$ однородного уравнения

$$D_k(Z(x))=0, \tag{18}$$

удовлетворяющее условиям $Z(x_0)=Z'(x_0)=\ldots=Z^{(k-2)}(x_0)=0$ (из которых вытекает $Z^{(k-1)}(x_0)=0$). В самом деле, если бы $|Z^{(k-1)}(x)|\leqslant P$ в промежутке $(x_0, x_0+\varepsilon)$ и $|Z^{(k-1)}(x_0+\varepsilon)|=P>0$, где $0<\varepsilon\leqslant\alpha$, то мы имели бы

$$|Z^{(i)}(x_0+\varepsilon)|\leqslant P\varepsilon \qquad (i=0, 1, \ldots, k-2),$$

полагая $\varepsilon\leqslant 1$. Но замечая, что $Z^{(k)}(x_0+\varepsilon)\,Z^{(k-1)}(x_0+\varepsilon)\geqslant 0$, и принимая во внимание, что $\varphi_0(x)\varphi_1(x)>0$, мы имели бы

$$\varphi_1(x_0+\varepsilon)\,Z^{(k-1)}(x_0+\varepsilon)\sum_1^k \varphi_i(x_0+\varepsilon)\,Z^{(k-i)}(x_0+\varepsilon)\leqslant 0,$$

поэтому, полагая $|\varphi_1(x_0+\varepsilon)|=\lambda>0$ и $|\varphi_i(x)|<M$ $(i=2, \ldots, k)$, находим

$$\lambda P-(k-1)M\varepsilon P\leqslant 0,$$

что невозможно, если $\varepsilon<\frac{\lambda}{(k-1)M}$. Следовательно, необходимо, чтобы $P=0$.

Для доказательства существования требуемого решения уравнения (2) достаточно ограничиться предположением, что $A(x_0)=0$ в точке x_0 и все заданные значения $c_i=0$ $(i=0, 1, \ldots, k-1)$. Возьмем какую-нибудь убывающую к нулю последовательность чисел $\alpha_n>0$ и рассмотрим ре-

* Применяемый здесь метод доказательства является развитием идеи, которая была уже мною использована для суммирования везде расходящегося ряда, связанного с решением уравнения $x^2\frac{dy}{dx}+y=x$ в заметке «Sur les series normales», помещенной в книге d'Adhémar'a «Leçons sur les principes de l'analyse», t. II, 1913, p. 259—283.

шение $Y_n(x)$ уравнения (2), определяемое условиями $Y_n^{(i)}(x_0+\alpha_n)=0$ $(i=0, 1, \ldots, k-1)$. Подобно предыдущему, полагая $|\varphi_1(x)|\geqslant\lambda$ в промежутке $(x_0, x_0+\alpha)$, находим, при $\varepsilon>\alpha_n$ достаточно малом $\left(\varepsilon\leqslant 1,\ \varepsilon<\frac{\lambda}{(k-1)M},\ \varepsilon\leqslant\alpha\right)$, что наибольшее значение P, которого может достигнуть $|Y^{(k-1)}(x)|$ в промежутке $(x_0+\alpha_n, x_0+\varepsilon)$, должно удовлетворять неравенству

$$P[\lambda-(k-1)M\varepsilon]<A_0,$$

где A_0 — максимум $|A(x)|$ в промежутке $(x_0, x_0+\varepsilon)$, стремящийся к нулю вместе с ε. Следовательно, как бы мало ни было данное положительное число $\delta<\varepsilon$, в промежутке $(x_0+\delta, x_0+\varepsilon)$ может быть указана не зависящая от n верхняя граница не только для $|Y_n^{(i)}(x)|\leqslant P$ $(i=0, 1, \ldots, k-1)$; но и для $|Y_n^{(k)}(x)|$. Поэтому последовательность чисел α_n, стремящихся к нулю, возможно выбрать таким образом, что $Y_n(x)$ вместе со своими производными первых $k-1$ порядков будет равномерно стремиться к некоторой функции $Y(x)$ и ее непрерывным производным первых $k-1$ порядков в любом данном промежутке $(x_0+\delta, x_0+\alpha)$, которые при δ достаточно малом будут сколь угодно близки к нулю в точке $x_0+\delta$. Но так как при $x_0+\delta\leqslant x_1<x<x_0+\alpha$ имеет место равенство

$$Y_n^{(k-1)}(x)-Y_n^{(k-1)}(x_1)=\int_{x_1}^{x}\frac{1}{\varphi_0(x)}\left[A(x)-\sum_{1}^{k}\varphi_i(x)Y_n^{(k-i)}(x)\right]dx,$$

то справедливо также и предельное равенство

$$Y^{(k-1)}(x)-Y^{(k-1)}(x_1)=\int_{x_1}^{x}\frac{1}{\varphi_0(x)}\left[A(x)-\sum_{1}^{k}\varphi_i(x)Y^{(k-i)}(x)\right]dx;$$

откуда заключаем, что в указанном промежутке существует также $Y^{(k)}(x)$, которая равна подинтегральной функции правой части равенства, т. е. $Y(x)$ является регулярным решением уравнения (2), обращающимся в нуль в точке x_0 вместе с своими $k-1$ первыми производными.

2

ЛЕММА II. *Если $\varphi_0(x)\varphi_1(x)<0$ при $x_0<x\leqslant x_0+\alpha$, то каковы бы ни были постоянные c_i $(i=0, 1, \ldots, k-1)$, удовлетворяющие* (5^{bis}), *уравнение* (2) *имеет регулярное решение $Y(x)$ на $(x_0, x_0+\alpha)$, подчиненное условиям $Y^{(i)}(x_0)=c_i$; для того чтобы это решение было единственным, необходимо и достаточно, чтобы интеграл $\int_{x_0}^{x_0+\alpha}\frac{dx}{\varphi_0(x)}$ имел смысл.*

Пусть $Y(x)$ будет какое-нибудь решение уравнения (2), где $A(x_0)=0$, заданное произвольными значениями $Y(x_0+\varepsilon)$, $Y'(x_0+\varepsilon), \ldots$ $\ldots, Y^{(k-1)}(x_0+\varepsilon)$, где $0<\varepsilon\leqslant\alpha$. Если $|Y^{(k-1)}(x)|$, при уменьшении x от значения $x_0+\varepsilon$, впервые достигает значения $P>|Y^{(k-1)}(x_0+\varepsilon)|$, то в соответствующей точке x $(x_0<x<x_0+\varepsilon)$ $Y^{(k-1)}(x)Y^{(k)}(x)\leqslant 0$.

Поэтому, подобно предыдущему, заключаем (вследствие $\varphi_0(x)\varphi_1(x)<0$), что

$$P[\lambda-(k-1)M\varepsilon]<A_0+M\sum_{i=0}^{k-2}|Y^{(i)}(x_0+\varepsilon)|$$

(при $\varepsilon\leqslant 1$, $\varepsilon<\frac{\lambda}{(k-1)M}$). Следовательно, $Y(x)$ и ее производные первых $k-2$ порядков, имея ограниченную производную внутри всего промежутка $(x_0, x_0+\varepsilon)$, стремятся к определенным пределам при $x\to x_0$. Кроме того, если

$$\varphi_0(x)Y^{(k)}(x)=A(x)-\sum_{i=1}^{k}\varphi_i(x)Y^{(k-i)}(x)$$

сохраняет вблизи x постоянный знак, то $Y^{(k-1)}(x)$ изменяется при этом монотонно, а потому $Y^{(k-1)}(x)$ также стремится к конечному пределу (не превышающему P), т. е. также является непрерывной функцией в замкнутом промежутке $(x_0, x_0+\varepsilon)$. Если же $Y^{(k)}(x)$ имеет бесчисленное множество нулей, то значения максимумов и минимумов $Y^{(k-1)}(x)$ определяются из уравнения $A(x)=\sum_1^k\varphi_i(x)Y^{(k-i)}(x)$, а потому $Y^{(k-1)}(x)$ и в этом случае стремится к конечному пределу $Y^{(k-1)}(x_0)$, причем, принимая во внимание, что это предельное значение удовлетворяет уравнению

$$\sum_1^k\varphi_i(x_0)Y^{(k-i)}(x_0)=A(x_0)=0,$$

мы можем, кроме того, утверждать, что $Y(x)$ является **регулярным** решением уравнения (2).

Однако последнее заключение не относится к первому предположению, и хотя, согласно доказанному, *все решения уравнения* (2) *при* $\varphi_0(x)\varphi_1(x)<0$ *непрерывны вместе со своими* $k-1$ *первыми производными в замкнутом промежутке* $(x_0, x_0+\varepsilon)$, но регулярность всех их не обязательна (при первом предположении). Действительно, здесь имеются две возможности. Пусть $Z_1(x), \ldots, Z_k(x)$ представляют какие-нибудь k независимых решений однородного уравнения

$$D_k\big(Z(x)\big)=0; \tag{18}$$

на основании предыдущего, существуют

$$\lim_{x=x_0}\varphi_0(x)Z_j^{(k)}(x)=L_j \qquad (j=1, \ldots, k).$$

Если все величины $L_j=0$, т. е. *если все решения уравнения* (18) *регулярны, то все решения уравнения* (2) *также регулярны*, так как $\lim_{x\to x_0}\varphi_0(x)Y^{(k)}(x)=H$ не зависит тогда от начальных значений $Y^{(i)}(x_0+\varepsilon)$ $(i=0, 1, \ldots, k-1)$; беря эти значения равными нулю при $\varepsilon>0$ достаточно малом, выводим из предшествующего рассуждения, что H должно сколь угодно мало отличаться от $A(x_0)=0$, т. е. $H=0$.

Если же есть по крайней мере одно $L_j \gtrless 0$, то, заменяя $Y(x)$ через $Y_1(x) = -\frac{H}{L_j} Z_j(x) + Y(x)$, получаем регулярное решение уравнения (2), так как $\lim\limits_{x=x_0} \varphi_0(x) Y_1^{(k)}(x) = -H \frac{L_j}{L_j} + H = 0$. Таким образом, в этом случае регулярное решение уравнения (2) [как и однородного уравнения (18)] зависит от $k-1$ произвольных постоянных.

Поэтому в обоих случаях можем взять $k-1$ регулярных решений $Z_j(x)$ $(j = 1, 2, \ldots, k-1)$ уравнения (18), удовлетворяющих условиям $Z_j^{(i)}(x_0 + \varepsilon) = 0$ при $i \geqslant j-1$, $Z_j^{(i)}(x_0 + \varepsilon) = 1$ при $i = j-1$ $(i = 0, 1, \ldots, k-2)$; тогда $Z_j^{(i)}(x_0) = \varepsilon_{i,j}$ или $Z_j^{(i)}(x_0) = 1 + \varepsilon_{i,j}$ в зависимости от того, будет ли $i \gtrless j-1$ или $i = j-1$, где $|\varepsilon_{i,j}|$ могут быть сделаны настолько малыми, чтобы определитель $(k-1)$-го порядка, имеющий элементами $Z_j^{(i)}(x_0)$, был отличен от нуля, и следовательно при любых значениях $c_0, c_1, \ldots, c_{k-2}$ возможно будет построить регулярное решение $Y(x)$ уравнения (2), удовлетворяющее условиям $Y^{(i)}(x_0) = c_i$ $(i = 0, 1, \ldots, k-2)$.

Таким образом, первая часть леммы доказана для обоих случаев, которые отличаются лишь тем, что в первом из них регулярное решение, соответствующее постоянным c_i, определяется неоднозначно, между тем как во втором случае это решение является единственным. Следовательно, для единственности решения необходимо и достаточно, чтобы уравнение (18) имело также и иррегулярные решения. Но если $\int\limits_{x_0}^{x} \frac{dx}{\varphi_0(x)}$ имеет смысл при $x > x_0$, то полагая

$$u(x) = \frac{1}{(k-1)!} \int\limits_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{k-1}\,dt}{\varphi_0(t)},$$

мы видим, что уравнение

$$D_k(Y(x)) = D_k(u(x))$$

имеет иррегулярное решение $Y(x) = u(x)$ (так как $\lim\limits_{x=x_0} \varphi_0(x) \times u^{(k)}(x) = 1$), а потому отнимая от него какое-нибудь регулярное решение этого же уравнения, мы получим иррегулярное решение однородного уравнения (18). Наоборот, если $Z(x)$ есть иррегулярное решение (которое по доказанному должно иметь конечную непрерывную производную $Z^{(k-1)}(x)$) уравнения (18), так что можно принять, что $\varphi_0(x) Z^{(k)}(x) = L(x) \geqslant 1$ вблизи x_0, то при $x_0 < x < x_1 = x_0 + \varepsilon$ будем иметь

$$Z^{(k-1)}(x) = \int\limits_{x_1}^{x} \frac{L(x)\,dx}{\varphi_0(x)} + Z^{(k-1)}(x_1),$$

а потому $Z^{(k-1)}(x)$ стремится к определенному конечному пределу при $x = x_0$ только тогда, когда $\int\limits_{x_1}^{x_0} \frac{dx}{\varphi_0(x)}$ имеет смысл.

3

Из доказанных двух лемм непосредственно вытекает

ТЕОРЕМА I. *Если на отрезке (a, b) имеется не более одной особой точки, то оператор $D_k(Y(x))$ принадлежит к классу (S) на этом отрезке.*

Для выяснения условий принадлежности оператора к классу (S) на отрезке (a, b), содержащем более одной точки множества E, т. е. для ответа на вопрос о существовании регулярного решения уравнения (2) на таком отрезке, необходимо различать два типа изолированных (по крайней мере с одной стороны) особых точек.

Определение. Особая точка x_0, изолированная справа (слева), называется регулярной справа (слева), если все решения уравнения (18) регулярны при $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h$ $(x_0 - h \leqslant x \leqslant x_0)$ для $h > 0$ достаточно малого; точка x_0 называется иррегулярной справа (слева), если существует хотя бы одно иррегулярное решение в соответствующем промежутке. Точку, регулярную с обеих сторон, будем называть регулярной; точку, иррегулярную с обеих сторон, будем называть иррегулярной.

Из доказанных выше лемм следует, что *точка x_0 будет регулярна справа в том и только в том случае, когда $\varphi_0(x)\varphi_1(x) < 0$ и $\int\limits_{x_0}^{x} \frac{dx}{\varphi_0(x)}$ не имеет смысла при $x > x_0$.* Аналогичным образом убеждаемся, что точка x_0 регулярна слева в том и только в том случае, когда при $x < x_0$ интеграл $\int\limits_{x_0}^{x} \frac{dx}{\varphi_0(x)}$ не имеет смысла и $\varphi_0(x)\varphi_1(x) > 0$.

Эти условия можем формулировать следующим образом.

Следствие I. *Для того чтобы особая точка x_0 была регулярна справа, необходимо и достаточно, чтобы $\int\limits_{x_0+h}^{x_0} \frac{\varphi_1(x)\,dx}{\varphi_0(x)} = +\infty$ при $h > 0$ достаточно малом; для того чтобы особая точка x_0 была регулярна слева, необходимо и достаточно, чтобы $\int\limits_{x_0-h}^{x_0} \frac{\varphi_1(x)\,dx}{\varphi_0(x)} = +\infty$.*

Следует обратить внимание на то, что *условие регулярности* (и противоположное ему условие иррегулярности) *особой точки зависит только от свойств первых двух коэффициентов $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ оператора.*

Можно также отметить, что если известна какая-нибудь (фундаментальная) система независимых интегралов однородного уравнения, то благодаря тому, что соответствующий ей определитель Вронского $\Delta(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению первого порядка (с теми же старшими коэффициентами)

$$D_1(\Delta(x)) = \varphi_0(x)\frac{d\Delta(x)}{dx} + \varphi_1(x)\Delta(x) = 0,$$

регулярность особой точки x_0 данного оператора D_k имеет место одновременно с регулярностью этой точки для оператора D_1. Иными сло-

вами, *для регулярности особой точки* x_0 *справа (слева) необходимо и достаточно, чтобы определитель Вронского стремился к нулю при* $x \to x_0$ *справа (слева)*. Наоборот, если определитель Вронского не стремится к нулю, то особая точка x_0 будет иррегулярна.

Полезно запомнить, что на основании вышеизложенного регулярное продолжение через особую точку в том направлении, в каком она изолирована, всегда возможно, и при этом в том направлении, в котором она иррегулярна, — единственным образом.

4

Естественно, что поскольку оператор первого порядка не имеет иных коэффициентов кроме $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$, условия, необходимые и достаточные для принадлежности оператора $D_1(Y)$ к классу (S), зависят только от этих двух коэффициентов. Напротив, как мы увидим дальше, при $k > 1$ рассмотрение коэффициентов $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$, хотя и достаточно для характеристики каждой особой точки в интересующем нас смысле, но не всегда достаточно для разрешения вопроса о существовании одного и того же решения, регулярного вблизи всех особых точек. Итак, начнем с исследования случая $k=1$.

ТЕОРЕМА II. *Каково бы ни было множество* E *точек* x_0 *на* (a, b), *где* $\varphi_0(x_0)=0$ $(\varphi_1(x_0) \gtrless 0)$ *оператор*

$$D_1\big(Y(x)\big) = \varphi_0(x)\frac{dY}{dx} + \varphi_1(x)\,Y \tag{19}$$

тогда и только тогда будет оператором $(\overline{S})$ *на* (a, b), *когда существуют две такие соседние точки* $x_0' < x_0''$ *множества* E *(отделенные точками множества* $\overline{E}$*), что* x_0' *иррегулярна справа, а* x_0'' *иррегулярна слева, т. е. если*

$$\int_x^{x_0'} \frac{\varphi_1(x)\,dx}{\varphi_0(x)} < +\infty, \quad \int_x^{x_0''} \frac{\varphi_1(x)\,dx}{\varphi_0(x)} < +\infty \quad (x_0' < x < x_0''). \tag{20}$$

В самом деле, допустим, что условие (20) соблюдено, и рассмотрим уравнение

$$D_1\big(Y(x)\big) = A(x), \tag{21}$$

где непрерывная функция $A(x)$ определена следующим образом:

1) $A(x)=0$ при $x_0' \leqslant x \leqslant \alpha$ и при $\beta \leqslant x \leqslant x_0''$, где $\alpha < \beta$ какие-нибудь две точки внутри отрезка (x_0', x_0''),

2) $A(x) = D_1\big(u(x)\big)$ при $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$, где функция $u(x)$, имеющая непрерывную производную, подчинена лишь условиям

$$\varphi_0(\alpha)\,u'(\alpha) + \varphi_1(\alpha)\,u(\alpha) = \varphi_0(\beta)\,u'(\beta) + \varphi_1(\beta)\,u(\beta) = 0, \tag{22}$$

необходимым для того, чтобы $A(x)$ была непрерывна на всем отрезке (x_0', x_0''); следует заметить, что равенства (22) могут быть осуществлены при любых заданных наперед значениях $u(\alpha)$ и $u(\beta)$.

Но принимая во внимание, что благодаря условиям (20) единственным регулярным решением уравнения

$$D_1\big(z(x)\big) = 0, \tag{18bis}$$

в которое уравнение (21) обращается в промежутках (x_0', α) и (β, x_0'') является нуль, в этих промежутках имеем $Y(\alpha) = Y(\beta) = 0$, между тем как в промежутке (α, β)

$$Y(x) = u(x) + Cz(x),$$

где $Cz(x)$ — общий интеграл однородного уравнения (18^{bis}).

Поэтому произвольная постоянная C должна удовлетворить двум уравнениям:

$$u(\alpha) + Cz(\alpha) = 0, \quad u(\beta) + Cz(\beta) = 0,$$

которые при соответствующем выборе $u(\alpha)$ и $u(\beta)$ несовместимы. Следовательно, уравнение (21) при таком выборе $A(x)$ не имеет регулярного решения на отрезке (x_0', x_0''), т. е. условия (20) являются достаточными для того, чтобы оператор (19) был $(\overline{S})$ на (a, b).

Предположим теперь, напротив, что все промежутки (x_0', x_0''), принадлежащие множеству $\overline{E}$ и имеющие концами точки x_0', x_0'' множества E, таковы, что по крайней мере одна их них регулярна во внутреннем направлении промежутка. В таком случае уравнение (21) будет иметь по крайней мере одно регулярное решение $Y(x)$ на каждом из этих отрезков, значение которого, согласно определению регулярности, в концах $x_0^{(k)}$ этих отрезков определяется из равенства

$$\varphi_1(x_0^{(k)})\, Y(x_0^{(k)}) = A(x_0^{(k)}).$$

Если множество E конечно, то необходимость существования хоть одной пары точек (x_0', x_0''), удовлетворяющих (20) для того, чтобы оператор был $(\overline{S})$, таким образом доказана. Но если множество E бесконечно, то для аналогичного определения регулярного решения $Y(x)$ достаточно применить вышеуказанное построение ко всему (исчислимому) множеству промежутков, составляющему $\overline{E}$, и положить

$$\varphi_1(x_0)\, Y(x_0) = A(x_0)$$

во всех точках x_0 множества E. Следовательно, теорема справедлива, каково бы ни было множество E.

Этот прием был, в частности, применен нами в начале первой главы для построения регулярного решения уравнения

$$D_1\big(Y(x)\big) = x^2 \sin\frac{1}{x}\,\frac{dY}{dx} + Y = x,$$

левая часть которого представляет, таким образом, оператор (S), так как особые точки $\frac{1}{2k\pi}$ регулярны; поэтому, хотя точки $\frac{1}{(2k+1)\pi}$ иррегулярны, ни один из промежутков $\left(\frac{1}{(m+1)\pi}, \frac{1}{m\pi}\right)$ не удовлетворяет условиям (20).

5

Из теоремы II вытекает, в частности, следующее общее выражение для всех операторов $(\overline{S})$ первого порядка, имеющих лишь две особые точки a, b ($\varphi_0(a) = \varphi_0(b) = 0$, $\varphi_0(x) \gtrless 0$ при $a < x < b$):

$$D_1\big(Y(x)\big) = \frac{\varphi_0(x)}{\lambda(x)}\,\frac{d}{dx}\big(\lambda(x)\, Y(x)\big). \qquad (19^{\text{bis}})$$

Всякий такой оператор $(\overline{S})$ может быть представлен в виде (19^{bis}), где $\lambda(x)$ непрерывна на (a, b), отлична от нуля внутри (a, b), имеет непрерывную производную $\lambda'(x)$ внутри (a, b) и, кроме того, $\varphi_0(x)\frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} = \varphi_1(x)$ непрерывна на (a, b) (причем $\varphi_1(a)\varphi_1(b) \gtrless 0$). Действительно, интегралы

$$\int\limits_x^a \frac{\varphi_1(x)\,dx}{\varphi_0(x)} = \log\frac{\lambda(a)}{\lambda(x)}, \quad \int\limits_x^b \frac{\varphi_1(x)\,dx}{\varphi_0(x)} = \log\frac{\lambda(b)}{\lambda(x)}$$

будут ограничены сверху только тогда, когда $\lambda(x)$ удовлетворяет вышеуказанным условиям на (a, b). Кроме того, если оператор $D_1(Y(x))$ представлен в виде (19^{bis}), то, интегрируя от a до b, мы видим непосредственно, что уравнение

$$\frac{\varphi_0(x)}{\lambda(x)}\frac{d}{dx}\big(\lambda(x)\,Y(x)\big) = A(x) \qquad (21^{bis})$$

не может иметь регулярного на (a, b) решения, если

$$\lambda(b)\,Y(b) - \lambda(a)\,Y(a) = \frac{\lambda(b)}{\varphi_1(b)}A(b) - \frac{\lambda(a)}{\varphi_1(a)}A(a) \gtrless \int\limits_a^b \frac{\lambda(x)}{\varphi_0(x)}A(x)\,dx. \qquad (22^{bis})$$

Таким образом, получаем, в частности,

Следствие II. *Если оператор* $D_1(Y(x))$ *принадлежит к классу* $(\overline{S})$ *на отрезке* (a, b), *где* $\varphi_0(a) = \varphi_0(b) = 0$ *и* $\varphi_0(x) \gtrless 0$ *при* $a < x < b$, *то уравнение* (21) *не имеет регулярного на* (a, b) *решения, когда* $A(x)$ *сохраняет постоянный знак на* (a, b) *и* $A(a) = A(b) = 0$.

Рассмотрим два уравнения

$$D_1\big(Y_1(x)\big) = A_1(x), \quad D_1\big(Y_2(x)\big) = A_2(x), \qquad (23)$$

из которых по крайней мере первое не допускает регулярного на (a, b) решения. Пусть $z(x)$ будет отличное от нуля решение однородного уравнения (18^{bis}). Так как каждое из уравнений (23) имеет по решению $u_1(x)$ и $u_2(x)$, регулярному вблизи a, то общее решение каждого из этих уравнений представится, соответственно, в виде

$$Y_1(x) = u_1(x) + C_1 z(x), \quad Y_2(x) = u_2(x) + C_2 z(x);$$

при этом постоянные C_1 и C_2 можем подобрать так, чтобы $Y_1(x)$ и $Y_2(x)$ были регулярны в точке b. Следовательно,

$$C_2 Y_1(x) - C_1 Y_2(x) = C_2 u_1(x) - C_1 u_2(x)$$

будет регулярна в обеих точках a и b, а потому, принимая во внимание, что $C_1 \gtrless 0$, заключаем, что, какова бы ни была функция $A_2(x)$, уравнение

$$D_1\big(Y(x)\big) = A_2(x) - \frac{C_2}{C_1}A_1(x)$$

при соответствующем подборе постоянной $H = \frac{C_2}{C_1}$ всегда имеет регулярное на (a, b) решение.

Отсюда, благодаря следствию II, вытекает

Следствие III. *Если $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ любые непрерывные на (a, b) функции, где $\varphi_0(a) = \varphi_0(b) = 0$, $\varphi_1(a)\varphi_1(b) \geqslant 0$, $\varphi_0(x) \geqslant 0$ при $a < x < b$, то система функций*

$$f_n(x) = D_1(x^n) = nx^{n-1}\varphi_0(x) + x^n\varphi_1(x) \quad (n = 0, 1, \ldots) \tag{4^{bis}}$$

становится полной на отрезке (a, b), если добавить к ней одну произвольную функцию $A(x)$, обладающую свойством, что $A(a) = A(b) = 0$ и $A(x) > 0$ при $a < x < b$.

Рассмотрим, например, оператор

$$D_1(Y) = \sqrt{1 - x^2}\, Y' + Y,$$

который, согласно теореме II, принадлежит классу $(\bar{S})$ на $(-1, +1)$; система функций $nx^{n-1}\sqrt{1-x^2} + x^n$ $(n = 0, 1, \ldots)$ является неполной, но достаточно добавить функцию $A_1(x) = 1 - x^2$, чтобы сделать ее полной на этом отрезке.

6

Полученный результат может быть обобщен следующим образом.

ТЕОРЕМА III. *Если на отрезке (a, b) имеется всего n пар смежных корней (a_i, b_i), где $b_i \leqslant a_{i+1}$, уравнения $\varphi_0(x) = 0$, удовлетворяющих условиям*

$$\left.\begin{array}{c} \displaystyle\int_x^{a_i} \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_0(x)}\,dx < +\infty, \quad \int_x^{b_i} \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_0(x)}\,dx < +\infty, \\ (a_i < x < b_i) \quad (i = 1, \ldots, n) \end{array}\right\} \tag{20^{bis}}$$

то для того, чтобы сделать систему функций (4^{bis}) полной на (a, b), необходимо добавить n функций $A_1(x), \ldots, A_n(x)$; при этом достаточно положить $A_i(x) = x^{i-1}q(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$, где $q(x)$ — любая данная непрерывная функция, отличная от нуля внутри промежутков (a, b) и равная нулю при $x = a_i$, $x = b_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

В самом деле, обозначим через $p_i(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$ какие-нибудь непрерывные функции, равные нулю вне промежутка (a_i, b_i) и удовлетворяющие равенствам

$$\int_{a_i}^{b_i} \frac{\lambda(x)}{\varphi_0(x)}\, p_i(x)\,dx = 1. \tag{24}$$

Положим $A(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i p_i(x)$, где C_i — произвольные постоянные; но если бы число n_1 дополнительных функций $A_i(x)$ было менее n, то их было бы недостаточно для того, чтобы уравнение (каковы бы ни были C_i)

$$D_1(Y(x)) = A(x) + \sum_{j=1}^{n_1} H_j A_j(x)$$

при соответствующем выборе $n_1 < n$ постоянных H_j имело решение, регулярное на всем отрезке (a, b), так как, вследствие (22^{bis}) и (24), необходимо удовлетворить n уравнениям

$$C_i = \sum_1^n H_j \delta_{ji} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где

$$\delta_{ji} = \frac{\lambda(b_i)}{\varphi_1(b_i)} A_j(b_i) - \frac{\lambda(a_i)}{\varphi_1(a_i)} A_j(a_i) - \int_{a_i}^{b_i} \frac{\lambda(x)}{\varphi_0(x)} A_j(x)\, dx.$$

Таким образом число функций $A_i(x)$ должно быть не менее n. Но, как мы видели, для $n=1$ достаточно добавить какую-нибудь одну функцию $A_1(x) = q(x)$, удовлетворяющую условию теоремы. Поэтому, считая наше утверждение справедливым для некоторого n, докажем его правильность для $n+1$. Таким образом, по предположению, для любой непрерывной функции $A(x)$ можем построить такой многочлен $P_{n-1}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} H_i x^i$, что уравнение

$$D_1(Y(x)) = A(x) + P_{n-1}(x)\, q(x) \tag{25}$$

имеет регулярное решение на всяком отрезке, содержащем n промежутков (a_i, b_i). В частности, можем построить такой многочлен $Q_{n-1}(x)$ степени $n-1$, что уравнение

$$D_1(u(x)) = x^n q(x) + Q_{n-1}(x)\, q(x) = (x^n + Q_{n-1}(x))\, q(x) \tag{26}$$

будет иметь регулярное решение $u(x)$ на этом отрезке; при этом, как мы видели, необходимо, чтобы многочлен $x^n + Q_{n-1}(x)$ имел по одному корню в каждом из n промежутков (a_i, b_i); следовательно, если, расширяя направо данный отрезок, мы включим в него еще один промежуток (a_{n+1}, b_{n+1}), то $u(x)$ не может быть регулярным в последнем промежутке, где правая часть уравнения (26) не меняет знака. Поэтому, применяя к уравнениям (25) и (26) вышеуказанное рассуждение, заключаем, что существует такая постоянная H_n, что $Y(x) - H_n u(x)$ регулярна также и в промежутке (a_{n+1}, b_{n+1}), так что уравнение

$$D_1(Y(x)) = A(x) + P_n(x)\, q(x),$$

где $P_n(x) = P_{n-1}(x) - H_n(x^n + Q_{n-1}(x))$, будет иметь регулярное решение на расширенном отрезке, содержащем $n+1$ промежутков (a_i, b_i).

Так, например, система функций (4^{bis}), соответствующая оператору $D_1(Y) = x^2 \sin\frac{\pi}{x}\, Y' + (\alpha_1 x - 1)(\alpha_2 x - 1)\, Y$, где $1 < \alpha_1 < 2 < \alpha_2 < 3$, является неполной на отрезке $(-1, +1)$, так как промежутки $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ и $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ удовлетворяют (20^{bis}); чтобы дополнить ее, необходимо добавить две функции $A_1(x)$, $A_2(x)$, которые достаточно положить равными

$$A_1(x) = (x-1)(2x-1)(3x-1), \quad A_2(x) = xA_1(x).$$

Система (4^{bis}) была бы полной, если бы знак плюс перед вторым членом оператора заменить знаком минус.

7

Перейдем теперь к исследованию критериев принадлежности оператора $D_k(Y)$ порядка $k>1$ к классу (S) или $(\overline{S})$, основанных на рас-

смотрении тех же двух первых коэффициентов $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ или, что то же самое, на рассмотрении индивидуальных свойств каждой из особых точек оператора $D_k(Y(x))$. Прежде всего можем убедиться на примерах, что условие (20) теоремы II при $k>1$ не является ни необходимым, ни достаточным для того, чтобы оператор $D_k(Y)$ был $(\overline{S})$. Действительно, оператор

$$D_2(Y)=x(x^2-1)Y''+Y'-2xY=\sqrt{1-x^2}\,\frac{d}{dx}\left[\sqrt{1-x^2}\,(2Y-xY')\right] \qquad (27)$$

не удовлетворяет условию (20), так как особая точка $x=0$ регулярна. Тем не менее уравнение

$$D_2(Y)=A(x)$$

не может иметь регулярного на $(-1, +1)$ решения, если $A(x)>0$, так как мы имели бы

$$\sqrt{1-x^2}\,(2Y-xY')\Big|_{-1}^{+1}=\int\limits_{-1}^{+1}\frac{A(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}>0,$$

что несовместимо с конечностью Y и Y' при $x=\pm 1$. Следовательно, оператор (27) класса $(\overline{S})$.

С другой стороны, хотя оператор

$$D_2(Y)=4(1-x^2)Y''-4xY'+\lambda Y \qquad (28)$$

удовлетворяет условию (20) на $(-1, +1)$, тем не менее при λ, не равном квадрату четного числа или нулю, он принадлежит классу (S), так как функции $f_0(x)=\lambda$, $f_1(x)=\lambda-4x, \ldots, f_n(x)=4n(n-1)x^{n-2}+$ $+(\lambda-4n^2)x^n, \ldots$ эквивалентны всем целым неотрицательным степеням x, т. е. являются полной системой функций.

Таким образом, при $k>1$, нельзя дать альтернативного признака принадлежности оператора $D_k(Y)$ к классу (S) или $(\overline{S})$, зависящего только от $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$. В этом случае $(k>1)$ можно лишь указать такие достаточные условия, что при соблюдении каждого из них все операторы принадлежат соответственно одному или другому классу, между тем как, если ни одно из этих условий не соблюдено, то для определения класса оператора $D_k(Y)$ необходимо, вообще, рассмотрение его прочих коэффициентов.

ТЕОРЕМА IV. 1) *Для того чтобы оператор $D_k(Y)$ был (S) на (a, b), достаточно, чтобы существовала такая точка c $(a\leqslant c\leqslant b)$, что налево от нее нет особых точек, иррегулярных направо, а направо от c нет точек, иррегулярных налево*; 2) *для того чтобы оператор $D_k(Y)$ порядка k был $(\overline{S})$ на (a, b), достаточно, чтобы на (a, b) находились $k+1$ соседних особых точки $x_0<x_1<\ldots<x_k$, из которых все $k-1$ внутренние — иррегулярны (с обеих сторон), а крайние точки x_0 и x_k соответственно иррегулярны направо и налево.*

Для доказательства первого утверждения рассматриваем какое-нибудь решение Y уравнения

$$D_k(Y)=A(x), \qquad (2)$$

регулярное в точке c. Согласно условию регулярное продолжение Y в обе стороны будет происходить беспрепятственно, если множество E, где $\varphi_0(x)=0$, состоит из конечного числа точек и конечного числа отрезков, так как Y достигает регулярно каждой особой точки $\alpha_{n+1}>c$, каковы бы ни были значения $Y, Y^1, \ldots, Y^{(k-1)}$ при $c<x<\alpha_{n+1}$; аналогичное утверждение справедливо для $\alpha_{n+1}<x<c$, регулярной справа.

К этому случаю может быть сведен и случай любого множества E. В самом деле, пусть $\delta_1>\delta_2>\ldots>\delta_n>\ldots$ будет какая-нибудь последовательность стремящихся к нулю чисел; заменим множество E расширенным множеством E_{δ_n}, состоящим из конечного числа отрезков и точек, расстояния между которыми более δ_n (такое множество можно, например, получить, исходя из крайней левой точки E, к которой присоединим все точки (a, b) до ближайшего промежутка $\overline{E}$ длины больше δ_n; исключив этот промежуток $\overline{E}$, поступим аналогично с правым его концом, принадлежащим E; продолжая эту операцию, пока не дойдем до правой крайней точки E, мы построим расширенное множество E_{δ_n}, состоящее из отрезков и точек, общее число которых не более $\left[\frac{b-a}{\delta_n}\right]+1$). В таком случае к оператору $D_{k,\delta_n}(Y)$, в котором $\varphi_0'(x)$ заменена непрерывной функцией $\varphi_0(x, \delta_n)$, где $\varphi_0(x, \delta_n)=0$ в точках E_{δ_n} и $\lim\limits_{\delta_n=0}\varphi_0(x, \delta_n)=$ $=\varphi_0(x)$ в точках $\overline{E}_{\delta_n}$, применимо сделанное выше рассуждение.

Кроме того, если $Y_n(x)$ есть регулярное решение, определяемое уравнением

$$D_{k,\delta_n}(Y_n(x))=A(x)$$

и начальными значениями $Y_n^{(i)}(x)=Y^{(i)}(x)$ $(i=0, 1, \ldots, k-1)$ в точке c, то для $|Y_n^{(i)}(x)|$ $(i=0, 1, \ldots, k-1)$ может быть дана верхняя граница на (a, b), не зависящая от n (см. доказательство лемм I и II). Поэтому можно утверждать, что при соответствующем подборе $\delta_n \to 0$ функции $Y_n(x)$ вместе с их производными первых $k-2$ порядков будут равномерно стремиться на (a, b) к некоторой функции $Y(x)$ и ее соответственным непрерывным производным, причем во всех промежутках множества $\overline{E}$ $Y(x)$ удовлетворяет уравнению (2), а во всех граничных точках E существуют $\lim Y^{(k-1)}(x)=\lim Y_n^{(k-1)}(x)$, определяемые предельным равенством

$$\sum_1^k \varphi_i(x)\, Y^{(k-i)}(x)=A(x), \tag{5}$$

которому $Y(x)$ удовлетворяет, следовательно, во всех точках E и является поэтому регулярным решением уравнения (2).

Для доказательства второй части теоремы применяем тот же прием, которым мы пользовались в случае $k=1$. А именно, рассматриваем уравнение (2), в котором $A(x)=0$ при $|x-x_i|\leqslant\alpha$, где $\alpha>0$ некоторое определенное число, удовлетворяющее условию $\alpha<\frac{x_{i+1}-x_i}{2}$ $(i=0, 1, \ldots, k)$,

и $A(x) = D_k(u(x))$ на остальной части отрезка (a, b) (достаточно рассмотреть лишь случай, когда $a = x_0$, $b = x_k$, так как, если оператор $(\bar{S})$ на (x_0, x_k), то он тем более будет $(\bar{S})$ на отрезке, содержащем (x_0, x_k)), где функция $u(x)$ подчинена, кроме условия непрерывности ее производных первых k порядков, еще требованию, чтобы $D_k(u(x)) = 0$ в $2k$ точках $x_0 + \alpha$, $x_1 \mp \alpha$, ..., $x_{k-1} \mp \alpha$, $x_k - \alpha$; этому дополнительному требованию можно, очевидно, удовлетворить, задавая совершенно произвольно значения $u(x)$, ..., $u^{(k-1)}(x)$ в этих точках.

Покажем, что возможен такой подбор упомянутых значений, при котором соответствующее им уравнение (2) не может иметь регулярного решения на (x_0, x_k). В самом деле, пусть $z_1(x)$, ..., $z_k(x)$ представляют какую-нибудь систему независимых решений однородного уравнения

$$D_k(Z(x)) = 0. \tag{18}$$

Как мы знаем, в каждой из иррегулярных точек x_i $(i = 0, \ldots, k)$ существует лишь $k - 1$ независимых регулярных решений $z_{i,h}(x)$ $(h = 1, \ldots, k-1)$ уравнения (18) (являющихся какими-то линейными комбинациями из $z_1(x)$, ..., $z_k(x)$). Поэтому, поскольку уравнение (2) вблизи x_i совпадает с (18), мы должны иметь вблизи x_i

$$Y(x) = \sum_{h=1}^{k-1} a_{i,h} z_{i,h}(x), \tag{29}$$

в промежутках же $(x_{i-1} + \alpha, x_i - \alpha)$, где $A(x) = D_k(u(x))$, имеем

$$Y(x) = u(x) + \sum_{h=1}^{k} b_{i,h} z_h(x), \tag{30}$$

где число произвольных постоянных $a_{i,h}$ равно $(k-1)(k+1) = k^2 - 1$, а число произвольных постоянных $b_{i,h}$ равно $k \cdot k = k^2$. При этом требование непрерывности $Y(x)$ и ее производных первых $k - 1$ порядков в $2k$ точках, где происходит замена формул (29) и (30), приводит к $2kk = 2k^2$ линейным уравнениям относительно $k^2 + (k^2 - 1) = 2k^2 - 1$ неизвестных, правые части которых должны быть равны соответственно значениям $u(x)$ и ее первых $k - 1$ производных в этих точках; но, как было замечено выше, эти значения могут быть взяты совершенно произвольно; следовательно, их можно выбрать так, чтобы рассматриваемые $2k^2$ уравнений с $2k^2 - 1$ неизвестными были несовместимы, а потому уравнение (2) не будет в таком случае иметь регулярного на (x_0, x_k) решения.

Например, если возьмем любой оператор порядка k, где $\varphi_0(x) = x^2 \left| \sin \frac{1}{x} \right|^m$, $\varphi_1(x) = 1$, то при $m \geqslant 1$ он будет класса (S), а при $0 < m < 1$ класса $(\bar{S})$ на любом отрезке, содержащем точку $x = 0$; в самом деле, в первом случае все изолированные особые точки регулярны налево, а во втором случае все особые точки иррегулярны.

8

Перейдем теперь к рассмотрению случаев, когда критерии, основанные на свойствах $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, недостаточны для установления принадлежности оператора к классу (S) или $(\bar{S})$. Эти новые критерии требуют уже знания соответствующих свойств общего интеграла уравнения (18), а потому они пригодны не столько для выяснения того, к какому классу принадлежит некоторый конкретно данный оператор $D_k(Y)$, сколько для построения операторов того или иного класса. Для сокращения формулировок и техники рассуждений мы ограничимся в дальнейшем предположением, что множество точек E, где $\varphi_0(x)=0$, конечно (переход к общему случаю не представляет особых принципиальных трудностей). Из предыдущего следует в таком случае, что если оператор $D_k(Y)$ не принадлежит к классу (S) на произвольно большом отрезке, то промежуток (a', b'), где он класса (S), не замкнут, и границами максимальных промежутков, внутри которых оператор остается (S), должны быть особые точки $a<b$, из которых первая иррегулярна справа, а вторая иррегулярна слева. Для определения этих границ, т. е. максимальных отрезков, внутри которых уравнение (2) при всяком $A(x)$ имеет регулярные решения, служит

ТЕОРЕМА V. *Если оператор $D_k(Y)$ принадлежит к классу (S) на (a, b'), где b' — обыкновенная точка и $b>b'$ есть соседняя особая точка, то оператор $D_k(Y)$ будет $(\bar{S})$ на (a, b) тогда и только тогда, когда b иррегулярна слева, и все решения однородного уравнения*

$$D_k(Z(x))=0, \tag{18}$$

регулярные на (a, b'), являются регулярными также и на (b', b).

Точку b будем называть правой характеристической точкой точки a.

В самом деле, согласно только что сказанному, если b регулярна слева, то регулярное продолжение $Y(x)$ до b (и через b) произойдет беспрепятственно; поэтому иррегулярность точки b слева во всяком случае необходима, чтобы оператор $D_k(Y)$ мог стать $(\bar{S})$. Пусть $z_1(x), \ldots$ $\ldots, z_k(x)$ будет какая-нибудь система независимых решений уравнения (18); если b иррегулярна слева, то уравнение (18) будет иметь одно иррегулярное в точке b решение, которым будем считать $z_k(x)$, между тем как $z_1(x), \ldots, z_{k-1}(x)$ регулярны в точке b. Пусть, далее, $u(x)$ будет некоторая k раз непрерывно дифференцируемая функция на (a, b'). Полагаем $A(x)=D_k u(x)$ на (a, b') и $A(x)=0$ на (b', b); как было замечено при доказательстве теоремы IV, непрерывность $A(x)$ может быть при этом обеспечена, каковы бы ни были значения $u(b')$, $u'(b'), \ldots, u^{(k-1)}(b')$.

В таком случае регулярное решение уравнения (2) представится на (a, b') в виде

$$Y(x)=u(x)+\sum_1^k b_i z_i(x),$$

где отличными от нуля могут быть только коэффициенты b_i при $z_i(x)$, регулярных на (a, b'), а на (b', b) будем иметь

$$Y(x) = \sum_{1}^{k-1} a_i z_i(x).$$

Если все $z_i(x)$, регулярные на (a, b'), регулярны на (b', b), то среди них нет $z_k(x)$, так что $b_k = 0$; поэтому в этом случае в точке b' имеем

$$\sum_{1}^{k-1} (a_i - b_i)\, z_i^{(h)}(b') = u^{(h)}(b') \qquad (h = 0, 1, \ldots, k-1),$$

и так как число $k-1$ неизвестных $a_i - b_i$ меньше числа k уравнений, то при соответствующем выборе $u^{(h)}(b')$ можем сделать их несовместимыми; следовательно, в данном случае уравнение (2) не имеет регулярного на (a, b) решения.

Если бы $z_k(x)$ было регулярно на (a, b'), то число неизвестных было бы равно числу уравнений, и регулярное на (a, b) решение $Y(x)$ было бы построено. Однако для доказательства, что регулярное решение уравнения (2) существует тогда при всяком $A(x)$, нужно еще добавить следующее.

Очевидно можно, не нарушая общности, предположить $A(b) = 0$; пусть $b' < \beta < b$ и $b - \beta$ настолько мало, что $|A(x)| < \varepsilon$ при $\beta \leqslant x < b$, где $\varepsilon > 0$ — данное произвольно малое число. Введем непрерывную на (a, b) функцию $A_1(x)$, которая равна $A_1(x) = A(x) - A(\beta)$ при $a \leqslant x \leqslant \beta$ и $A_1(x) = 0$ при $\beta \leqslant x \leqslant b$. В таком случае, согласно вышесказанному, уравнение

$$D_k(Y_\varepsilon) = A_1(x) \tag{31}$$

имеет регулярное на (a, b) решение Y_ε, при условии, что $z_k(x)$ регулярна на (a, b'), т. е. на (a, β). Но принимая во внимание, что $|A_1(x) - A(x)| < \varepsilon$ на (a, b), и что, согласно первой части доказательства основной теоремы (первой главы), из (31) следует существование многочленов $P_\varepsilon(x)$, для которых на (a, b)

$$|D_k(P_\varepsilon(x)) - A_1(x)| < \varepsilon,$$

будем иметь также и для данного $A(x)$ неравенства

$$|D_k(P_\varepsilon(x)) - A(x)| < 2\varepsilon,$$

свидетельствующие, что оператор $D_k(Y)$ есть (S) на (a, b).

9

При применении теоремы V мы будем говорить о числе $\overrightarrow{(\alpha, \beta)}$ регулярных решений уравнения (18) на отрезке (α, β), понимая под этим максимальное число независимых в точке β решений этого уравнения, которые могут быть регулярно продолжены от α до β (и обратно); таким образом, равенство $\overrightarrow{(\alpha, \beta)} = \overrightarrow{(\beta, \alpha)}$ отнюдь не обязательно и является скорее исключением, чем правилом, если между α и β есть особые точки [например в случае уравнения $x^2y' + y = 0$ имеем

$\overrightarrow{(+1, -1)} = 1$ и $\overrightarrow{(-1, +1)} = 0$]. Посмотрим, как изменяется число $\overrightarrow{(a, x)}$, когда $x > a$ возрастает.

Полагая, например, точку a иррегулярной справа, будем иметь сначала $\overrightarrow{(a, x)} = k - 1$; это число может измениться лишь при прохождении x через особую точку β. Если β регулярна, то возможны два случая: $\overrightarrow{(a, \beta + 0)} = \overrightarrow{(a, \beta - 0)}$ или $(a, \beta + 0) = (a, \beta - 0) + 1$; если β регулярна слева и иррегулярна справа, то $\overrightarrow{(a, \beta + 0)} = \overrightarrow{(a, \beta - 0)}$ [за исключением случая, когда $\overrightarrow{(a, \beta - 0)} = k$, тогда $\overrightarrow{(a, \beta + 0)} = k - 1$]. В этих двух случаях регулярное продолжение через β всегда происходит беспрепятственно и значение $\overrightarrow{(a, \beta)}$ в особой точке β [которое не может достигнуть k и равно $\overrightarrow{(a, \beta - 0)}$, за исключением случая, когда $\overrightarrow{(a, \beta - 0)} = k$] не представляет интереса. Напротив, если β иррегулярна слева, то, согласно теореме V, значение $\overrightarrow{(a, \beta)}$ имеет решающее значение: если $\overrightarrow{(a, \beta)} = \overrightarrow{(a, \beta - 0)}$, то $\beta = b$ является правой характеристической точкой для точки a, и только если $\overrightarrow{(a, \beta)} = \overrightarrow{(a, \beta - 0)} - 1$ (других значений $\overrightarrow{(a, \beta)}$ принимать не может), существует регулярное продолжение через β, причем для β, регулярного справа, $\overrightarrow{(a, \beta + 0)} = \overrightarrow{(a, \beta - 0)}$ или $\overrightarrow{(a, \beta - 0)} - 1$, и для β, иррегулярного справа, $\overrightarrow{(a, \beta + 0)} = \overrightarrow{(a, \beta - 0)} - 1$.

Из этого перечня различных возможностей изменения $\overrightarrow{(a, x)}$ легко вывести следующее обобщение второй части теоремы IV.

Если точка a иррегулярна справа, а точка $b > a$ иррегулярна слева, если между a и b имеется I иррегулярных и R регулярных точек, то каково бы ни было между a и b число особых точек, иррегулярных лишь с одной стороны, для того чтобы оператор $D_k(Y)$ порядка k был $(\bar{S})$ на (a, b), достаточно, чтобы

$$I \geqslant R + k - 1. \tag{32}$$

В самом деле, вследствие теоремы V, если ближайшая справа от x, где $\overrightarrow{(a, x)} = 0$, особая точка β иррегулярна слева, то оператор $D_k(Y)$ будет $(\bar{S})$ на (a, β). Но первоначально $\overrightarrow{(a, x)} = k - 1$, и общая сумма прироста его не может превысить R; поэтому, если характеристическая точка не будет достигнута раньше, то во всяком случае после прохождения через последнюю особую точку перед b будем иметь $\overrightarrow{(a, x)} = 0$, так как регулярное прохождение через иррегулярную точку уменьшает (a, x) на единицу.

Отметим еще вытекающее из предыдущего

Следствие IV. *Если точка $a < b$ иррегулярна справа, b — обыкновенная точка и все особые точки внутри (a, b) иррегулярны справа, причем из них $I < k - 1$ иррегулярны с обеих сторон, то для принад-*

лежности $D_k(Y)$ *к классу* (S) *необходимо и достаточно, чтобы число* $\overrightarrow{(a, b)}$ *независимых регулярных на* (a, b) *решений уравнения* (18) *было равно* $k-I-1$.

Действительно, благодаря сделанным предположениям, число $\overrightarrow{(a, x)}$, при возрастании $x \leqslant b$, может менять свое значение только при прохождении через особую точку, иррегулярную с обеих сторон, и для того чтобы оператор продолжал оставаться (S) и в этой точке, необходимо и достаточно, чтобы $\overrightarrow{(a, x)}$ уменьшалось в ней на единицу.

10

Предположим, например, что внутри (a, b) вовсе нет особых точек. В таком случае, если $\varphi_0(a)=\varphi_0(b)=0$, $\varphi_1(a)\varphi_1(b)\gtrless 0$ и $\varphi_0(x)\gtrless 0$ при $a<x<b$, то из теоремы V следует, что *условием, необходимым и достаточным для того, чтобы оператор* $D_k(Y)$ *был* $(\bar{S})$ *на* (a, b), *является требование, чтобы уравнение* (18) *имело* $k-1$ *регулярных независимых решений на* (a, b) *и чтобы*

$$\int\limits_x^a \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_0(x)}\,dx<+\infty, \quad \int\limits_x^b \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_0(x)}\,dx<+\infty \quad (a<x<b). \tag{20}$$

Нетрудно убедиться, что это требование эквивалентно условию, что $D_k(Y)$ может быть представлено в виде

$$D_k(Y)=\frac{\varphi_0(x)}{\lambda(x)}\,\frac{d}{dx}(\lambda(x)\,D_{k-1}(Y)), \tag{33}$$

где оператор $D_{k-1}(Y)=Y^{(k-1)}+a_1(x)\,Y^{(k-2)}+\ldots+a_{k-1}(x)\,Y$ порядка k имеет коэффициенты $a_i(x)$, непрерывные на (a, b), так же, как и $\lambda(x)$, обладающие, как и $\lambda(x)$, непрерывными производными при $a<x<b$, причем

$$\lim_{\substack{x=a\\x=b}}\varphi_0(x)\,a_i'(x)=0, \qquad \lim_{x=a}\varphi_0(x)\frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)}=C_1\gtrless 0,$$

$$\lim_{x=b}\varphi_0(x)\frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)}=C_2\gtrless 0 \quad (|C_1|<+\infty,\ |C_2|<+\infty)$$

и $\lambda(x)\gtrless 0$ при $a<x<b$.

В самом деле, пусть $z_1(x), \ldots, z_{k-1}(x)$ будут $k-1$ независимых регулярных решений уравнения (18) и $z_0(x)$ его решение, иррегулярное в точках a, b. Тогда, обозначая, вообще, через $\Delta(f_1, f_2, \ldots, f_i)$ вронскиан функций $f_1, f_2, \ldots, f_i$, полагаем

$$D_{k-1}(Y)=\frac{\Delta(Y, z_1, \ldots, z_{k-1})}{\Delta(z_1, z_2, \ldots, z_{k-1})}=Y^{(k-1)}+a_1(x)\,Y^{(k-2)}+\ldots+a_{k-1}(x)\,Y.$$

Очевидно, $a_1(x), \ldots, a_{k-1}(x)$ непрерывны на (a, b) и, кроме того, имеют непрерывные производные при $a<x<b$. С другой стороны, уравнение (18) эквивалентно уравнению

$$\lambda(x)\,D_{k-1}(z)=C_0,$$

где C_0 — произвольная постоянная, если положить $\lambda(x)=\dfrac{1}{D_{k-1}(z_0(x))}$, так как его общий интеграл $C_0z_0(x)+C_1z_1(x)+\ldots+C_{k-1}z_{k-1}(x)$ совпа-

дает с общим интегралом (18); кроме того, при $a < x < b$ $\lambda(x)$ и $\lambda'(x)$ непрерывны и $\lambda(x) \geqq 0$. Таким образом, мы должны иметь тождественно

$$\sum_0^k \varphi_i(x) Y^{(k-i)} = D_k(Y) = \frac{\varphi_0(x)}{\lambda(x)} \frac{d}{dx}(\lambda(x) D_{k-1}(Y)),$$

где

$$\varphi_1(x) = \varphi_0(x)\left(\frac{\lambda'}{\lambda} + a_1\right), \quad \varphi_2(x) = \varphi_0(x)\left(\frac{\lambda'}{\lambda} a_1 + a_1' + a_2\right), \ldots$$
$$\ldots, \varphi_k(x) = \varphi_0(x)\left(\frac{\lambda'}{\lambda} a_{k-1} + a_{k-1}'\right).$$

Следовательно, условия (20), равнозначные утверждению, что $\log|\lambda(x)| < +\infty$, когда x стремится к a или b, означают, что $\lambda(x)$ стремится в этих точках к конечным пределам (или к нулю), причем, в виду того что $\varphi_1(a)\varphi_1(b) \geqq 0$ и $\varphi_0(a) a_1(a) = \varphi_0(b) a_1(b) = 0$, имеем

$$\lim_{x=a} \varphi_0(x) \frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} = \varphi_1(a) \geqq 0, \qquad \lim_{x=b} \varphi_0(x) \frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} = \varphi_1(b) \geqq 0.$$

Наконец, условие регулярности $k-1$ интегралов $z_h(x)$ $(h = 1, \ldots$ $\ldots, k-1)$ уравнения (18) означает, что

$$\lim_{\substack{x=a\\x=b}} \left[\varphi_0(x) \frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} D_{k-1}(z_h(x)) + \varphi_0(x) \sum_1^{k-1} a_i z_h^{(k-i)}(x) + \right.$$
$$\left. + \varphi_0(x) \sum_1^{k-1} a_i'(x) z^{(k-i-1)}(x)\right] = \lim_{\substack{x=a\\x=b}} \varphi_0(x) \sum_1^{k-1} a_i'(x) z_h^{(k-i-1)}(x) = 0$$

и вследствие независимости интегралов $z_h(x)$ можем их выбрать так, что $z_h^{(k-i-1)}(a) = 0$ $(i \gtrless h)$ и $z_h^{(k-h-1)}(a) = 1$, а потому $\lim\limits_{x=a} \varphi_0(x) a_i'(x) = 0$ при всяком $i = 1, 2, \ldots, k-1$.

Из формулы (33) выводим таким образом (повторяя рассуждение, сделанное в случае $k = 1$), что условием, необходимым и достаточным для того, чтобы при данном $A(x)$ уравнение $D_k(Y) = A(x)$ имело регулярное на (a, b) решение, является соблюдение равенства

$$\int_a^b \frac{\lambda(x)}{\varphi_0(x)} dx = \frac{\lambda(b)}{\varphi_1(b)} A(b) - \frac{\lambda(a)}{\varphi_1(a)} A(a), \tag{22bis}$$

откуда получаем

Обобщение следствия III. *Каков бы ни был оператор $D_k(Y)$, принадлежащий к классу $(\bar{S})$ в промежутке (a, b), внутри которого $\varphi_0(x) \geqq 0$, для того чтобы сделать полной систему функций $D_k(x^n)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ на (a, b), необходимо и достаточно прибавить к ней одну функцию $q(x)$, которую достаточно подчинить единственному условию $q(x) > 0$ при $a < x < b$ и $q(a) = q(b) = 0$.*

11

Аналогичным образом можем (с некоторыми ограничениями) распространить теорему III на случай $k > 1$:

Если число отрезков $(a_1, b_1), \ldots, (a_h, b_h)$, лежащих на (a, b), на которых оператор $D_k(Y)$ принадлежит к классу $(\bar{S})$, равно h, причем на (a, b)

нет особых точек, иррегулярных налево, отличных от b_i, *и* $\varphi_0(x) \gtrless 0$ *при* $a_i < x < b_i$, *то для того чтобы сделать систему функций* $D_k(x^n)$ *полной на* (a, b), *необходимо и достаточно прибавить к ней* h *функций, которые можно взять равными* $x^i q(x)$ $(i = 0, 1, \ldots, h-1)$, *где* $q(x)$ — *любая данная непрерывная функция, удовлетворяющая условиям* $q(a_i) = q(b_i) = 0$ *и* $q(x) \gtrless 0$ *при* $a_i < x < b_i$.

В самом деле, допустим, что наше утверждение верно для промежутка (a, b_j), т. е. что после добавления соответствующих j слагаемых к правой части уравнения (2) мы получим уравнение

$$D_k(Y) = A(x),$$

имеющее регулярное решение $Y(x)$ на (a, b_j). В виду того что между b_j и b_{j+1} нет особых точек, иррегулярных слева, всякому непрерывному продолжению $A(x)$ от b_j до b_{j+1} будет соответствовать регулярное продолжение решения $Y(x)$, которое в некоторых случаях должно стать иррегулярным в точке b_{j+1}. В частности, можем утверждать, что этим свойством будет обладать уравнение

$$D_k(Y_1) = P(x)\, q(x),$$

если $P(x)$ — многочлен степени j, выбранный так, что $Y_1(x)$ регулярна на (a, b_j), так как в этом случае он имеет корень в каждом из j промежутков (a_i, b_i) $(i \leqslant j)$, и потому сохраняет постоянный знак на (a_{j+1}, b_{j+1}). Но принимая во внимание, что, при соответствующем подборе постоянных c_0 и $c_1 \gtrless 0$, $u(x) = Y(x) + c_0 z(x)$, $u_1(x) = Y_1(x) + c_1 z(x)$, где $z(x)$ — иррегулярное вблизи b_{j+1} решение уравнения (18), регулярны вблизи b_{j+1}, заключаем, что уравнение

$$D_k(Y) = A(x) - \frac{c_0}{c_1} P(x)\, q(x)$$

имеет регулярное решение на (a, b_{j+1}).

12

В общем случае для определения числа h функций, которыми необходимо и достаточно дополнить систему функций $D_k(x^n)$, чтобы сделать ее полной на (a, b), следует поступить следующим образом. Выше мы определили правую характеристическую точку b_1 точки a как точку, обладающую свойством, что оператор $D_k(Y)$ — класса (S) на $(a, b_1 - \varepsilon)$ при всяком $\varepsilon > 0$, и класса $(\bar{S})$ на (a, b_1). По теореме V, этой точкой будет первая лежащая справа от a особая точка, иррегулярная слева, которая обладает свойством, что $\overrightarrow{(a, b_1 - 0)} = \overrightarrow{(a, b_1)}$. Назовем второй (правой) характеристической точкой точки a следующую иррегулярную слева точку b_2, для которой $\overrightarrow{(a, b_2 - 0)} = \overrightarrow{(a, b_2)}$, и т. д. В таком случае, рассуждая подобно предыдущему, получаем

Следствие V. *Число* h *функций, которое необходимо и достаточно добавить к системе функций* $D_k(x^n)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots, h-1)$, *чтобы сделать ее полной на* (a, b), *равно числу (правых, если* $a < b$) *характеристических точек точки* a *на* (a, b).

Отсюда следует, в частности, что число правых характеристических точек a на (a, b) равно числу левых характеристических точек b на (a, b). Кроме того, очевидно, что h *не больше наименьшего из чисел* h_1 *и* h_2, *где* h_1 — *число иррегулярных слева точек, следующих за первой иррегулярной справа точкой на* (a, b), *а* h_2 — *число иррегулярных справа точек на* (a, b), *находящихся левей последней особой точки, иррегулярной слева.*

Рассмотрим, например, оператор

$$D_2(Y) = x(x^4-1)Y'' + 2(2x^4+3x^2-1)Y' + 2x(x^2+3)Y,$$

соответствующий фундаментальной системе решений $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2-1}$; любая точка $a \leqslant -1$ имеет правой характеристической точкой 1, так как $\overrightarrow{(a, x)} = 1$ при $-1 \leqslant x < 0$, $\overrightarrow{(a, x)} = 0$ при $x \geqslant 0$. Чтобы систему $D_2(x^n)$ сделать полной на любом отрезке, можно взять в качестве единственной дополнительной функции x^2-1. На основании теоремы IV мы знаем, что при тех же значениях первых двух коэффициентов никакой оператор второго порядка не мог бы быть (S) на $(-1, +1)$ (так как все три особые точки ± 1 и 0 иррегулярны); но среди них есть и такие, для которых точка $a \leqslant -1$ имеет две (правые) характеристические точки: 0 и 1. Для таких операторов, к числу которых, по теореме II, относится в частности

$$D_2^*(Y) = x(x^4-1)Y'' + 2(2x^4+3x^2-1)Y',$$

для превращения $D_2^*(x^n)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ в полную систему функций потребуется $h = 2$ дополнительных функций, которые, согласно обобщенной теореме III, можно взять равными $x(x^2-1)$ и $x^2(x^2-1)$.

Отметим еще, что, каков бы ни был оператор $D_k(Y)$, у которого $\varphi_0(x) = x^2 \left|\sin\frac{1}{x}\right|^m$, где $0 < m < 1$, дополняя систему функций $D_k(x^n)$ любым конечным числом h функций, нельзя ее сделать полной ни в каком промежутке (a, b), где $a \leqslant 0 < b$. Между тем, как мы видели, в случае $m \geqslant 1$, система функций $D_k(x^n)$ была бы полной [на всяком промежутке (a, b), где $\varphi_1(x)$ сохраняет постоянный знак].

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии Наук СССР

Поступило
4. XII. 1940

S. BERNSTEIN. SUR L'APPROXIMATION D'UNE FONCTION CONTINUE PAR UN OPÉRATEUR LINÉAIRE DIFFÉRENTIEL D'UN POLYNÔME

RÉSUMÉ

La présent mémoire contient le développement complet des résultats indiqués dans la «Première note sur les opérateurs linéaires différentiels» (Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de l'URSS, t. XXIX). Il contient, en outre, quelques résultats supplémentaires, entre lesquels je signalerai le théorème V:

***Si** l'opérateur d'ordre* k

$$D_k(Y(x)) = \sum_{i=0}^{k} \varphi_i(x) Y^{(k-i)}(x) \tag{1}$$

(où $\varphi_0(x)$ et $\varphi_1(x)$ ne sont jamais nuls simultanément) est (S) sur (a, b'), où b' est un point ordinaire (c'est à dire $\varphi_0(b') \gtrless 0$) et $b > b'$ est le point singulier voisin, pour que l'opérateur $D_k(Y(x))$ soit $(\bar{S})$ sur (a, b), il est nécessaire et suffisant que b soit irrégulier à gauche et que toutes les solutions $Z(x)$ de l'équation

$$D_k(Z(x)) = 0$$

régulières sur (a, b') soient également régulières sur (b', b).

Je rappelerai que, par définition, un opérateur $D_k(Y)$ est (S) sur (a, b), si l'ensemble de fonctions $D_k(x^n)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ est complet sur (a, b); dans le cas contraire, l'opérateur $D_k(Y)$ est $(\bar{S})$. Ainsi, pour un opérateur donné de la classe $(\bar{S})$ la question se pose de savoir, quel est le nombre de fonctions complémentaires qu'il faut ajouter au système $D_k(x^n)$ pour le rendre complit.

Le corollaire V donne la reponse générale à cette question. Indiquons seulement la proposition particulière suivante.

Si le segment (a, b) contient h intervalles $(a_1, b_1), \ldots, (a_h, b_h)$, tels que $D_k(Y)$ est $(\bar{S})$ sur (a_i, b_i) et $\varphi_0(x) \gtrless 0$, pour $a_i < x < b_i$ quelque soit $i = 1, \ldots, h$, si le segment (a, b) ne contient pas de points singuliers irréguliers à gauche différents de b_i, il est nécessaire et suffisant pour rendre le système de fonctions $D_k(x^n)$ complet sur (a, b) de lui ajouter h fonctions $A_0(x), A_1(x), \ldots, A_{h-1}(x)$ que l'on peut prendre égales à $A_i(x) = x^i q(x)$, où $q(x)$ est une fonction continue donnée quelconque satisfaisant aux conditions: $q(a_i) = q(b_i) = 0$, $q(x) \gtrless 0$ pour $a_i < x < b_i$.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 5 (1941), 43—56 Serie mathématique

Н. С. КОШЛЯКОВ

ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ MELLIN'а К ВЫВОДУ НЕКОТОРЫХ СУММАТОРНЫХ ФОРМУЛ

В работе дано применение преобразования Mellin'a к выводу сумматорной формулы Плана—Абеля—Коши и классического разложения в ряд Фурье. Кроме того, на примере сумматорной формулы Вороного показано, что излагаемый метод может быть распространен и на другие разложения, связанные с рядами Дирихле.

В заметке, помещенной в Докладах Академии Наук в 1934 г. ([1]), я применил преобразование Mellin'a к выводу одной сумматорной формулы, из которой как частные случаи получаются многие результаты Харди. Несколько позже Феррар ([2]) применил тот же метод к доказательству формулы Пуассона. В настоящей работе я показываю, как можно вывести с помощью преобразования Mellin'a сумматорную формулу Плана—Абеля—Коши и классическое разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье. Этот метод может быть распространен и на другие разложения, связанные с рядами Дирихле, что мною здесь и показывается на примере сумматорной формулы Вороного. Заметим, что вывод последней формулы имеет сходство со способом, примененным Диксоном и Ферраром в работе 1930 г. ([3]), но здесь имеет место та разница, что я применяю преобразование Mellin'a, в то время как Диксон и Феррар пользуются теорией интеграла Стильтьеса.

1

Предположим, что нам дана функция $F(s)$ комплексной переменной $s=\tau+it$, голоморфная в области

$$-\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta+1 \quad (\alpha>0,\ \beta>0) \tag{1}$$

за исключением точки $s=0$, где она имеет полюс первого порядка, и пусть для всех достаточно больших значений $|t|$ имеет место равномерная относительно τ, изменяющегося в пределах (1), оценка

$$F(s)=O\left(e^{-\frac{\pi}{2}|t|}\,|t|^{-\lambda}\right), \qquad \lambda>1. \tag{2}$$

Рассмотрим функцию

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\tau-i\infty}^{\tau+i\infty}\frac{F(s)}{x^s}\,ds, \qquad x>0, \tag{3}$$

где τ удовлетворяет неравенствам

$$0<\tau\leqslant\beta+1, \tag{4}$$

и проинтегрируем функцию $\frac{F(s)}{x^s}$ по обводу четырехугольника с вершинами

$$A(\beta+1-iT),\quad B(\beta+1+iT),\quad C(-\alpha+iT),\quad D(-\alpha-iT); \tag{5}$$

тогда, принимая во внимание оценку (2), мы без труда убедимся, что интегралы, взятые по отрезкам CB и DA, в пределе при $\lim T=\infty$ обратятся в нуль, в результате чего получится соотношение

$$f(x)=R_0+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\alpha-i\infty}^{-\alpha+i\infty}\frac{F(s)}{x^s}\,ds, \tag{6}$$

где через R_0 обозначен вычет функции $F(s)$ относительно полюса $s=0$.

Так как $\alpha>0$, то

$$\left|\int_{-\alpha-i\infty}^{-\alpha+i\infty}\frac{F(s)}{x^s}\,ds\right|<x^\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}|F(-\alpha+it)|\,dt. \tag{7}$$

Интеграл, стоящий здесь справа, сходится в силу оценки (2), поэтому мы вправе написать, что

$$f(x)=R_0+O(x^\alpha), \tag{8}$$

откуда ясно, что

$$R_0=f(0). \tag{9}$$

Применяя аналогичные рассуждения к формуле

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta+1-i\infty}^{\beta+1+i\infty}\frac{F(s)}{x^s}\,ds, \tag{10}$$

мы убедимся, что при достаточно больших значениях имеет место оценка

$$f(x)=O\left(\frac{1}{x^{\beta+1}}\right). \tag{11}$$

Из формулы (9) вытекает, что

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}f(\nu)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta+1-i\infty}^{\beta+1+i\infty}F(s)\,\zeta(s)\,ds, \tag{12}$$

причем перемена порядков суммирования и интегрирования произведена здесь на законном основании в виду сходимости ряда

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^{\beta+1}}$$

и интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\beta+1+it)|\,dt.$$

Интегрируя функцию $F(s)\,\zeta(s)$ по обводу четырехугольника (5) и замечая, что в силу оценки (2) интегралы

$$\int_{CB}F(s)\,\zeta(s)\,ds,\qquad \int_{DA}F(s)\,\zeta(s)\,ds$$

в пределе при $\lim T=\infty$ обращаются в нуль, мы убедимся, что

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}f(\nu)=R_1+R_2+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\alpha-i\infty}^{-\alpha+i\infty}F(s)\,\zeta(s)\,ds, \tag{13}$$

где через R_1 и R_2 обозначены вычеты функции $F(s)\zeta(s)$ относительно полюсов $s=0$ и $s=1$. Из равенства $\zeta(0)=-\frac{1}{2}$ и формулы (9) вытекает, что

$$R_1=-\frac{1}{2}f(0).$$

Для нахождения вычета R_2 заметим, что функцией $F(s)$ выполняются все условия, при которых можно произвести известное преобразование Mellin'а, вследствие чего мы вправе написать равенство

$$F(s)=\int_0^\infty f(x)\,x^{s-1}\,dx, \qquad 0<\tau<\beta+1, \tag{14}$$

откуда вытекает, что

$$R_2=\lim_{s\to 1}\int_0^\infty f(x)\,x^{s-1}dx=\int_0^\infty f(x)\,dx. \tag{15}$$

Возвратимся теперь к формуле (3) и будем считать x комплексным:

$$x=|x|e^{i\theta}, \qquad -\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}. \tag{16}$$

Функция $f(x)$ будет регулярной в области (16), так как в этом случае оценка (7) заменяется оценкой

$$\left|\int_{-\alpha-i\infty}^{-\alpha+i\infty}\frac{F(s)}{x^s}\,ds\right|<|x|^\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\frac{\pi}{2}|t|}|F(-\alpha+it)|\,dt,$$

а из формулы (2) видно, что интеграл, стоящий здесь справа, будет сходящимся. Поэтому мы вправе написать равенство

$$\frac{f(ix)-f(-ix)}{2i}=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta+1-i\infty}^{\beta+1+i\infty}F(s)\sin\frac{\pi s}{2}\,\frac{ds}{x^s}, \qquad x>0. \tag{17}$$

Так как в этом равенстве подинтегральная функция голоморфна во всей полосе (1), не исключая и точки $s=0$, и так как в силу формулы (2) имеет место оценка

$$F(s)\sin\frac{\pi s}{2}=O\left(\frac{1}{T^\lambda}\right), \qquad \lambda>1, \tag{18}$$

то интегрируя по обводу четырехугольника (5), мы придем к формуле

$$\frac{f(ix)-f(-ix)}{2i}=-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\alpha-i\infty}^{-\alpha+i\infty}F(s)\sin\frac{\pi s}{2}\,\frac{ds}{x^s}. \tag{19}$$

Умножим обе части этого равенства на $\frac{1}{e^{2\pi x}-1}$ и проинтегрируем по x в пределах от $x=0$ до $x=+\infty$; тогда получим

$$-2\int_0^\infty\frac{f(ix)-f(-ix)}{2i}\,\frac{dx}{e^{2\pi x}-1}=\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty\int_{-\alpha-i\infty}^{-\alpha+i\infty}F(s)\,2\sin\frac{\pi s}{2}\,\frac{x^{-s}}{e^{2\pi x}-1}\,ds\,dx. \tag{20}$$

Докажем, что в правой части могут быть переставлены порядки интегрирования. С этой целью положим

$$g(x,t,a)=\frac{1}{2\pi}\Big\{F(a+it)\sin\frac{\pi}{2}(a+it)\,x^{-a-it}+$$
$$+F(a-it)\sin\frac{\pi}{2}(a-it)\,x^{-a+it}\Big\}$$

и докажем, что

$$\int_{t_0}^{\infty} dt \int_{x_0}^{\infty} \frac{g(x, t, -\alpha)}{e^{2\pi x}-1} dx = \int_{x_0}^{\infty} dx \int_{t_0}^{\infty} \frac{g(x, t, -\alpha)}{e^{2\pi x}-1} dt, \tag{21}$$

где через t_0 и x_0 обозначены произвольные положительные числа. Действительно, из оценки (18) следует, что

$$\left| \int_{A}^{\infty} \frac{g(x, t, -\alpha)}{e^{2\pi x}-1} dx \right| < \varepsilon_A \varphi(t), \tag{22}$$

где $\varepsilon_A = \frac{K}{A}$ (K — постоянное число, не зависящее от A), а $\varphi(t) = \frac{1}{t^\lambda}$. Величина ε_A стремится к нулю равномерно относительно t, когда A увеличивается до бесконечности, а функция $\varphi(t)$ ограничена, положительна и интегрируема в интервале $(t_0, +\infty)$.

С другой стороны,

$$\left| \int_{B}^{\infty} \frac{g(x, t, -\alpha)}{e^{2\pi x}-1} dt \right| < \varepsilon_B \psi(x), \tag{23}$$

где $\varepsilon_B = \frac{B^{1-\lambda}}{1-\lambda}$ $(\lambda > 1)$ стремится к нулю равномерно относительно x при возрастании B до бесконечности, функция же

$$\psi(x) = \frac{x^\alpha}{e^{2\pi x}-1}$$

положительна, ограничена и интегрируема в интервале $(x_0, +\infty)$.

Из неравенств (22) и (23) вытекает, что перемена порядков интегрирования в формуле (20) может быть произведена на законном основании. Произведя эту замену и замечая, что при $R(s) = -\alpha < 0$ справедлива формула

$$2 \sin \frac{\pi s}{2} \int_0^{\infty} \frac{x^{-s}}{e^{2\pi x}-1} dx = \zeta(s), \tag{24}$$

найдем, что

$$-2 \int_0^{\infty} \frac{f(ix) - f(-ix)}{2i} \frac{dx}{e^{2\pi x}-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\alpha - i\infty}^{-\alpha + i\infty} F(s) \zeta(s) ds. \tag{25}$$

Подставляя это соотношение в равенство (13), найдем известную сумматорную формулу Плана—Абеля—Коши

$$\sum_{1}^{\infty} f(\nu) = -\frac{1}{2} f(0) + \int_0^{\infty} f(x) dx - 2 \int_0^{\infty} \frac{f(ix) - f(-ix)}{2i} \frac{dx}{e^{2\pi x}-1}. \tag{I}$$

Изложенный здесь способ без труда распространяется и на другие ряды, связанные с арифметическими функциями. Так, например, оперируя с функцией

$$\zeta^2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^s}, \qquad R(s) > 1,$$

где через $d(n)$ обозначено число делителей n, можно притти к сумматорной формуле

$$\sum_{1}^{\infty} d(\nu) f(\nu) = \frac{1}{4} f(0) + \int_0^{\infty} f(x)(\log x + 2c)\, dx - 2\int_0^{\infty} \frac{f(ix) - f(-ix)}{2i} \sigma(x) dx, \quad \text{(II)}$$

где

$$\sigma(z) = 2\sum_{n=1}^{\infty} d(n)\{K_0(4\pi\varepsilon\sqrt{nz}) + K_0(4\pi\bar{\varepsilon}\sqrt{nz})\} =$$

$$= -c - \frac{1}{2}\log z - \frac{1}{4\pi z} + \frac{z}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{z^2 + n^2}, \quad -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2}, \tag{26}$$

$\varepsilon = e^{\frac{i\pi}{4}}$, $\bar{\varepsilon} = e^{-\frac{i\pi}{4}}$, $K_0(z)$ — макдональдова функция.

2

Рассмотренное здесь преобразование Mellin'a может быть применено и к вопросу о разложении функции $f(x)$ в ряд Фурье.

Предположим, что $f(x)$ обозначает функцию, имеющую конечную и непрерывную производную $f'(x)$ в интервале (0, 1).

Положим

$$f_1(x) = \int_0^1 f'(\tau) \frac{\sin 2\pi x(\tau - \rho)}{\pi x} d\tau \qquad (0 < \rho < 1), \tag{27}$$

и составим функцию

$$F(s) = \int_0^{\infty} f_1(x) x^{s-1} dx, \qquad s = \sigma + it; \tag{28}$$

тогда, принимая во внимание известное равенство

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin 2\pi a x}{x^{2-s}} dx = \frac{\pi}{2}(2\pi)^{1-s} \frac{a^{1-s}}{\Gamma(2-s)\sin\frac{\pi s}{2}} \qquad (a > 0;\ 0 < \sigma < 2), \tag{29}$$

найдем, что

$$F(s) = \frac{2\cos\frac{\pi s}{2}\Gamma(s)}{(2\pi)^s(s-1)}\left\{\int_0^{\rho} \frac{f'(\tau)\, d\tau}{(\rho - \tau)^{s-1}} - \int_{\rho}^{1} \frac{f'(\tau)\, d\tau}{(\tau - \rho)^{s-1}}\right\} \qquad (0 < \sigma < 2). \tag{30}$$

Для оценки функции $F(s)$ при $s = \sigma + it$ и достаточно большом $|t|$, заметим, что из условия конечности производной $f'(\tau)$ в интервале (0, 1) вытекают неравенства

$$\left|\int_0^{\rho} \frac{f'(\tau)\, d\tau}{(\rho - \tau)^{s-1}}\right| < A\frac{\rho^{2-\sigma}}{|s|}, \tag{31}$$

$$\left|\int_{\rho}^{1} \frac{f'(\tau)\, d\tau}{(\tau - \rho)^{s-1}}\right| < A\frac{(1-\rho)^{2-\sigma}}{|s|}, \tag{32}$$

где A обозначает конечную постоянную величину. Отсюда вытекает формула

$$F(s) = O\left(|t|^{\sigma - \frac{5}{2}}\right), \tag{33}$$

причем эта оценка равномерна относительно σ, изменяющегося в интервале $\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2$.

Так как интеграл (28) сходится абсолютно при $0 < \sigma < 1$, то мы можем обратить его по формуле Mellin'а, в результате чего получим равенство

$$f_1(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi - i\infty}^{\xi + i\infty} \frac{F(s)}{x^s} ds, \qquad x > 0, \tag{34}$$

где ξ обозначает какое-нибудь число, лежащее внутри интервала (0, 1).

Проинтегрируем теперь функцию $\frac{F(s)}{x^s}$ по обводу четырехугольника

$$A\left(\frac{3}{2} - \varepsilon - iT\right), \quad B\left(\frac{3}{2} - \varepsilon + iT\right), \quad C(\xi + iT), \quad D(\xi - iT),$$

где $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Из оценки (33) вытекает, что

$$\lim_{T \to \infty} \int_{CB} \frac{F(s)}{x^s} ds = 0, \qquad \lim_{T \to \infty} \int_{AD} \frac{F(s)}{x^s} ds = 0,$$

откуда следует, что

$$f_1(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{3}{2} - \varepsilon - i\infty}^{\frac{3}{2} - \varepsilon + i\infty} \frac{F(s)}{x^s} ds, \qquad x > 0. \tag{35}$$

С помощью этой формулы мы можем написать, что

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} f_1(\nu) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{3}{2} - \varepsilon - i\infty}^{\frac{3}{2} - \varepsilon + i\infty} F(s)\zeta(s) ds, \tag{36}$$

причем перемена порядков суммирования и интегрирования здесь произведена на законном основании. Действительно, ряд

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

сходится абсолютно при $\sigma = \frac{3}{2} - \varepsilon > 1$, а из оценки (33) видно, что при большом $|t|$ преобладающий член в функции $F(s)$ на прямой с абсциссой $\frac{3}{2} - \varepsilon$ будет порядка $|t|^{-1-\varepsilon}$, откуда ясно, что интеграл

$$\int_{\frac{3}{2} - \varepsilon - i\infty}^{\frac{3}{2} - \varepsilon + i\infty} F(s) ds \tag{37}$$

будет сходиться абсолютно.

Воспользуемся теперь функциональным уравнением

$$\zeta(1 - s) = \frac{2 \cos \frac{\pi s}{2} \Gamma(s) \zeta(s)}{(2\pi)^s} \tag{38}$$

и перепишем формулу (36) так:

$$\sum_{1}^{\infty} f_1(\nu) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\frac{3}{2}-\varepsilon-i\infty}^{\frac{3}{2}-\varepsilon+i\infty} \frac{\zeta(1-s)}{1-s} \Phi(s)\, ds, \tag{39}$$

где

$$\Phi(s) = \int\limits_{0}^{\rho} \frac{f'(\tau)\, d\tau}{(\rho-\tau)^{s-1}} - \int\limits_{\rho}^{1} \frac{f'(\tau)\, d\tau}{(\tau-\rho)^{s-1}}. \tag{40}$$

Рассмотрим прямоугольник с вершинами

$$A\left(\frac{3}{2}-\varepsilon-iT\right), \quad B\left(\frac{3}{2}-\varepsilon+iT\right), \quad C(-k+iT), \quad D(-k-iT),$$

где k есть некоторое положительное число. Если положить

$$\omega(s) = \frac{\zeta(1-s)}{1-s} \Phi(s), \tag{41}$$

то по теореме Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\frac{3}{2}-\varepsilon-iT}^{\frac{3}{2}-\varepsilon+iT} \omega(s)\, ds = R_0 + R_1 + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-k-iT}^{-k+iT} \omega(s)\, ds + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-k+iT}^{\frac{3}{2}-\varepsilon+iT} \omega(s)\, ds + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\frac{3}{2}-\varepsilon-iT}^{-k-iT} \omega(s)\, ds, \tag{42}$$

где через R_0 и R_1 обозначены вычеты функции $\omega(s)$ относительно полюсов $s=0$ и $s=1$.

На стороне DC, где $s=-k+it$, в силу неравенств (31) и (32), оказывается

$$\left| \int\limits_{-k-iT}^{-k+iT} \omega(s)\, ds \right| < B\left[\rho^k + (1-\rho)^k\right] \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2+k^2}, \tag{43}$$

где B — постоянное число, не зависящее от k. Отсюда ясно, что

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{-k-iT}^{-k+iT} \omega(s)\, ds = 0. \tag{44}$$

На отрезке CB вещественная часть переменной s изменяется в пределах

$$-k < \sigma < \frac{1}{2} - \varepsilon, \tag{45}$$

и так как по условию $\varepsilon < \frac{1}{2}$, то мы вправе написать, что

$$\zeta(1-s) = O\left(t^{\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}-\varepsilon\right)}\right) = O\left(t^{1+\varepsilon}\right), \tag{46}$$

откуда ясно, что на прямой CB удовлетворяется неравенство

$$|\omega(s)| < C\, \frac{\rho^{2-\sigma} + (1-\rho)^{2-\sigma}}{t^{1-\varepsilon}}, \tag{47}$$

где постоянная величина C не зависит ни от σ, ни от t.

Из найденного неравенства вытекает, что

$$\left| \int\limits_{-\infty+iT}^{\frac{3}{2}-\varepsilon+iT} \omega(s)\, ds \right| < \frac{C}{T^{1-\varepsilon}} \int\limits_{-\infty}^{\frac{3}{2}-\varepsilon} \left[\rho^{2-\sigma} + (1-\rho)^{2-\sigma}\right] d\sigma. \tag{48}$$

Так как по условию $0<\rho<1$, то интеграл, стоящий здесь справа, сходится и следовательно

$$\lim_{T\to\infty}\int\limits_{-\infty+iT}^{\frac{3}{2}-\varepsilon+iT}\omega(s)\,ds=0. \tag{49}$$

Совершенно аналогичным образом докажем, что

$$\lim_{T\to\infty}\int\limits_{\frac{3}{2}-\varepsilon-iT}^{-\infty-iT}\omega(s)\,ds=0, \tag{50}$$

в результате чего формула (42) переходит в следующую:

$$\sum_{1}^{\infty}f_1(\nu)=R_0+R_1; \tag{51}$$

а так как

$$R_0=-\rho f(0)-(1-\rho)f(1)+\int\limits_0^1 f(\tau)\,d\tau,$$

$$R_1=\frac{1}{2}f(0)+\frac{1}{2}f(1)-f(\rho),$$

то

$$\sum_{1}^{\infty}f_1(\nu)=\left(\frac{1}{2}-\rho\right)f(0)+\left(\rho-\frac{1}{2}\right)f(1)-f(\rho)+\int\limits_0^1 f(\tau)\,d\tau. \tag{52}$$

С другой стороны, из формулы (27) интегрированием по частям убедимся, что

$$\sum_{1}^{\infty}f_1(\nu)=f(0)\sum_{1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi\rho\nu}{\nu\pi}+f(1)\sum_{1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi(1-\rho)\nu}{\nu\pi}-$$

$$-2\sum_{\nu=1}^{\infty}\int\limits_0^1 f(\tau)\cos 2\nu\pi(\tau-\rho)\,d\tau;$$

принимая же во внимание, что

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi x\nu}{\nu\pi}=\frac{1}{2}-x \quad (0<x<1), \tag{53}$$

найдем, что

$$\sum_{1}^{\infty}f_1(\nu)=\left(\frac{1}{2}-\rho\right)f(0)+\left(\rho-\frac{1}{2}\right)f(1)-$$

$$-2\sum_{\nu=1}^{\infty}\int\limits_0^1 f(\tau)\cos 2\nu\pi(\tau-\rho)\,d\tau. \tag{54}$$

Сравнивая между собою формулы (52) и (54), получим формулу Фурье

$$f(x)=\int\limits_0^1 f(\tau)\,d\tau+2\sum_{\nu=1}^{\infty}\int\limits_0^1 f(\tau)\cos 2\nu\pi(\tau-x)\,d\tau, \tag{III}$$

где $0\leqslant x\leqslant 1$.

3

Применим преобразование Mellin'a к выводу сумматорной формулы Вороного. Для этой цели составим функцию

$$\left.\begin{aligned} f_1(x) = \frac{1}{2\pi x}\int_\alpha^\beta f''(\tau)\left\{\left[-\tau\, Y_2(4\pi\sqrt{x\tau}) + \tau\,\frac{2}{\pi}K_2(4\pi\sqrt{x\tau})\right] - \frac{1}{2\pi^3 x\tau}\right\}d\tau \\ (\alpha > 0,\ \beta > 0), \end{aligned}\right\} \quad (55)$$

где $Y_2(x)$ и $K_2(x)$ — цилиндрические функции.

С помощью этой функции, на основании равенства

$$\int_0^\infty\left\{-Y_2(4\pi\sqrt{x\tau}) + \frac{2}{\pi}K_2(4\pi\sqrt{x\tau}) - \frac{1}{2\pi^3 x\tau}\right\}x^{s-2}\,dx =$$

$$= \frac{\Gamma(s)\,\Gamma(s-2)\cos^2\frac{\pi s}{2}}{\pi^{2s-1}\,2^{2s-3}\,\tau^{s-1}} \quad (0 < R(s) < 1), \qquad (56)$$

составим функцию

$$F(s) = \int_0^\infty f_1(x)\,x^{s-1}\,dx = \frac{4\Gamma^2(s)\cos^2\frac{\pi s}{2}}{(2\pi)^{2s}(s-1)(s-2)}\int_\alpha^\beta \frac{f''(\tau)}{\tau^{s-2}}\,d\tau. \qquad (57)$$

Если предположить функцию $f''(\tau)$ ограниченной в интервале (α, β) и затем положить $s = \sigma + it$, то при больших значениях $|t|$ будем иметь следующую оценку:

$$F(s) = O(|t|^{2\sigma-4}), \qquad (58)$$

причем эта оценка равномерна относительно σ, изменяющегося в пределах $\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2$.

Принимая во внимание асимптотические выражения цилиндрических функций, мы убедимся, что интеграл

$$\int_0^\infty f_1(x)\,x^{s-1}\,dx \qquad (s = \sigma + it)$$

будет абсолютно сходящимся в полосе $0 < \sigma < \frac{3}{4}$; поэтому преобразование Mellin'a дает формулу

$$f_1(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\xi - i\infty}^{\xi + i\infty} \frac{4\cos^2\frac{\pi s}{2}\,\Gamma^2(s)\,\Phi(s)}{(2\pi)^{2s}(s-1)(s-2)}\,\frac{ds}{x^s} \qquad \left(0 < \xi < \frac{3}{4}\right), \qquad (59)$$

где

$$\Phi(s) = \int_\alpha^\beta \frac{f''(\tau)}{\tau^{s-2}}\,d\tau. \qquad (60)$$

Если принять во внимание оценку (58) и проинтегрировать подинтегральное выражение в формуле (59) по обводу четырехугольника с вершинами

$$A\left(\frac{3}{2} - \varepsilon - iT\right),\ B\left(\frac{3}{2} - \varepsilon + iT\right),\ C(\xi + iT),\ D(\xi - iT),$$

где $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$, то в пределе при $\lim T=\infty$ получим соотношение

$$f_1(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{3}{2}-\varepsilon-i\infty}^{\frac{3}{2}-\varepsilon+i\infty}\frac{4\cos^2\frac{\pi s}{2}\Gamma^2(s)\Phi(s)\,ds}{(2\pi)^{2s}(s-1)(s-2)x^s}. \tag{61}$$

Отсюда, используя функциональное уравнение для функции $\zeta(s)$, найдем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}d(n)f_1(n)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{3}{2}-\varepsilon-i\infty}^{\frac{3}{2}-\varepsilon+i\infty}\frac{\zeta^2(1-s)\Phi(s)}{(s-1)(s-2)}\,ds. \tag{62}$$

Здесь перемена порядков интегрирования и суммирования произведена на законном основании, так как интеграл

$$\int\limits_{\frac{3}{2}-\varepsilon-i\infty}^{\frac{3}{2}-\varepsilon+i\infty}\frac{4\cos^2\frac{\pi s}{2}\Gamma^2(s)\Phi(s)}{(2\pi)^{2s}(s-1)(s-2)}\,ds$$

сходится абсолютно, как это вытекает из того обстоятельства, что наибольший член в подинтегральном выражении при большом $|t|$ будет порядка $|t|^{-1-2\varepsilon}$.

Рассмотрим теперь четырехугольник с вершинами

$$A\left(\frac{3}{2}-\varepsilon-iT\right),\ B\left(\frac{3}{2}-\varepsilon+iT\right),\ C\left(-\frac{1}{2}+\varepsilon+iT\right),$$
$$D\left(-\frac{1}{2}+\varepsilon-iT\right).$$

Интегрированием по этому четырехугольнику найдем, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{3}{2}-\varepsilon-iT}^{\frac{3}{2}-\varepsilon+iT}\omega(s)\,ds=R_0+R_1+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\frac{1}{2}+\varepsilon-iT}^{-\frac{1}{2}+\varepsilon+iT}\omega(s)\,ds+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\frac{1}{2}+\varepsilon+iT}^{\frac{3}{2}-\varepsilon+iT}\omega(s)\,ds+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\frac{1}{2}-\varepsilon-iT}^{\frac{3}{2}+\varepsilon-iT}\omega(s)\,ds, \tag{63}$$

где через R_0 и R_1 обозначены вычеты функции

$$\omega(s)=\frac{\zeta^2(1-s)\Phi(s)}{(s-1)(s-2)}$$

относительно полюсов $s=0$ и $s=1$.

Так как на отрезках CB и DA имеет место при больших $|t|$ асимптотическая оценка

$$\omega(s)=O(|t|^{2\varepsilon-1})\qquad\left(0<\varepsilon<\frac{1}{2}\right), \tag{64}$$

то ясно, что

$$\lim_{T\to\infty}\int\limits_{CB}\omega(s)\,ds=0,\ \lim_{T\to\infty}\int\limits_{DA}\omega(s)\,ds=0, \tag{65}$$

и следовательно

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(n) f_1(n) = R_0 + R_1 + \sum_{n=1}^{\infty} d(n) \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\frac{3}{2}-\varepsilon-i\infty}^{\frac{3}{2}-\varepsilon+i\infty} \frac{\Phi(1-s)\, ds}{s(s+1)\, n^s}. \qquad (66)$$

Перемена порядков интегрирования и суммирования здесь произведена на законном основании в виду абсолютной сходимости соответствующей суммы и интеграла.

Интегральный член в формуле (66) может быть переписан так:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} n\, d(n) \int\limits_{\alpha}^{\beta} f''(\tau)\, d\tau \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\frac{3}{2}-\varepsilon-i\infty}^{\frac{3}{2}-\varepsilon+i\infty} \left(\frac{\tau}{n}\right)^{s+1} \frac{ds}{s(s+1)}, \qquad (67)$$

причем произведенная здесь перестановка порядков интегрирования законна, так как интеграл

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\frac{3}{2}-\varepsilon-i\infty}^{\frac{3}{2}-\varepsilon+i\infty} \left(\frac{\tau}{n}\right)^{s-1} \frac{ds}{s(s+1)} \qquad (68)$$

сходится равномерно относительно τ, изменяющегося в интервале (α, β).

Принимая теперь во внимание известное соотношение

$$I = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < \tau \leqslant n, \\ \frac{\tau}{n} - 1 & \text{при } \tau \geqslant n, \end{cases}$$

найдем, что

$$S = \left\{ \sum_{n>0}^{n\leqslant\tau} d(n)(\tau - n) f'(\tau) - \sum_{n>0}^{n\leqslant\tau} d(n) f(\tau) \right\}_{\tau=\alpha}^{\tau=\beta} + \sum_{n>\alpha}^{n\leqslant\beta} d(n) f(n). \qquad (69)$$

С другой стороны,

$$R_0 + R_1 = \left\{ \left[-\frac{1}{2}\tau^2 \log\tau + \left(\frac{3}{4} - C\right)\tau^2 - \frac{1}{4}\tau \right] f'(\tau) \right\}_{\tau=\alpha}^{\tau=\beta} +$$

$$+ \left\{ \left[\tau\log\tau + (2C-1)\tau + \frac{1}{4} \right] f(\tau) \right\}_{\tau=\alpha}^{\tau=\beta} - \int\limits_{\alpha}^{\beta} [2C + \log\tau] f(\tau)\, d\tau, \qquad (70)$$

и следовательно формула (66) может быть переписана так:

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(n) f_1(n) = \left\{ \left[\sum_{n>0}^{n\leqslant\tau} d(n)(\tau-n) - \frac{1}{2}\tau^2\log\tau + \left(\frac{3}{4} - C\right)\tau^2 - \frac{1}{4}\tau \right] f'(\tau) \right\}_{\tau=\alpha}^{\tau=\beta} -$$

$$- \left\{ \left[\sum_{n>0}^{n\leqslant\tau} d(n) - \tau\log\tau - (2C-1)\tau - \frac{1}{4} \right] f(\tau) \right\}_{\tau=\alpha}^{\tau=\beta} + \sum_{n>\alpha}^{n\leqslant\beta} d(n) f(n) -$$

$$- \int\limits_{\alpha}^{\beta} [2C + \log\tau] f(\tau)\, d\tau. \qquad (71)$$

Возвращаясь к формуле (55) и применяя формулу интегрирования по частям, найдем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(n) f_1(n) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d(n)}{n}\left\{\left[-\tau Y_2(4\pi\sqrt{n\tau}) + \tau\frac{2}{\pi}K_2(4\pi\sqrt{n\tau})\right] f'(\tau)\right\}_{\tau=\alpha}^{\tau=\beta} -$$

$$-\frac{1}{4\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d(n)}{n^2} f'(\tau)\Big|_{\tau=\alpha}^{\tau=\beta} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{d(n)}{\sqrt{n}}\left\{\left[\sqrt{\tau}\, Y_1(4\pi\sqrt{n\tau}) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sqrt{\tau}\frac{2}{\pi}K_1(4\pi\sqrt{n\tau})\right] f(\tau)\right\}_{\tau=\alpha}^{\tau=\beta} +$$

$$+ 2\pi\sum_{n=1}^{\infty} d(n)\int_{\alpha}^{\beta} f(\tau)\left\{-Y_0(4\pi\sqrt{n\tau}) + \frac{2}{\pi}K_0(4\pi\sqrt{n\tau})\right\} d\tau. \tag{72}$$

Если мы теперь сравним между собою разложения (71) и (72) и затем примем во внимание известные результаты Вороного

$$\sum_{n>0}^{n\leqslant\tau} d(n)(\tau - n) = \frac{\tau^2}{2}\log\tau - \left(\frac{3}{4} - C\right)\tau^2 + \frac{\tau}{4} - \frac{1}{144} +$$

$$+ \frac{\tau}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d(n)}{n}\left\{-Y_2(4\pi\sqrt{n\tau}) + \frac{2}{\pi}K_2(4\pi\sqrt{n\tau})\right\}, \tag{73}$$

$$\sum_{n>0}^{n\leqslant\tau} d(n) = \frac{1}{2}d(\tau) + \tau\log\tau + (2C-1)\tau + \frac{1}{4} -$$

$$-\sqrt{\tau}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d(n)}{\sqrt{n}}\left\{Y_1(4\pi\sqrt{n\tau}) + \frac{2}{\pi}K_1(4\pi\sqrt{n\tau})\right\}, \tag{74}$$

то придем к сумматорной формуле Вороного

$$\sum_{n>\alpha}^{n\leqslant\beta} d(n) f(n) = \frac{1}{2}d(\beta) f(\beta) - \frac{1}{2}d(\alpha) f(\alpha) + \int_{\alpha}^{\beta}[2C + \log x] f(x)\,dx +$$

$$+ 2\pi\sum_{n=1}^{\infty} d(n)\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\left\{-Y_0(4\pi\sqrt{nx}) + \frac{2}{\pi}K_0(4\pi\sqrt{nx})\right\} dx. \tag{IV}$$

Математический институт
Ленинградского гос. университета

Поступило
28. X. 1940

ЛИТЕРАТУРА

[1] Кошляков Н. С., Об одной общей сумматорной формуле и ее приложениях, Доклады Ак. Наук СССР, IV (1934), 187—191.

[2] Ferrar W., Compos. mathem., 4 (1937).

[3] Dixon A. and Ferrar W., Lattice point summation formulae, The Quart. Journ. of Mathem., Oxford, 2 (1931), 31—54.

N. KOSCHLIAKOV. APPLICATION OF MELLIN'S TRANSFORMATION TO THE DEDUCTION OF SOME SUMMATION FORMULAE

SUMMARY

The object of this paper is to give a new proof of the classical summation formulae:

$$\sum_{1}^{\infty} f(n) = -\frac{1}{2} f(0) + \int_{0}^{\infty} f(x)\,dx - 2\int_{0}^{\infty} \frac{f(ix) - f(-ix)}{2i} \frac{dx}{e^{2\pi x} - 1}, \tag{I}$$

$$f(x) = \int_{0}^{1} f(\tau)\,d\tau + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{0}^{1} f(\tau) \cos 2\nu\pi(\tau - x)\,d\tau, \tag{II}$$

$$\sum_{n>\alpha}^{n\leqslant\beta} d(n) f(n) = \frac{1}{2} d(\beta) f(\beta) - \frac{1}{2} d(\alpha) f(\alpha) + \int_{\alpha}^{\beta} [2\gamma + \log x] f(x)\,dx +$$

$$+ 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} d(n) \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \left\{ -Y_0(4\pi\sqrt{nx}) + \frac{2}{\pi} K_0(4\pi\sqrt{nx}) \right\} dx, \tag{III}$$

where $d(n)$ denotes the number of divisors of n.

By using the well-known formulae

$$\zeta(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^s}, \quad R(s) > 1, \quad \int_{0}^{\infty} f(x) x^{s-1}\,dx = F(s), \quad f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tau - i\infty}^{\tau + i\infty} \frac{F(s)}{x^s}\,ds,$$

where $F(s) = O(e^{-\frac{\pi}{2}|t|} |t|^{-\lambda})$, $\lambda > 1$, $s = \tau + it$, we find that

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} f(\nu) = R_1 + R_2 + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\alpha - i\infty}^{-\alpha + i\infty} F(s)\zeta(s)\,ds,$$

where $R_1 + R_2$ represents the sum of the residues at the poles $s = 0$ and $s = 1$. It is not difficult to prove from the formula

$$\frac{f(ix) - f(-ix)}{2i} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\alpha - i\infty}^{-\alpha + i\infty} F(s) \sin\frac{\pi s}{2} \frac{ds}{x^s},$$

that

$$-2\int_{0}^{\infty} \frac{f(ix) - f(-ix)}{2i} \frac{dx}{e^{2\pi x} - 1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\alpha - i\infty}^{-\alpha + i\infty} F(s)\zeta(s)\,ds$$

and so (I) is proved, since $R_1 = -\frac{1}{2} f(0)$, $\quad R_2 = \int_{0}^{\infty} f(x)\,dx$.

Again, by using the formulae

$$f_1(x) = \int_{0}^{1} f'(\tau) \frac{\sin 2\pi x(\tau - \rho)}{\pi x}\,d\tau \quad (0 < \rho < 1), \tag{1}$$

$$|f'(x)| < K, \quad F(s) = \int_{0}^{\infty} f_1(x) x^{s-1}\,dx,$$

we find

$$F(s)=\frac{2\cos\frac{\pi s}{2}\,\Gamma(s)}{(2\pi)^s(s-1)}\Phi(s),\qquad \Phi(s)=\int_0^{\rho}\frac{f'(\tau)\,d\tau}{(\rho-\tau)^{s-1}}-\int_{\rho}^{1}\frac{f'(\tau)\,d\tau}{(\tau-\rho)^{s-1}},$$

$$F(s)=O\left(|t|^{\sigma-\frac{5}{2}}\right)\quad (s=\sigma+it)$$

and so

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}f_1(\nu)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{3}{2}-\varepsilon-i\infty}^{\frac{3}{2}-\varepsilon+i\infty}\frac{\zeta(1-s)}{1-s}\Phi(s)\,ds\quad\left(0<\varepsilon<\frac{1}{2}\right).$$

By Cauchy's formula we have

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}f_1(\nu)=R_0+R_1, \tag{2}$$

where

$$R_0=-\rho f(0)+(1-\rho)f(1)+\int_0^1 f(\tau)\,d\tau,\quad R_1=\frac{1}{2}f(0)+\frac{1}{2}f(1)-f(\rho).$$

Integration by parts in the first integral of (1) gives

$$\sum_{1}^{\infty}f_1(\nu)=\left(\frac{1}{2}-\rho\right)f(0)+\left(\rho-\frac{1}{2}\right)f(1)-2\sum_{\nu=1}^{\infty}\int_0^1 f(\tau)\cos 2\nu\pi(\tau-\rho)d\tau$$

and so we obtain Fourier's result (II). Further, from the formula

$$f_1(x)=\frac{1}{2\pi x}\int_{\alpha}^{\beta}f''(\tau)\left\{\left[-\tau Y_2(4\pi\sqrt{x\tau})+\frac{2}{\pi}\tau K_2(4\pi\sqrt{x\tau})\right]-\frac{1}{2\pi^3 x\tau}\right\}d\tau$$

$$(\alpha>0,\ \beta>0)$$

it follows that

$$F(s)=\int_0^{\infty}f_1(x)\,x^{s-1}\,dx=\frac{4\cos^2\frac{\pi s}{2}\,\Gamma^2(s)}{(2\pi)^{2s}(s-1)(s-2)}\Phi(s)\quad (s=\sigma+it),$$

$$\Phi(s)=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{f''(\tau)}{\tau^{s-2}}\,d\tau,\ |f''(x)|<K,\ F(s)=O(|t|^{2\sigma-4}).$$

By Mellin's formula we have

$$\sum_{n=1}^{\infty}d(n)f_1(n)=R_0+R_1+\sum_{n=1}^{\infty}d(n)\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{3}{2}-i\infty}^{\frac{3}{2}+i\infty}\frac{\Phi(1-s)}{s(s+1)n^s}\,ds,$$

$$R_0+R_1=\left\{\left[-\frac{1}{2}\tau^2\log\tau+\left(\frac{3}{4}-\gamma\right)\tau^2-\frac{1}{4}\tau\right]f'(\tau)\right\}_{\tau=\alpha}^{\tau=\beta}+$$

$$+\left\{\left[\tau\log\tau+(2\gamma-1)\tau+\frac{1}{4}\right]f(\tau)\right\}_{\tau=\alpha}^{\tau=\beta}-\int_{\alpha}^{\beta}[2\gamma+\log\tau]f(\tau)\,d\tau.$$

By using the formula

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\tau-i\infty}^{\tau+i\infty}\frac{\rho^{s-1}\,ds}{s(s+1)}=\begin{cases}0 & 0<\rho\leqslant 1\\ \rho-1 & \rho\geqslant 1\end{cases}$$

we obtain Voronoi's formula (III).

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADEMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 5 (1941), 57—74 Serie mathématique

Ш. Е. МИКЕЛАДЗЕ

О ЧИСЛЕННОМ ИНТЕГРИРОВАНИИ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО И ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

(*Представлено академиком* **С. Л. Соболевым**)

В работе излагается новый способ численного интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных разностным методом.

1. Общие замечания

Рассмотрим уравнение эллиптического типа

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+d\frac{\partial u}{\partial x}+e\frac{\partial u}{\partial y}-gu=t, \tag{1}$$

где a, c, d, e, g и t — непрерывные функции от (x, y) в области A, ограниченной замкнутой кривой γ. Поставим себе целью найти интеграл уравнения (1), принимающий на γ непрерывную последовательность заданных значений.

Рассмотрим два семейства линий, одно из которых состоит из прямых, параллельных оси x-ов, а другое из прямых, параллельных оси y-ов; расстояние между этими параллельными прямыми примем равным h. Таким образом, мы покроем область A сеткой, составленной из квадратиков со стороной h.

Назовем точки контура γ, общие с прямыми, образующими сетку, *граничными* точками сетки, а точки пересечения этих же прямых между собою и находящиеся строго внутри γ — *внутренними* точками (узлами) сетки. Едва ли следует отмечать, что в числе граничных точек мы будем встречать и узлы сетки, попавшие на γ.

Ниже мы всюду предполагаем, что расстояние между граничной и ближайшей с ней внутренней точкой сетки $\leqslant h$. Этого можно достичь во всех случаях надлежащим подбором сетки.

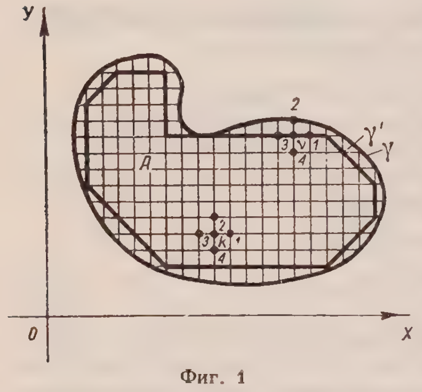
Рассмотрим внутренние точки сетки, ближайшие к граничным неузловым точкам, и присоединим к ним те из граничных точек, которые одновременно являются узлами сетки. Соединением этих точек мы наметим замкнутую ломаную γ', составленную исключительно из сторон и диагоналей квадратиков сетки так, что на части плоскости, заключенной между γ и γ', не лежат узлы сетки. На фиг. 1 дан пример построения контура γ'.

Ниже мы всюду будем называть *точкой контура* γ' узел сетки, лежащий на γ', если через этот узел не проходит γ.

Для удобства дальнейших рассуждений обозначим через u_k значение функции $u(x, y)$ в точке сетки с отметкой k (фиг. 1), а значение функции $u(x, y)$ в какой-нибудь из точек сетки, окружающих точку с отметкой k, например в точке 2, через u_2.

Рассмотрим еще точку ν контура γ'. Обозначим через u_ν^* величину функции в этой точке, а значение u в какой-нибудь из точек сетки, окружающих точку ν, например в точке 3, через u_3^*.

Пусть еще $\bar{u}_\sigma$ обозначает значение $u(x, y)$ в граничной точке сетки, лежащей по соседству с точкой ν. Так например, $\bar{u}_2$ будет обозначать заданное граничное значение u в точке 2 на γ, лежащей выше ν.



Фиг. 1

Все эти обозначения временные и вводятся исключительно для того, чтобы показать, в каких точках берутся значения искомой функции, нужные для построения той или иной формулы.

В дальнейшем в целях упрощения записи следует перенумеровать в произвольном порядке внутренние и граничные точки сетки и заменить индексы u соответственно новой нумерации. Внутренние точки сетки будем обозначать арабскими цифрами: 0, 1, ... , N, а граничные точки римскими цифрами: I, II, ...

На практике обычно допускают, что значение $u(x, y)$ в любой точке сетки, лежащей на γ', приближенно равно значению $u(x, y)$ в ближайшей точке сетки контура γ, а затем решают краевую задачу для области, ограниченной контуром γ'. Решение основано на замене данного дифференциального уравнения уравнением вида

$$u_k = \frac{1}{b_k} \sum_i \beta_i u_i - \frac{T_k}{b_k} - R_k, \tag{2}$$

в котором u_i обозначает значение $u(x, y)$ в одной из узловых точек из числа узлов, окружающих узел с отметкой k; β_i — известные числа; R_k — остаточный член, а b_k и T_k составляются из значений a, c, d, e, g и t в точке k.

Здесь u_i тотчас же должно быть заменено на u_i^*, если точка с номером i лежит на γ'.

Таким образом, значение $u(x, y)$ в точке k определяется равенством (2). В дальнейшем нам придется предположить такую группировку узлов i вокруг узла с отметкой k, которая позволит выписать уравнения вида (2) для каждого узла*, лежащего внутри γ', и обеспечит наибольший порядок R_k относительно h. Так как значения $u(x, y)$ на γ' нам приближенно известны, то очевидно число написанных уравнений

* За подробностями о формулах вида (2) отсылаем к книге ([1]).

будет в точности равно числу неизвестных значений $u(x, y)$ в точках сетки, лежащих внутри γ'.

Если откинуть остаточные члены, то решение данной краевой задачи сведется к решению системы линейных уравнений. Возникающая при этом погрешность ξ такова, что

$$|\xi| < Ch + C_1 h^{\tau-2} \qquad (\tau > 3),$$

где числа C и C_1 зависят от области A и уравнения (1).

Заметим здесь же, что первое слагаемое правой части неравенства тем меньше, чем меньше уклоняются от истинных значений установленные нами значения $u(x, y)$ в точках контура γ'.

Величина второго слагаемого зависит от ошибки, которую мы совершаем, отбрасывая остаточный член R_k формулы (2).

Вполне естественно, что мы должны добиваться все лучших и лучших приближений тем, что будем уменьшать h. Однако с уменьшением h погрешность быстро уменьшается, точность растет, но вместе с тем растет и число уравнений и время, необходимое для вычисления значений $u(x, y)$.

Для того чтобы вычисления были выполнимы, прежде всего надо как-нибудь ослабить влияние погрешности, связанное с переносом граничных значений $u(x, y)$ с γ на γ' на окончательное решение. Это осуществляется с помощью интерполяционной формулы, рассмотренной в одной из недавних работ Коллатца.

В формуле Коллатца используются значения $u(x, y)$ в трех точках сетки, расположенных на прямой, параллельной оси x-ов или оси y-ов, причем одна из них — какая-нибудь из точек контура γ, другая — точка контура γ', отстоящая от точки контура γ на расстоянии $l < h$, третья — внутренняя точка сетки, отстоящая от точки контура γ' на расстоянии h. Например для точки ν (см. фиг. 1) по Коллатцу

$$u_\nu^* = \frac{h\overset{\circ}{\bar{u}}_2 + lu_4}{h + l}, \tag{3}$$

где l — расстояние между точками ν и 2.

Формула (3) позволяет исправить первоначально взятые значения $u(x, y)$ в точках γ'.

При решении уравнения (1) в квадратной сетке со стороной клеточки сетки, равной h с исправлением граничных значений по Коллатцу, получается погрешность порядка h^2.

Мы предлагаем практически удобный метод численного решения поставленной в начале этого параграфа задачи. Наш способ решения — разностный и заключается в том, что уравнение (1) в точках сетки, лежащих внутри γ', заменяется уравнением вида (2), а для замены того же уравнения в точках γ' мы выводим уравнение вида

$$u_\nu^* = \frac{1}{b_\nu} \sum_m \alpha_m u_m - \frac{T_\nu}{b_\nu} - R_\nu, \tag{4}$$

в котором u_m обозначает значение $u(x, y)$ в одной из узловых точек из числа узлов, окружающих узел с отметкой ν; α_m — известные числа,

R_ν — остаточный член, а b_ν и T_ν составляются из значений a, c, d, e, g и t в точке ν. Здесь u_m тотчас же должно быть заменено на $\overline{u}_m$, если точка, отмеченная m-ым номером, будет граничной.

Из уравнений (2) и (4) путем откидывания остаточных членов R_k и R_ν могут быть получены конечно-разностные уравнения, которые должны иметь место для всяких k и ν. Это дает возможность выписать $p+q$ линейных алгебраических уравнений со столькими же неизвестными значениями $u(x, y)$ в p точках сетки, расположенных на γ', и в q точках сетки, лежащих внутри γ'.

Таким образом вопрос об отыскании значений искомой функции $u(x, y)$ во внутренних точках сетки по известным значениям на границе мы приводим к решению системы $p+q$ линейных уравнений со столькими же неизвестными. Полученную систему удобно решить методом последовательных приближений.

Ниже мы покажем, что *погрешность окончательного результата нашего способа решения зависит исключительно от остаточных членов* R_k *и* R_ν *уравнений* (2) *и* (4). Это позволяет путем повышения порядка малости остаточных членов чувствительно снизить погрешность окончательного результата.

Наконец, наши формулы позволяют легко решить дифференциальные уравнения вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\varphi(x, y, z),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=a^2\frac{\partial u}{\partial t}$$

с соответствующими граничными и начальными условиями.

2. Метод последовательных приближений

Ниже мы предполагаем всюду соотношения (2) и (4) такими, что в каждое из них обязательно входят, кроме значения $u(x, y)$ в точке сетки с номером ν или k, значения этой же функции в четырех ближайших к ним точках.

Конечно, в интересующие нас формулы могут входить значения $u(x, y)$ и в других точках, но для дальнейших рассуждений безразлично, будут эти значения фигурировать или нет; мы будем лишь требовать, чтобы нужное нам соотношение содержало значения $u(x, y)$ в точке с отметкой ν или k и в четырех точках сетки, ближайших к этим точкам и расположенных вправо, вверх, влево и вниз от этой точки.

Откинем теперь в (2) и (4) остаточные члены и выпишем соотношения, которые должны быть соблюдены в точках сетки. Берем некоторую начальную систему значений $u^{(0)}$ и исправляем эти значения в точках сетки, лежащих на γ'. Для этого в правой части формулы (4), взятой без остаточного члена, вместо u_m подставляем исходные значения $u_i^{(0)}$. В результате подстановки получим первое приближенное значение u в точке ν: $u_\nu^{*(1)}$. Индекс $^{(1)}$ над u_ν^* означает первое приближенное значение неизвестной величины u_ν^*.

Исправив значения u во всех точках сетки, расположенных на γ', переходим к исправлению значений u в точках сетки, лежащих внутри γ'. При этом условимся соблюдать такой порядок: сначала вычисляем значения u в точках сетки, ближайших к точкам контура γ', пользуясь уже вычисленными первыми приближениями $u_\nu^{*(1)}$, начальной системой значений $u^{(0)}$ и формулой (2); затем вычисляем значения u в точках, следующих по своей близости к этим точкам, и т. д., пока не будут исчерпаны все точки области A.

Пусть $u_k^{(1)}$ обозначает первое приближение в точке сетки с номером k. Используя ранее найденные значения $u_\nu^{*(1)}$ и $u_k^{(1)}$, посредством формул (2) и (4) вычисляем вторые приближения $u_\nu^{*(2)}$ и $u_k^{*(2)}$ и т. д. в точности так же, как мы вычисляли первые приближения.

Обозначим через $\xi_\nu^{*(s)}$ и $\xi_k^{(s)}$ соответственно ошибки s-го приближения для неизвестных u_ν^* и u_k, а максимальную абсолютную погрешность исходных значений через ε.

Пусть формулы (2) и (4) таковы, что значения α_m, β_i, b_k и b_ν положительны и, кроме того,

$$\sum_i \beta_i \leqslant b_k \quad \text{и} \quad \sum_m \alpha_m \leqslant b_\nu$$

во всех соответствующих точках сетки.

При этих допущениях легко показать, что для s-го приближения максимальное абсолютное значение погрешности в произвольной точке сетки, взятой из ряда точек μ-ой близости, не больше величины

$$(1-\delta^{\mu+1})^s \varepsilon,$$

где δ — некоторое число, лежащее между нулем и единицей.

Следовательно, при $s \to \infty$ будет стремиться к нулю верхний предел погрешности и поэтому $\xi_\nu^{(s)} \to 0$ и $\xi_k^{(s)} \to 0$. Этим самым следует считать доказанной сходимость последовательных приближений при любой исходной погрешности.

Едва ли следует отмечать, что полученное нами решение единственное.

3. Оценка погрешности

Перейдем к исследованию погрешности в точках сетки и проведем все рассуждения для того случая, когда значения u находятся путем решения системы

$$\left.\begin{aligned} U_\nu^* &= \frac{1}{b_\nu}\sum_m \alpha_m U_m - \frac{T_\nu}{b_\nu}, \\ U_k &= \frac{1}{b_k}\sum_i \beta_i U_i - \frac{T_k}{b_k}. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Здесь U_ν^* и U_k соответственно обозначают приближенное значение u_ν^* и u_k, все b_ν, b_k, α_m, β_i положительны и $\sum\limits_i \beta_i \leqslant b_k$ и $\sum\limits_m \alpha_m \leqslant b_\nu$.

Рассмотрим точки сетки, лежащие на γ'. На одно мгновение предположим, что значения u_ν^* в рассматриваемых точках известны и что эти

значения взяты из ряда значений $u(x, y)$, удовлетворяющих системе (5). Решим уравнение (1) для области, ограниченной контуром γ', при граничных значениях, равных значениям u_ν^* в точках γ'. Если решение выполнить с помощью уравнений вида (2), то в результате получатся те же значения $u(x, y)$, которые определяются путем решения системы (5).

С помощью рассуждений, аналогичных рассуждениям С. А. Гершгорина ([3]), легко показать, что

$$|\xi| \leqslant \eta + Ch^{\mu-2} \quad (\mu > 2),$$

где ξ обозначает погрешность, которая получается при вычислении U_k при помощи уравнений (2); η — точная верхняя граница абсолютных значений разности между значениями U_ν^* из ряда значений $u(x, y)$, удовлетворяющих системе (5), и истинными значениями u в соответствующих точках контура γ'; μ — порядок малости остаточного члена R_k, и наконец C — некоторая константа, которая зависит от уравнения (1) и вида области A.

Вычитая верхнее уравнение системы (5) из (4), получим

$$\xi_\nu^* = \frac{1}{b_\nu}\sum_m \alpha_m \xi_m - R_\nu,$$

где ξ_ν^* и ξ_m — погрешности в точках с отметками ν и m.

В силу принятого нами допущения относительно структуры соотношения (4), в правой части только что полученного равенства будет входить **по крайней мере одна погрешность в граничной точке.** В виду того что на γ известны **точные** значения $u(x, y)$, эта погрешность будет равна нулю, и поэтому получаем

$$|\xi_\nu^*| < (1-\delta)(\eta + Ch^{\mu-2}) + |R_\nu|,$$

где δ — наименьшее из значений коэффициентов $\frac{\alpha_m}{b_\nu}$.

В силу того что через η мы обозначили точную верхнюю границу абсолютных значений ξ_ν^* на γ', найдется по крайней мере одна точка, в которой $\eta = |\xi_\nu^*|$, и следовательно

$$\eta < (1-\delta)(\eta + Ch^{\mu-2}) + |R_\nu|_{\max}.$$

Отсюда находим

$$\eta < \frac{(1-\delta)\,Ch^{\mu-2} + |R_\nu|_{\max}}{\delta},$$

и следовательно

$$|\xi| < \frac{Ch^{\mu-2} + |R_\nu|_{\max}}{\delta}.$$

Вместо формулы (4) можно пользоваться и несколько видоизмененными формулами, которые в некоторых случаях оказываются более выгодными. Так например, если для решения уравнения Пуассона использовать формулу (12) и одну из наших формул, выведенных в работе ([4]), то погрешность, которая получится при вычислении значений функции $u(x, y)$ в узлах сетки, будет четвертого порядка малости относительно h.

Ниже мы начнем с вывода некоторых новых конечно-разностных формул, связывающих значение $u(x, y)$ в точке с отметкой ν со значе-

ниями $u(x, y)$ в ближайших к этой точке точках сетки. Оценки остаточных членов выводимых формул имеют форму

$$|R_\nu| \leqslant C_1 h^p \quad (p=3, 4).$$

Здесь C_1 — константа, зависящая от частных производных некоторого порядка от u и от области A.

4. Новые формулы

Для того чтобы выводимые нами формулы вида (4) имели практическую ценность, мы условимся подбирать линейную комбинацию значений u в точках сетки, окружающих например точку ν (фиг. 1) так, чтобы обеспечить наибольший порядок малости R_ν относительно h.

Пусть функция $u(x, y)$ непрерывна в A вместе со своими частными производными вплоть до того порядка, который используется ниже при выводе нужных нам формул. Пусть эти производные остаются непрерывными также при приближении точки (x, y) к γ изнутри.

Возьмем точку сетки, отмеченную номером ν, и четыре соседних точки 1, 2, 3, 4. Пусть точка 2 отстоит от точки ν на расстоянии l. Условимся значение частной производной $\frac{\partial^{p+q}u}{\partial x^p \partial y^q}$ в точке с номером ν обозначать через $\frac{\partial^{p+q}u_\nu}{\partial x^p \partial y^q}$.

С помощью формулы Тейлора получим

$$\bar{u}_2 = u_\nu^* + l\frac{\partial u_\nu^*}{\partial y} + \frac{l^2}{2}\frac{\partial^2 u_\nu^*}{\partial y^2} + \frac{l^3}{6}\frac{\partial^3 \tilde{u}_{\nu,2}}{\partial y^3},$$

$$u_4 = u_\nu^* - h\frac{\partial u_\nu^*}{\partial y} + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u_\nu^*}{\partial y^2} - \frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 \tilde{u}_{\nu,4}}{\partial y^3},$$

где, например, $\frac{\partial^3 \tilde{u}_{\nu,2}}{\partial y^3}$ обозначает значение $\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}$ в некоторой точке вертикали, проходящей через ν, заключающейся между точками 2 и ν.

Используя полученные разложения, мы приходим к равенству

$$h^2\bar{u}_2 - l^2 u_4 = (h^2 - l^2)\, u_\nu^* + hl\,(h+l)\frac{\partial u_\nu^*}{\partial y} + \frac{h^2 l^2}{6}\left[l\frac{\partial^3 \tilde{u}_{\nu,2}}{\partial y^3} + h\frac{\partial^3 \tilde{u}_{\nu,4}}{\partial y^3}\right].$$

Но здесь коэффициенты $\frac{\partial^3 \tilde{u}_{\nu,2}}{\partial y^3}$ и $\frac{\partial^3 \tilde{u}_{\nu,4}}{\partial y^3}$ имеют один и тот же знак, так что мы можем положить

$$l\frac{\partial^3 u_{\nu,2}}{\partial y^3} + h\frac{\partial^3 u_{\nu,4}}{\partial y^3} = (l+h)\frac{\partial^3 \tilde{u}_{2,4}}{\partial y^3},$$

или

$$h^2\bar{u}_2 - l^2 u_4 = (h^2 - l^2)\, u_\nu^* + hl\,(h+l)\frac{\partial u_\nu^*}{\partial y} + \frac{h^2 l^2}{6}(l+h)\frac{\partial^3 \tilde{u}_{2,4}}{\partial y^3},$$

где $\frac{\partial^3 \tilde{u}_{2,4}}{\partial y^3}$ обозначает значение $\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}$ в точке, заключающейся между точками 2 и 4. Отсюда получаем

$$\frac{\partial u_\nu^*}{\partial y} = \frac{h^2\bar{u}_2 - (h^2 - l^2)\, u_\nu^* - l^2 u_4}{hl\,(h+l)} - \frac{hl}{6}\frac{\partial^3 \tilde{u}_{2,4}}{\partial y^3}. \tag{6}$$

Продолжая разложение Тейлора до членов четвертого порядка, мы можем вывести равенство

$$h\bar{u}_2 + lu_4 = (h+l)\,u_\nu^* + \frac{hl\,(h+l)}{2}\,\frac{\partial^2 u_\nu^*}{\partial y^2} + \frac{lh}{6}\,(l^2 - h^2)\,\frac{\partial^3 u_\nu^*}{\partial y^3} + $$
$$+ \frac{lh}{24}\left[\,l^3\,\frac{\partial^4 \tilde{u}_{2,\nu}}{\partial y^4} + h^3\,\frac{\partial^4 \tilde{u}_{\nu,4}}{\partial y^4}\right].$$

Но здесь мы можем положить

$$l^3\,\frac{\partial^4 \tilde{u}_{2,\nu}}{\partial y^4} + h^3\,\frac{\partial^4 \tilde{u}_{\nu,4}}{\partial y^4} = (l^3 + h^3)\,\frac{\partial^4 \tilde{u}_{2,4}}{\partial y^4},$$

так что

$$h\bar{u}_2 + lu_4 = (h+l)\,u_\nu^* + \frac{hl\,(h+l)}{2}\,\frac{\partial^2 u_\nu^*}{\partial y^2} + \frac{lh\,(l^2 - h^2)}{6}\,\frac{\partial^3 u_\nu^*}{\partial y^3} + \frac{lh}{24}\,(l^3 + h^3)\,\frac{\partial^4 \tilde{u}_{2,4}}{\partial y^4}.$$

Отсюда находим

$$\frac{\partial^2 u_\nu^*}{\partial y^2} = 2\,\frac{h\bar{u}_2 - (h+l)\,u_\nu^* + lu_4}{hl\,(h+l)} - \frac{l-h}{3}\,\frac{\partial^3 u_\nu^*}{\partial y^3} - \frac{l^2 - lh + h^2}{12}\,\frac{\partial^4 \tilde{u}_{2,4}}{\partial y^4}. \qquad (7)$$

Вычисляя точно так же значения частных производных $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ в точке ν, получим

$$\frac{\partial u_\nu^*}{\partial x} = \frac{u_1 - u_3}{2h} - \frac{h^2}{6}\,\frac{\partial^3 \tilde{u}_{1,3}}{\partial x^3}, \qquad (8)$$

$$\frac{\partial^2 u_\nu^*}{\partial x^2} = \frac{u_1 - 2u_\nu^* + u_3}{h^2} - \frac{h^2}{12}\,\frac{\partial^4 \tilde{u}_{1,3}}{\partial x^4}. \qquad (9)$$

Заменяя в уравнении (1) $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ их значениями (6) — (9), приходим к следующему разностному уравнению:

$$u_\nu^* = \frac{1}{b_\nu}\,(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 \bar{u}_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4 - T_\nu) - R_\nu,$$

где

$$\alpha_1 = l\,(h+l)\left(a_\nu + \frac{hd_\nu}{2}\right),$$
$$\alpha_2 = 2h^2\left(c_\nu + \frac{he_\nu}{2}\right),$$
$$\alpha_3 = l\,(h+l)\left(a_\nu - \frac{hd_\nu}{2}\right),$$
$$\alpha_4 = 2hl\left(c_\nu - \frac{le_\nu}{2}\right),$$
$$T_\nu = lh^2\,(h+l)\,t_\nu,$$
$$b_\nu = (h+l)\,[2la_\nu + 2hc_\nu + h\,(h-l)\,e_\nu + lh^2 g_\nu],$$

$$|R_\nu| = \frac{h^3}{24}\;\frac{(a_\nu + c_\nu)\,hM_4 + 2\,[2c_\nu + h\,(|e_\nu| + |d_\nu|)]\,M_3}{a_\nu + c_\nu + \frac{h^2}{2}\,g_\nu - \frac{h-l}{2}\,|e_\nu|}.$$

Как здесь, так и ниже, мы предполагаем, что в области A $a > 0$, $c > 0$, $g \geqslant 0$. Условие $g \geqslant 0$ обеспечивает единственность решения. M_3 и M_4 соответственно обозначают максимальное значение абсолютной величины производных третьего и четвертого порядка от u в области A.

Уравнение в конечных разностях, которым заменяется (1) и которое должно быть выполнено во всех внутренних точках сетки, лежащих внутри γ', будет

$$u_k = \frac{1}{b_k}(\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \beta_3 u_3 + \beta_4 u_4 - T_k) - R_k, \tag{10}$$

где

$$\beta_1 = a_k + \frac{hd_k}{2},$$
$$\beta_2 = c_k + \frac{he_k}{2},$$
$$\beta_3 = a_k - \frac{hd_k}{2},$$
$$\beta_4 = c_k - \frac{he_k}{2},$$
$$T_k = h^2 t_k,$$
$$b_k = 2a_k + 2c_k + h^2 g_k.$$

Чтобы полученные формулы удовлетворяли условиям § 2, h следует выбрать так, чтобы во всех внутренних точках сетки

$$\frac{hd}{2} < a \quad \text{и} \quad \frac{he}{2} < c.$$

При таком выборе h величины α_m и β_i ($m = 1, 2, 3, 4$; $i = 1, 2, 3, 4$) будут положительны и, кроме того,

$$\sum_{m=1}^{4} \alpha_m \leqslant b_\nu, \quad \sum_{i=1}^{4} \beta_i \leqslant b_k.$$

В тех случаях, когда в число ближайших точек, окружающих точку контура γ', входят две или три граничные точки, замена (1) в точках контура γ' уравнением в конечных разностях производится в точности так же, как в случае одной граничной точки.

Для удобства дальнейших рассуждений вообразим точку контура γ' с отметкой ν и четыре соседних точки с отметками 1, 2, 3, 4, расположенные соответственно вправо, вверх, влево и вниз от точки ν. Пусть λ, τ, l и h соответственно обозначают расстояния от точек 1, 2, 3 и 4 до точки ν.

С помощью простых вычислений мы легко найдем выражения частных производных от u через значения u в точках 1, 2, 3, 4 и ν, в которых условимся u_m ($m = 1, 2, 3, 4$) тотчас же заменять на $\bar{u}_m$, если точка с отметкой m окажется граничной точкой. Эти выражения имеют вид

$$\frac{\partial u_\nu^*}{\partial x} = \frac{l^2 u_1 + (\lambda^2 - l^2) u_\nu^* - \lambda^2 u_3}{l\lambda (l + \lambda)} - \frac{l\lambda}{6} \frac{\partial^3 \tilde{u}_{1,3}}{\partial x^3},$$

$$\frac{\partial u_\nu^*}{\partial y} = \frac{h^2 u_2 + (\tau^2 - h^2) u_\nu^* - \tau^2 u_4}{h\tau (h + \tau)} - \frac{h\tau}{6} \frac{\partial^3 \tilde{u}_{2,4}}{\partial y^3},$$

$$\frac{\partial^2 u_\nu^*}{\partial x^2} = 2 \frac{l u_1 + \lambda u_3 - (l + \lambda) u_\nu^*}{l\lambda (l + \lambda)} - \frac{\lambda - l}{3} \frac{\partial^3 u_\nu^*}{\partial x^3} + \frac{\lambda^2 - l\lambda + l^2}{12} \frac{\partial^4 \tilde{u}_{1,3}}{\partial x^4},$$

$$\frac{\partial^2 u_\nu^*}{\partial y^2} = 2 \frac{h u_2 + \tau u_4 - (h + \tau) u_\nu^*}{h\tau (h + \tau)} - \frac{\tau - h}{3} \frac{\partial^3 u_\nu^*}{\partial y^3} + \frac{\tau^2 - \tau h + h^2}{12} \frac{\partial^4 \tilde{u}_{2,4}}{\partial y^4}.$$

Подставим вместо производных только что полученные выражения в уравнение (1). В результате подстановки мы получим формулу вида

$$u_\nu^* = \frac{1}{b_\nu} \sum_{m=1}^{4} \alpha_m u_m - \frac{T_\nu}{b_\nu} - R_\nu ,$$

где

$$\alpha_1 = 2lh\tau (h+\tau)\left(a_\nu + \frac{ld_\nu}{2} \right),$$

$$\alpha_2 = 2lh\lambda (l+\lambda)\left(c_\nu + \frac{he_\nu}{2} \right),$$

$$\alpha_3 = 2\lambda h\tau (h+\tau)\left(a_\nu - \frac{\lambda d_\nu}{2} \right),$$

$$\alpha_4 = 2\tau l\lambda (l+\lambda)\left(c_\nu - \frac{\tau e_\nu}{2} \right),$$

$$T_\nu = l\lambda (l+\lambda) h\tau (h+\tau) t_\nu ,$$

$$b_\nu = (\lambda + l)(h+\tau)\left[2h\tau \left(a_\nu + \frac{l-\lambda}{2} d_\nu \right) + 2l\lambda \left(c_\nu + \frac{h-\tau}{2} e_\nu \right) + l\lambda\tau h g_\nu \right].$$

Обозначим через $\varkappa$ наименьшее из чисел λ, τ и l. Пусть h будет наибольшим из чисел λ, τ, l, h, $|\lambda - l|$ и $|\tau - h|$.

Выберем h столь малым, чтобы во всех внутренних точках сетки

$$\left| \frac{hd}{2} \right| < a \quad \text{и} \quad \left| \frac{he}{2} \right| < c.$$

Эти неравенства влекут за собой неравенства

$$\left| \frac{l-\lambda}{2} d_\nu \right| < a_\nu, \quad \left| \frac{h-\tau}{2} e_\nu \right| < c_\nu, \quad \alpha_m > 0, \quad b_\nu > 0 \quad \text{и} \quad \sum_{m=1}^{4} \alpha_m < b_\nu .$$

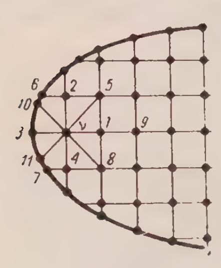
Вычисляя, находим

$$|R_\nu| < \frac{h^3}{24} \frac{(a_\nu + c_\nu) hM_4 + 2\{2(a_\nu + c_\nu) + h(|d_\nu| + |e_\nu|)\} M_3}{\left(a_\nu + \frac{l-\lambda}{2} d_\nu \right) + \left(c_\nu + \frac{h-\tau}{2} e_\nu \right) + \frac{\varkappa^2 g_\nu}{2}}.$$

В заключение выведем еще разностные уравнения, соответствующие уравнению Пуассона

$$\Delta u = \varphi(x, y).$$

Ввиду далеко идущей аналогии с изложенным выше, мы ограничиваемся ниже приведением для справок нескольких таких уравнений, которыми можно пользоваться на практике. В этих уравнениях дается связь между величиной оператора Лапласа для функции $u(x, y)$ в точке с отметкой ν со значениями u в точках фиг. 2. Числа λ, τ, l, τ_1 и λ_1, фигурирующие в приводимых формулах, соответственно обозначают расстояния от точек 6, 10, 3, 11 и 7 до вертикали, проходящей через точку ν.



Фиг. 2

Прежде всего рассмотрим конечно-разностные уравнения с остаточными членами порядка h^3.

Одно из этих уравнений имеет вид

$$u_\nu^* = \frac{2lhu_1 + 2h^2\bar{u}_3 + l(h+l)(u_2+u_4)}{2(h+l)^2} - \frac{lh^2}{2(h+l)}\Delta u_\nu^* - R_\nu, \qquad (11)$$

где Δu_ν^* обозначает величину оператора Лапласа в точке сетки с отметкой ν. Вычисляя, находим

$$|R_\nu| < \frac{(h-l)\,h^2}{12} M_3 + \frac{h^4}{24} M_4,$$

где M_3 и M_4 — наибольшие значения абсолютных величин частных производных от u соответственно третьего и четвертого порядка внутри γ.

Далее, мы имеем уравнение

$$u_\nu^* = \frac{\tau}{\tau+\tau_1}\,\frac{\tau_1 u_5 + h\bar{u}_{11}}{h+\tau_1} + \frac{\tau_1}{\tau+\tau_1}\,\frac{\tau u_8 + h\bar{u}_{10}}{h+\tau} - \frac{h\tau\tau_1}{\tau+\tau_1}\Delta u_\nu^* - R_\nu.$$

Оценка остаточного члена здесь будет иметь форму

$$|R_\nu| < Ch^3,$$

где число C зависит от области A и от производных третьего порядка от искомой функции.

Можем написать также

$$u_\nu^* = \frac{l}{2h+2l-\lambda-\lambda_1}\left\{\frac{\lambda u_5 + h\bar{u}_6}{\lambda+h} + \frac{\lambda_1 u_8 + h\bar{u}_7}{\lambda_1+h}\right\} + \frac{2h-\lambda-\lambda_1}{2h+2l-\lambda-\lambda_1}\,\frac{lu_1 + h\bar{u}_3}{h+l} - \frac{lh^2}{2h+2l-\lambda-\lambda_1}\Delta u_\nu^* - R_\nu.$$

Вычисление показывает, что

$$|R_\nu| < Ch^3.$$

Здесь C, как и выше, зависит от области A и от производных третьего порядка от искомой функции.

Наконец, рассмотрим конечно-разностные уравнения с остаточными членами порядка h^4. Одно из интересующих нас уравнений имеет вид

$$u_\nu^* = \frac{1}{6h^3+10lh^2+6l^2h+2l^3}\Big\{l(h^2-l^2)(u_6+u_8) + (4h^2l+2l^3)u_1 + 6h^3\bar{u}_3 + (2h^2l+3hl^2+l^3)(u_2+u_4) - 3lh^2(h+l)\Delta u_\nu^* - lh^2(h^2-l^2)\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x}\Big\} - R_\nu, \qquad (12)$$

причем $\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x}$ обозначает значение $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ в точке ν. Вычисляя, находим

$$|R_\nu| < Ch^4,$$

где число C зависит от области A и от производных четвертого порядка от искомой функции.

Можно также указать на уравнение

$$u_\nu^* = \frac{1}{6h^3+10lh^2+6l^2h+2l^3}\Big\{(4lh^2+2l^3)u_1 + 6h^3\bar{u}_3 + (lh^2-l^3)(u_5+u_8) + (2lh^2+3l^2h+l^3)(u_2+u_4) - (2lh^4+3l^2h^3+l^3h^2)\Delta u_\nu^* - (lh^4-l^3h^2)\Delta u_1\Big\} - R_\nu.$$

Вычисление показывает, что

$$|R_\nu| < Ch^4,$$

где C зависит от области A и от производных четвертого порядка от искомой функции.

5. Численный пример

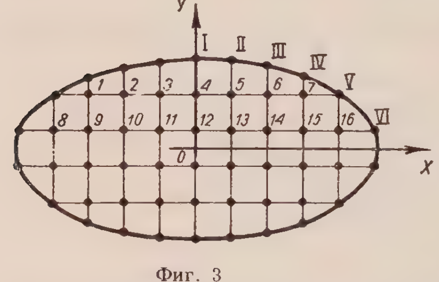
В качестве примера рассмотрим уравнение

$$\Delta u = 6{,}25u + 40\,(x-1)\,e^{-2{,}5x}.$$

Пусть область изменения переменных x и y есть эллипс

$$4x^2 + 16y^2 = 1.$$

Требуется найти решение данного дифференциального уравнения, удовлетворяющее на границе условию $u \equiv 0$.



Фиг. 3

По соображениям симметрии нам достаточно найти функцию $u\,(x, y)$ для половины эллипса в узлах 1 — 16 (фиг. 3). В нашем примере берем $h = 0{,}1$.

Формулы (10) и (11), если в них отбросить остаточные члены, для вычисления приближенных значений всех u от u_1 до u_{16} приводят к необходимости решения следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned}
U_1 &= 0{,}21993\ U_9 + 0{,}16495\,U_2 + 0{,}18158,\\
U_2 &= 0{,}24325\ U_{10} + 0{,}21786\,(U_1 + U_3) + 0{,}17241,\\
U_3 &= 0{,}24609\ U_{11} + 0{,}23988\,(U_2 + U_4) + 0{,}13553,\\
U_4 &= 0{,}24615\,(U_3 + U_5 + U_{12}) + 0{,}09846,\\
U_5 &= 0{,}24609\ U_{13} + 0{,}23988\,(U_4 + U_6) + 0{,}06726,\\
U_6 &= 0{,}24325\ U_{14} + 0{,}21786\,(U_5 + U_7) + 0{,}04228,\\
U_7 &= 0{,}21993\ U_{15} + 0{,}16495\,U_6 + 0{,}02182,\\
U_8 &= 0{,}32039\ U_9 + 0{,}46307,\\
U_9 &= 0{,}32652\,(U_1 + U_8 + U_{10}) + 0{,}35946,\\
U_{10} &= 0{,}32652\,(U_2 + U_9 + U_{11}) + 0{,}25841,\\
U_{11} &= 0{,}32652\,(U_3 + U_{10} + U_{12}) + 0{,}18448,\\
U_{12} &= 0{,}32652\,(U_4 + U_{11} + U_{13}) + 0{,}13061,\\
U_{13} &= 0{,}32652\,(U_5 + U_{12} + U_{14}) + 0{,}09154,\\
U_{14} &= 0{,}32652\,(U_6 + U_{13} + U_{15}) + 0{,}06338,\\
U_{15} &= 0{,}32652\,(U_7 + U_{14} + U_{16}) + 0{,}04319,\\
U_{16} &= 0{,}32039\ U_{15} + 0{,}02685.
\end{aligned}$$

Решая эту систему, находим $U_1, U_2, \ldots, U_{16}$.

Выпишем теперь с помощью формулы (10) соотношения, которые должны быть выполнены для точек 9 — 15, и решим полученную систему,

исправляя значения $u(x, y)$ в точках 1—8 и 16 с помощью формулы (3). Следующая таблица дает результаты вычислений *:

u	по Коллатцу	по Микеладзе	точное
u_1	0,31048	0,58916	0,59276
u_2	0,44190	0,78655	0,79139
u_3	0,43779	0,76584	0,77042
u_4	0,45570	0,63631	0,64
u_5	0,26378	0,46472	0,46728
u_6	0,16115	0,28962	0,29113
u_7	0,07345	0,13162	0,13226
u_8	0,44096	0,86783	0,86985
u_9	0,93145	1,26332	1,27020
u_{10}	1,00033	1,31118	1,31898
u_{11}	0,89886	1,17433	1,18131
u_{12}	0,74974	0,95448	0,96
u_{13}	0,54159	0,71255	0,71650
u_{14}	0,36479	0,48271	0,48522
u_{15}	0,22035	0,28206	0,28342
u_{16}	0,10432	0,11722	0,11772

6. Уравнение $\Delta u = \varphi(x, y, z)$

Пусть ищется функция $u(x, y, z)$, которая в области D, ограниченной замкнутой поверхностью S, удовлетворяет дифференциальному уравнению $\Delta u = \varphi(x, y, z)$, а на поверхности S условию $u = f(x, y, z)$.

Проведем в пространстве систему плоскостей, параллельных координатным плоскостям и отстоящих друг от друга на расстоянии h. Они образуют некоторую кубическую сетку в пространстве.

Назовем точки поверхности S, общие с линиями пересечения плоскостей, образующих сетку, граничными точками сетки, а точки пересечения плоскостей, образующих сетку, находящиеся строго внутри S, — внутренними точками (узлами) сетки. В числе граничных точек сетки будут и узлы сетки, попавшие на S.

Пусть кубическая сетка построена таким образом, что расстояние между любой граничной и ближайшей соседней с ней внутренней точкой $\leqslant h$.

Построим замкнутую поверхность S', следуя граням кубиков сетки так, чтобы расстояние между граничной и ближайшей соседней с ней внутренней точкой, лежащей на S', было $\leqslant h$.

Для численного решения уравнения $\Delta u = \varphi(x, y, z)$ с заданными на S граничными значениями функции $u(x, y, z)$ с помощью формул вида (7), (9) и аналогичной им формулы для $\frac{\partial^2 u_\nu^*}{\partial z^2}$ мы выписываем прежде всего уравнения, которые должны быть соблюдены в точках поверхности S'. Пишем затем уравнения, которые должны быть выполнены для точек сетки, лежащих внутри S'. Идя таким путем, мы получим систему $N = m + p$ линейных алгебраических уравнений со столькими же

* Вычисления были проведены Д. А. Кинкладзе.

неизвестными значениями $u(x, y, z)$ в p точках сетки, расположенных на S', и в m точках сетки, лежащих внутри S'.

Решив полученную систему, например методом последовательных приближений, найдем интересующие нас значения $u(x, y, z)$ во всех точках сетки.

7. Уравнение теплопроводности

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\Delta u = a^2 \frac{\partial u}{\partial t} \quad (a \neq 0),$$

где a — непрерывная функция точки, Δ обозначает операцию Лапласа, u — температуру, а t — время.

Пусть переменные x и y изменяются в области A, ограниченной контуром γ. Построим сетку и наметим контур γ' в точности так же, как что было сделано в § 1 (см. фиг. 1).

Поставим себе целью найти интеграл данного уравнения, который удовлетворяет краевому условию $u = f(t, S)$ на γ и начальному условию $u\Big|_{t=0} = \varphi(x, y)$.

Для приближенного численного решения уравнения теплопроводности при заданных начальных и граничных условиях данное уравнение заменяется уравнением в конечных разностях * и предполагается, что значение функции $u(x, y, t)$ в точке контура γ произвольного слоя достаточно мало отличается от значения $u(x, y, t)$ в точке контура γ' того же слоя, если расстояние между рассматриваемыми точками достаточно мало.

* Вывод конечно-разностных уравнений для приближенного численного решения уравнения теплопроводности можно найти в ([1]).

u	$t=0$	0,01	0,02	0,03	0,04
u_{I}	0,96891	0,96408	0,95927	0,95448	0,94973
u_{II}	0,96530	0,96048	0,95570	0,95093	0,94619
u_{III}	0,95446	0,94970	0,94496	0,94025	0,93556
u_{IV}	0,93630	0,93163	0,92698	0,92236	0,91776
u_{V}	0,91072	0,90618	0,90166	0,89716	0,89269
u_{VI}	0,88128	0,87688	0,87251	0,86816	0,86383
u_4	0,98877	0,98383	0,97892	0,97403	0,96917
u_5	0,98383	0,97893	0,97403	0,96917	0,96433
u_6	0,96906	0,96423	0,95942	0,95462	0,94986
u_7	0,94461	0,93991	0,93519	0,93054	0,92589
u_{12}	0,99875	0,99376	0,98880	0,98386	0,97894
u_{13}	0,99376	0,98880	0,98386	0,97894	0,97406
u_{14}	0,97884	0,97395	0,96909	0,96425	0,95943
u_{15}	0,95415	0,94938	0,94464	0,93992	0,93523
u_{16}	0,91991	0,91532	0,91074	0,90620	0,90168

Это дает возможность вычислить значения u на следующем слое по значениям u на предыдущем.

Мы должны здесь обратить внимание на то, что установление значений $u(x, y, t)$ в точках контура γ' произвольного слоя по ее значениям в соответствующих точках γ того же слоя, вообще говоря, приводит к чувствительной погрешности. Для того чтобы уничтожить влияние этой погрешности, мы будем пользоваться подходяще выбранными уравнениями в конечных разностях.

Одно из таких уравнений, когда в число ближайших точек, окружающих точку контура γ', входит одна граничная точка, мы получим, если в (11) заменим Δu_ν^* на $a^2 \frac{\partial U_{\nu,i}^*}{\partial t}$ и положим

$$\frac{\partial U_{\nu,i}^*}{\partial t} \approx \frac{U_{\nu,i+1}^* - U_{\nu,i}}{\delta},$$

где δ обозначает величину шага по t, а $U_{\nu,i+1}^*$ и $U_{\nu,i}^*$ соответственно приближенные значения u в точке ν $(i+1)$-го и i-го слоя (по времени).

Интересующая нас формула, при

$$a = \text{const} \text{ и } \delta = \frac{a^2 h^2}{4},$$

примет вид

$$U_{\nu,i+1}^* = \frac{h}{2l} \frac{lU_{\nu,i}^{(1)} + h\overline{U}_{\nu,i}^{(3)}}{h+l} + \frac{U_{\nu,i}^{(2)} + U_{\nu,i}^{(4)}}{4} + U_{\nu,i}^* \left(1 - \frac{h+l}{2l}\right), \tag{13}$$

где $U_{\nu,i}^{(p)}$ $(p = 1, 2, 3, 4)$ обозначают приближенные значения u в ближайших к точке ν точках i-го слоя.

0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1	$e^{-0,05} \cos x \cos y$
0,94499	0,94028	0,93559	0,93092	0,92628	0,92166	—
0,94147	0,93678	0,93210	0,92745	0,92283	0,91822	—
0,93089	0,92626	0,92164	0,91704	0,91246	0,90791	—
0,91318	0,90863	0,90410	0,89959	0,89510	0,89064	—
0,88823	0,88381	0,87940	0,87501	0,87065	0,86630	—
0,85952	0,85524	0,85097	0,84673	0,84250	0,83830	—
0,96433	0,95952	0,95473	0,94996	0,94522	0,94051	0,94055
0,95952	0,95473	0,94996	0,94522	0,94051	0,93581	0,93585
0,94512	0,94040	0,93571	0,93104	0,92639	0,92178	0,92180
0,92128	0,91667	0,91211	0,90755	0,90303	0,89852	0,89854
0,97406	0,96919	0,96435	0,95954	0,95475	0,94998	0,95004
0,96919	0,96435	0,95954	0,95475	0,94998	0,94524	0,94529
0,95464	0,94988	0,94514	0,94042	0,93573	0,93106	0,93111
0,93056	0,92592	0,92129	0,91670	0,91212	0,90757	0,90761
0,89718	0,89270	0,88825	0,88382	0,87941	0,87502	0,87504

Формула для вычисления u слой за слоем для точек, лежащих внутри γ', имеет вид

$$U_{k,\,i+1} = \frac{U^{(1)}_{k,\,i} + U^{(2)}_{k,\,i} + U^{(3)}_{k,\,i} + U^{(4)}_{k,\,i}}{4}, \tag{14}$$

где $U_{k,\,i+1}$ и $U^{(p)}_{k,\,i}$ $(p = 1, 2, 3, 4)$ соответственно обозначают приближенные значения u в точке k $(i+1)$-го слоя и в точках, отстоящих на h по горизонтали и вертикали от точки с номером k i-го слоя.

С помощью уравнений (13) и (14) мы прежде всего вычисляем значения функции $u(x, y, t)$ в точках ν и k при $t = \delta$, что возможно, так как значения $u(x, y, t)$ в этих точках при $t = 0$ нам известны; затем отыскиваем значения $u(x, y, t)$ при $t = 2\delta$. Указанный процесс вычисления может быть продолжен неограниченно.

Проиллюстрируем эти рассуждения на примере. Поставим себе целью найти интеграл уравнения

$$\Delta u = 4\frac{\partial u}{\partial t},$$

который удовлетворяет краевому условию

$$u = e^{-0,5t} \cos x \cos y$$

на эллипсе

$$4x^2 + 16y^2 = 1$$

и начальному условию

$$u(x, y, 0) = \cos x \cos y.$$

При этих условиях, очевидно, будем иметь

$$u(x, y, t) = e^{-0,5t} \cos x \cos y,$$

что позволит сравнить приближенные значения u с точными.

По соображениям симметрии нам достаточно рассмотреть таблицу значений $u(x, y, t)$ для одной четверти эллипса в узлах $4-7$ и $12-16$ (фиг. 3), соответствующих приращениям времени δ, 2δ, ...

Пусть $h = 0{,}1$. Величина шага по t определяется по формуле

$$\delta = \frac{a^2 h^2}{4} = 0{,}01.$$

При таком выборе δ для вычисления u слой за слоем можно воспользоваться формулами (13) и (14).

Для начала вычисления необходимо знать значения u на самом нижнем слое, т. е. необходимо знать распределение температуры при $t = 0$ и, кроме того, иметь таблицу значений u в точках с отметками I — VI (фиг. 3) при $t = 0{,}01$; $0{,}02$, ...

Значение функции в точке (x, y) самого нижнего слоя равно $\cos x \cos y$. Значения u в точках I — VI i-го слоя могут быть вычислены с помощью равенства

$$u(x, y, i\delta) = e^{-0{,}005i} \cos x \cos y.$$

На стр. 70—71 приводится таблица значений искомой функции для t от $t = 0{,}01$ до $t = 0{,}1$.

Математический институт
Грузинского филиала Академии Наук СССР,
Тбилиси

Поступило
5. XI. 1940

ЛИТЕРАТУРА

[1] Микеладзе Ш. Е., Численные методы интегрирования дифференциальных уравнений с частными производными, изд. Акад. Наук СССР, 1936.

[2] Collatz L., Bemerkungen zur Fehlerabschätzung für das Differenzenverfahren bei partiellen Differentialgleichungen, Zeitschr. für angew. Math. und Mech., 13 (1933).

[3] Gerschgorin S., Fehlerabschätzung für das Differenzenverfahren zur Lösung partieller Differentialgleichungen, Zeitschr. für angew. Math. und Mech., 10 (1930).

[4] Микеладзе Ш. Е., О численном решении дифференциальных уравнений Лапласа и Пуассона, Изв. Акад. Наук СССР, серия матем. (1938), № 2.

SCH. MIKELADZE. NUMERISCHE INTEGRATION DER GLEICHUNGEN VOM ELLIPTISCHEN UND PARABOLISCHEN TYPUS

ZUSAMMENFASSUNG

Es liege ein Gebiet vor, das durch eine geschlossene Kurve γ begrenzt wird. Über diesem Gebiet ist ein quadratisches Netz der Seitenlänge h ausgebreitet (vgl. Fig. 1).

Durch Verbindung derjeniger Gitterpunkte, welche von den Randpunkten des Gebiets horizontal oder vertikal um $\leqslant h$ abstehen, bilden wir eine geschlossene gebrochene Linie γ', so dass zwischen γ und γ' keine Gitterpunkte liegen.

Um die Differentialgleichung (1) aufzulösen, setzen wir die Differenzengleichung (2) auf, welche die Gl. (1) in dem Punkte mit dem Index k ersetzt. Hierzu fügen wir die Differenzengleichung (4) hinzu, welche (1) in einem Punkte des Linienzuges γ' mit dem Index ν ersetzt.

Formeln der Gestalt (4) erhält man durch eine geeignete Linearkombination der u_m-Werte in denjenigen Gitterpunkten, die z. B. den Punkt ν umgeben.

Lässt man die Restglieder weg, so ermöglichen es (2) und (4), $p+q$ lineare Gleichungen in ebensovielen Unbekannten $u(x, y)$ aufzusetzen,

die p Gitterpunkten auf γ' und q Gitterpunkten innerhalb γ' entsprechen. Das erhaltene Gleichungssystem wird zweckmässig mit der Methode der sukzessiven Näherungen gelöst.

Analoge Resultate gelten auch für. die Gleichung $\Delta u = \varphi(x, y, z)$.

Schliesslich werden Formeln der Gestalt (13) und (14) hergeleitet, mit deren Hilfe man das Integral der Wärmeleitungsgleichung schichtweise für die innerhalb γ liegenden Punkte berechnen kann.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 5 (1941), 75—84 Série mathématique

В. С. ПУГАЧЕВ

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ИНТЕГРАЛОВ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ПАРАМЕТР

(*Представлено академиком* **Н. Е. Кочиным**)

В статье доказываются три теоремы об асимптотических представлениях интегралов обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, содержащих параметр. Первая теорема является обобщением известных результатов Birkhoff'a; остальные теоремы дают обобщение результатов Fowler'a и Lock'a. В итоге автор получил новый тип асимптотических представлений интегралов однородных и неоднородных уравнений, которые могут быть использованы как для различных теоретических исследований, так и для приближенного интегрирования широкого класса линейных дифференциальных уравнений.

Условимся обозначать матрицы большими буквами, а их элементы соответствующими малыми буквами с индексами. Символом H будем обозначать любую матрицу, элементы которой суть функции независимого переменного x и параметра α, стремящиеся к нулю равномерно относительно x при $\alpha \to \infty$ по пути, лежащему в некоторой области D.

Как известно, система линейных дифференциальных уравнений может быть записана в матричной форме

$$\frac{dY}{dx} = YP + \Pi. \tag{1}$$

В частном случае, при $\Pi \equiv 0$ получаем однородную систему.

Мы будем рассматривать случай, когда матрицы P и Π являются однозначными функциями действительного независимого переменного x и комплексного параметра α, допускающими представление

$$P(x, \alpha) = \alpha \left\{ \sum_{k=0}^{m} P^{(k)}(x)\, \alpha^{-k} + H\, \alpha^{-m} \right\} \quad (m \geqslant 1), \tag{2}$$

$$\Pi(x, \alpha) = \alpha^{r} Z(x, \alpha) \left\{ \sum_{k=0}^{m} \Pi^{(k)}(x)\, \alpha^{-k} + H\, \alpha^{-m} \right\} \quad (m \geqslant 1), \tag{3}$$

где $Z(x, \alpha)$ — интеграл однородной линейной системы рассматриваемого типа

$$\frac{dZ}{dx} = ZQ(x, \alpha), \tag{4}$$

а $P^{(k)}(x)$ и $\Pi^{(k)}(x)$ $(k = 0, 1, \ldots, m)$ — ограниченные функции на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$.

Кроме того, мы будем предполагать, что характеристические числа $\lambda_1(x), \ldots, \lambda_n(x)$ матрицы $P^{(0)}(x)$ различны при любом x на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ и удовлетворяют неравенствам *

$$R(\alpha\lambda_i) \geqslant R(\alpha\lambda_j) \text{ при } i < j,\ \alpha \subset D,\ a \leqslant x \leqslant b. \tag{5}$$

Для систем этого класса имеют место следующие три теоремы:

ТЕОРЕМА 1. *Если матрицы* $P^{(k)}(x)$ *и* $Q^{(k)}(x)$ $(k=0, 1, \ldots, m)$ *имеют производные до порядка* $m-k+1$ *включительно, а матрицы* $P^{(0)}(x)$ *и* $Q^{(0)}(x)$, *кроме того, подобны, то существует интеграл однородной системы*

$$\frac{dY}{dx} = YP(x, \alpha), \tag{6}$$

допускающий представление

$$Y(x, \alpha) = Z(x, \alpha)\left\{\sum_{k=0}^{m-1} Y^{(k)}(x)\,\alpha^{-k} + H\,\alpha^{1-m}\right\}, \tag{7}$$

где $Z(x, \alpha)$ — *какой-нибудь интеграл системы* (4). *Матрицы* $Y^{(k)}(x)$ *определяются формальной подстановкой выражения* (7) *в уравнение* (6) *и сравнением коэффициентов при* $\alpha^{\varkappa}$ $(\varkappa = 1, 0, -1, \ldots, 1-m)$ *в правой и левой частях уравнения.*

ТЕОРЕМА 2. *Если характеристические числа* $\mu_1(x), \ldots, \mu_n(x)$ *матрицы* $Q^{(0)}(x)$ (*удовлетворяющие неравенствам* (5)) *таковы, что величины* $R[\alpha(\lambda_i - \mu_j)]$ *не меняют знака в области* ** $\alpha \subset D$, $a \leqslant x \leqslant b$, *разности* $\lambda_i - \mu_j$ *нигде в этой области не обращаются в нуль и матрицы* $P^{(k)}(x)$, $Q^{(k)}(x)$ *и* $\Pi^{(k)}(x)$ $(k=0, 1, \ldots, m)$ *имеют производные до порядка* $m-k+1$ *включительно, то существует интеграл уравнения* (1), *допускающий представление*

$$Y(x, \alpha) = \alpha^{r-1} Z(x, \alpha)\left\{\sum_{k=0}^{m-1} Y^{(k)}(x)\,\alpha^{-k} + H\,\alpha^{1-m}\right\}. \tag{8}$$

Матрицы $Y^{(k)}(x)$ *однозначно определяются формальной подстановкой выражения* (8) *в уравнение* (1) *и сравнением коэффициентов при* $\alpha^{\varkappa}$ $(\varkappa = r, r-1, \ldots, r-m)$ *в правой и левой частях уравнения.*

ТЕОРЕМА 3. *Если характеристические числа матрицы* $Q^{(0)}(x)$ *таковы, что величины* $R[\alpha(\lambda_i - \mu_j)]$ *не меняют знака в области* *** $a \leqslant x \leqslant b$, $\alpha \subset D$; *некоторые разности* $\lambda_i - \mu_j$ *тождественно равны нулю, а остальные нигде не равны нулю на отрезке* $a \leqslant x \leqslant b$; *матрицы* $P^{(k)}(x)$ - $Q^{(k)}(x)$ $(k=0, 1, \ldots, m)$ *имеют производные до порядка* $m-k+1$ *включительно, а матрицы* $\Pi^{(k)}(x)$ $(k=0, 1, \ldots, m-1)$ *имеют производные*

---

* Можно сделать более общее предположение, что при $\alpha \subset D$, $a \leqslant x \leqslant b$ некоторые из разностей $R(\alpha\lambda_i) - R(\alpha\lambda_j)$ ограничены снизу, а остальные ограничены сверху. Это не внесет никаких изменений в доказательства.

** Не внося изменений в доказательства, можно заменить это условие более общим условием ограниченности снизу некоторых из величин $R[\alpha(\lambda_i - \mu_j)]$ и ограниченности сверху остальных величин $R[\alpha(\lambda_i - \mu_j)]$.

*** См. сноску к теореме 2.

до порядка $m-k$ включительно, то существует интеграл уравнения (1), *допускающий представление*

$$Y(x,\alpha)=\alpha^r Z(x,\alpha)\left\{\sum_{k=0}^{m-1} Y^{(k)}(x)\,\alpha^{-k}+H\,\alpha^{1-m}\right\}. \qquad (9)$$

Матрицы $Y^{(k)}(x)$ определяются формальной подстановкой выражения (9) *в уравнение* (1) *и сравнением коэффициентов при $\alpha^{\varkappa}$ ($\varkappa=r+1,\ r,\dots$ $\dots,\ r-m+1$).*

Для доказательства этих теорем нам придется пользоваться следующей леммой.

ЛЕММА. *Если матрица $P^{(0)}(x)$ имеет вторую производную, а $P^{(1)}(x)$ — первую, то существует интеграл однородной системы* (6), *который может быть представлен в виде*

$$Y(x,\alpha)=e^{\alpha\Omega_0(x,a)}F(x,\alpha), \qquad (10)$$

где $F(x,\alpha)$ остается при $\alpha\to\infty$ по области D, равномерно ограниченной на отрезке $a\leqslant x\leqslant b$, а $\Omega_0(x,a)$—диагональная матрица, определяемая равенством

$$\Omega_0(x,\xi)=\left[\int_\xi^x \lambda_1(x)\,dx\ ,\ \dots,\ \int_\xi^x \lambda_n(x)\,dx\right]. \qquad (11)$$

Эта лемма была впервые доказана Fowler'ом и Lock'ом [1] для случая, когда $P(x,\alpha)$ допускает представление (2) при любом m и все матрицы $P^{(k)}(x)$ $(k=0,1,\dots)$ неограниченно дифференцируемы. Впрочем для указанного случая эта лемма является непосредственным следствием более ранних результатов Birkhoff'a [2].

Доказательство. Подстановкой

$$Y=U\{S_0(x)+S_1(x)\,\alpha^{-1}\} \qquad (12)$$

можно привести систему (6) к виду

$$\frac{dU}{dx}=U(\Lambda+H), \qquad (13)$$

где Λ — диагональная матрица вида

$$\Lambda=[\lambda_1(x)\ ,\ \dots,\ \lambda_n(x)]\,\alpha+[\nu_1(x)\ ,\ \dots,\ \nu_n(x)]. \qquad (14)$$

Вводя обозначения

$$\left.\begin{aligned}\Omega_1(x,\xi)&=\left[\int_\xi^x \nu_1(x)\,dx\ ,\ \dots,\ \int_\xi^x \nu_n(x)\,dx\right],\\ \Omega(x,\xi)&=\alpha\Omega_0(x,\xi)+\Omega_1(x,\xi)=[\omega_1(x,\xi)\ ,\ \dots,\ \omega_n(x,\xi)]\end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

и применяя метод последовательных приближений, получим

$$\left.\begin{aligned}&U^{(0)}=e^{\Omega(x,a)},\\ &U^{(\nu)}=C^{(\nu)}e^{\Omega(x,\ )}+\int_a^x U^{(\nu-1)}H(\xi,\alpha)\,e^{\Omega(x,\xi)}\,d\xi \qquad (\nu=1,\ \dots),\end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

где $C^{(\nu)}$ — произвольные постоянные матрицы *. Полагая

$$\left.\begin{aligned} & c_{ii}^{(\nu)}=1;\ c_{ij}^{(\nu)}=0 \ \text{при}\ i<j, \left(\begin{matrix} i,j=1,\ldots,n \\ \nu=1,\ldots \end{matrix}\right), \\ & c_{ij}^{(\nu)}=-\int_a^b \sum_{k=1}^n u_{ik}^{(\nu-1)}(\xi)\, h_{kj}(\xi,\alpha)\, e^{-\omega_j(\xi,\alpha)}\, d\xi \ \text{при}\ i>j, \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

и принимая во внимание (5), получим следующую оценку для матриц $U^{(\nu)}$:

$$|\, e^{-\Omega(x,\alpha)}(U^{(\nu)}-U^{(\nu-1)})\,| \leqslant \|\, m(b-a)\,[nm(b-a)]^{\nu}\,\|, \tag{18}$$

где m — некоторая функция параметра α, стремящаяся к нулю при $\alpha \to \infty$ по D. Из неравенств (18) немедленно следует сходимость последовательности матриц $e^{-\Omega(x,\alpha)}U^{(\nu)}$ $(\nu=0,1,\ldots)$ при достаточно большом $|\alpha|$ и ограниченность предела этой последовательности.

Доказательство теоремы 1. Полагая в уравнении (6)

$$Y = Z\sum_{\nu=0}^{m} Y^{(\nu)}\alpha^{-\nu}, \tag{19}$$

получим

$$\sum_{\nu=0}^{m-1}\frac{dY^{(\nu)}}{dx}\alpha^{-\nu} = \sum_{\nu=-1}^{m-1}\alpha^{-\nu}\sum_{k=0}^{\nu+1}\left(Y^{(k)}P^{(\nu-k+1)} - Q^{(\nu-k+1)}Y^{(k)}\right) + H\alpha^{1-m}. \tag{20}$$

Обозначим через S и T соответственно матрицы, приводящие матрицы $P^{(0)}$ и $Q^{(0)}$ к диагональному виду. Умножая (20) слева на T, а справа на S^{-1}, полагая

$$\left.\begin{aligned} & SP^{(0)}S^{-1} = TQ^{(0)}T^{-1} = \Lambda_0, \\ & \Lambda^{(1)} = SP^{(1)}S^{-1} - S'S^{-1},\quad M^{(1)} = TQ^{(1)}T^{-1} - T'T^{-1}, \\ & \Lambda^{(\nu)} = SP^{(\nu)}S^{-1},\quad M^{(\nu)} = TQ^{(\nu)}T^{-1} \qquad (\nu=2,\ldots,m), \\ & U^{(\nu)} = TY^{(\nu)}S^{-1} \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

и сравнивая коэффициенты при $\alpha^{\varkappa}$ $(\varkappa = 1, 0, -1, \ldots, 1-m)$ в правой и левой частях уравнения, получим

$$\left.\begin{aligned} & 0 = U^{(0)}\Lambda_0 - \Lambda_0 U^{(0)}, \\ & \frac{dU^{(\nu)}}{dx} = U^{(\nu+1)}\Lambda_0 - \Lambda_0 U^{(\nu+1)} + \sum_{k=0}^{\nu}\left(U^{(k)}\Lambda^{(\nu-k+1)} - M^{(\nu-k+1)}U^{(k)}\right) \\ & (\nu = 0, 1, \ldots, m-1). \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Отсюда

$$u_{ij}^{(\nu+1)} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{s=0}^{\nu} D_{ijk}^{(\nu-s+1)} u_{kk}^{(s)}, \quad \text{если}\ i \neq j; \tag{23}$$

$$\frac{du_{ii}^{(\nu)}}{dx} = (\lambda_{ii}^{(1)} - \mu_{ii}^{(1)})\, u_{ii}^{(\nu)} + \sum_{k=0}^{\nu-1}(\lambda_{ii}^{(\nu-k+1)} - \mu_{ii}^{(\nu-k+1)})\, u_{ii}^{(k)} +$$

$$+\sum_{h=1}^{n}\sum_{s=0}^{\nu-1}\sum_{k=s+1}^{\nu}\sum_{r=1}^{n}{}^{i}\left(\lambda_{ri}^{(\nu-k+1)} D_{irh}^{(k-s)} - \mu_{ir}^{(\nu-k+1)} D_{rih}^{(k-s)}\right) u_{hh}^{(s)}, \tag{24}$$

---

* Для того чтобы получить формулу (16), можно воспользоваться методом вариации произвольных постоянных. К матричным уравнениям этот метод был, повидимому, впервые применен Toyoda ([3]).

где $D_{irh}^{(s)}$ — символические множители, определяемые рекуррентной формулой

$$\left.\begin{aligned} & D_{ijh}^{(0)}=0, \\ & D_{jh}^{(\nu+1)}=\frac{1}{\lambda_i-\lambda_j}\left\{\sum_{k=1}^{\nu}\left(\sum_{r=1}^{n}{}^{'i}\lambda_{rj}^{(\nu-k+1)}D_{irh}^{(k)}-\sum_{r=1}^{n}{}^{'j}\mu_{ir}^{(\nu-k+1)}D_{rjh}^{(k)}\right)-\right. \\ & \qquad\qquad \left.-\frac{d}{dx}D_{ijh}^{(\nu)}\right\}+I_{ijh}^{(\nu+1)}, \\ & I_{ijh}^{(0)}=0,\ I_{iji}^{(\nu)}=\frac{\lambda_{ij}^{(\nu)}}{\lambda_i-\lambda_j},\ I_{ijj}^{(\nu)}=-\frac{\mu_{ij}^{(\nu)}}{\lambda_i-\lambda_j},\ I_{ijh}^{(\nu)}=0 \text{ при } h\neq i,\ j, \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

а символ $\sum_k{}^{'i}$ означает суммирование по всем значениям k в указанных пределах, кроме $k=i$.

Матрицы $U^{(\nu)}$ $(\nu=1,\ \ldots,\ m-1)$ и все элементы матрицы $U^{(m)}$, кроме диагональных, однозначно определяются формулами (23) и уравнениями (24). Диагональные элементы матрицы $U^{(m)}$ остаются произвольными, ограниченными на $[a,\ b]$ функциями.

Из (20) видно, что функция

$$\overset{*}{Y}=Z\sum_{\nu=0}^{m}Y^{(\nu)}\alpha^{-\nu} \tag{26}$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\overset{*}{Y}}{dx}=\overset{*}{Y}P+\alpha^{1-m}ZH. \tag{27}$$

Полагая

$$Y=Z\left\{\sum_{\nu=0}^{m}Y^{(\nu)}\alpha^{-\nu}+K\alpha^{1-m}\right\}, \tag{28}$$

получим для матрицы K уравнение

$$\frac{d}{dx}(ZK)=ZKP-ZH, \tag{29}$$

откуда

$$K=Z^{-1}(x)\,CY(x)-\int_a^x Z^{-1}(x)\,Z(\xi)\,H(\xi)\,Y^{-1}(\xi)\,Y(x)\,d\xi, \tag{30}$$

где C — произвольная постоянная, а $Y(x)$ — произвольный интеграл уравнения (6). Пользуясь доказанной леммой, получим для матрицы K выражение

$$K=F\left\{e^{-\alpha\Omega_0(x,a)}\,Ce^{\alpha\Omega_0(x,a)}-\int_a^x e^{\alpha\Omega_0(\xi,x)}\,H(\xi)\,e^{-\alpha\Omega_0(\xi,x)}\,d\xi\right\}G, \tag{31}$$

где F и G — ограниченные матрицы в области $a\leqslant x\leqslant b$, $\alpha\subset D$.

Полагая теперь

$$\left.\begin{aligned} & c_{ij}=0 \text{ при } j\geqslant i, \\ & c_{ij}=\int_a^b h_{ij}(\xi)\,e^{-\alpha\int_a^{\xi}(\lambda_j-\lambda_i)\,dx}\,d\xi \text{ при } j<i, \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

убеждаемся в справедливости теоремы.

Доказательство теоремы 2. Полагая в уравнении (1)

$$Y=\alpha^{r-1} Z \sum_{\nu=0}^{m} Y^{(\nu)} \alpha^{-\nu}, \tag{33}$$

получим

$$\sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{dY^{(\nu)}}{dx} \alpha^{-\nu} = \sum_{\nu=-1}^{m-1} \alpha^{-\nu} \left\{ \sum_{k=0}^{\nu+1} (Y^{(k)} P^{(\nu-k+1)} - Q^{(\nu-k+1)} Y^{(k)}) + \Pi^{(\nu+1)} \right\} + H\alpha^{1-m}. \tag{34}$$

Применяя преобразование, которым мы пользовались при доказательстве теоремы 1, и сравнивая коэффициенты при $\alpha^{\varkappa}$ ($\varkappa=1, 0, \ldots, 1-m$), получим

$$\frac{dU^{(\nu)}}{dx} = U^{(\nu+1)} \Lambda_0 - M_0 U^{(\nu+1)} + \sum_{k=0}^{\nu} (U^{(k)} \Lambda^{(\nu-k+1)} - M^{(\nu-k+1)} U^{(k)}) + \Sigma^{(\nu+1)} \tag{35}$$

$$(\nu = -1, 0, \ldots, m-1),$$

где

$$\left.\begin{aligned} \Lambda_0 &= SP^{(0)} S^{-1}, \\ M_0 &= TQ^{(0)} T^{-1}, \\ \Sigma^{(k)} &= T\Pi^{(k)} S^{-1} \qquad (k=0, 1, \ldots), \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

а $\Lambda^{(\nu)}$, $M^{(\nu)}$ ($\nu=1, 2, \ldots$) и $U^{(\nu)}$ ($\nu=0, 1, \ldots$) определяются формулами (21).

Из (35) находим

$$u_{ij}^{(\nu+1)} = \frac{1}{\mu_i - \lambda_j} \left\{ \sum_{k=0}^{\nu} \sum_{r=1}^{n} (\lambda_{rj}^{(\nu-k+1)} u_{ir}^{(k)} - \mu_{ir}^{(\nu-k+1)} u_{rj}^{(k)}) - \frac{du_{ij}^{(\nu)}}{dx} + \sigma_{ij}^{(\nu+1)} \right\} \tag{37}$$

$$(\nu = -1, 0, \ldots, m-1).$$

Отсюда видно, что матрицы $U^{(\nu)}$ ($\nu=0, \ldots, m$) определяются однозначно.

Из (34) видно, что функция

$$\overset{*}{Y} = \alpha^{r-1} Z \sum_{\nu=0}^{m} Y^{(\nu)} \alpha^{-\nu} \tag{38}$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\overset{*}{Y}}{dx} = \overset{*}{Y} P + \Pi + \alpha^{r-m} ZH. \tag{39}$$

Следовательно, полагая

$$Y = \alpha^{r-1} Z \left\{ \sum_{\nu=0}^{m} Y^{(\nu)} \alpha^{-\nu} + K\alpha^{1-m} \right\}, \tag{40}$$

получим для матрицы K формулу (30).

Вводя обозначение

$$X_0(x, \xi) = \int_{\xi}^{x} M_0 \, d\xi = \left[\int_{\xi}^{x} \mu_1(\xi) \, d\xi, \ldots, \int_{\xi}^{x} \mu_n(\xi) \, d\xi \right] \tag{41}$$

и применяя лемму, получим

$$K = F\left\{e^{-\alpha X_0(x,a)}\, C e^{\alpha \Omega_0(x,a)} - \int_a^x e^{\alpha X_0(\xi,x)} H(\xi)\, e^{\sigma \Omega_0(x,\xi)}\, d\xi\right\} G, \tag{42}$$

где F и G — ограниченные матрицы. Полагая

$$\left.\begin{aligned} c_{ij} &= 0, \quad \text{если } R[\alpha(\lambda_j - \mu_i)] \leqslant 0, \\ c_{ij} &= \int_a^b h_{ij}(\xi)\, e^{-\alpha \int_a^\xi (\lambda_j - \mu_i)\, d\xi}\, d\xi, \quad \text{если } R[\alpha(\lambda_j - \mu_i)] > 0, \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

убедимся в справедливости теоремы 2.

Доказательство теоремы 3. Полагая в уравнении (1)

$$Y = \alpha^r Z \sum_{\nu=0}^{m} Y^{(\nu)} \alpha^{-\nu}, \tag{44}$$

получим

$$\sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{dY^{(\nu)}}{dx} \alpha^{-\nu} = \sum_{\nu=-1}^{m-1} \alpha^{-\nu} \left\{\sum_{k=0}^{\nu+1} (Y^{(k)} P^{(\nu-k+1)} - Q^{(\nu-k+1)}(Y^{(k)}) + \Pi^{(\nu)}\right\} + H\alpha^{1-m}.$$

Далее, так же как при доказательстве теоремы 2, получим

$$\frac{dU^{(\nu)}}{dx} = U^{(\nu+1)} \Lambda_0 - M_0 U^{(\nu+1)} + \sum_{k=0}^{\nu} (U^{(k)} \Lambda^{(\nu-k+1)} - M^{(\nu-k+1)} U^{(k)}) + \Sigma^{(\nu)}$$

$$(\nu = -1, \ldots, m-1).$$

Отсюда находим

$$\left.\begin{aligned} &\frac{du_{ij}^{(\nu)}}{dx} = (\lambda_{jj}^{(1)} - \mu_{ii}^{(1)})\, u_{ij}^{(\nu)} + \sum_{k=0}^{\nu-1} \sum_{r=1}^{n} (\lambda_{rj}^{(\nu-k+1)} u_{ir}^{(k)} - \mu_{ir}^{(\nu-k+1)} u_{rj}^{(k)}) + \sigma_{ij}^{(\nu)}, \\ &\text{если } \mu_i \equiv \lambda_j; \\ &\qquad\qquad (\nu = -1, 0, \ldots, m-1) \\ &u_{ij}^{(\nu+1)} = \frac{1}{\mu_i - \lambda_j} \left\{\sum_{k=0}^{\nu} \sum_{r=1}^{n} (\lambda_{rj}^{(\nu-k+1)} u_{ir}^{(k)} - \mu_{ir}^{(\nu-k+1)} u_{rj}^{(k)}) - \frac{du_{ij}^{(\nu)}}{dx} + \sigma_{ij}^{(\nu)}\right\}, \\ &\text{если } \mu_i \not\equiv \lambda_j. \end{aligned}\right\}$$

Нетрудно видеть, что матрицы $U^{(\nu)}$ $(\nu = 0, 1, \ldots, m-1)$ определяются однозначно. Что же касается матрицы $U^{(m)}$, то ее элементы $u_{ij}^{(m)}$ определяются однозначно при $\mu_i \not\equiv \lambda_j$ и остаются произвольными, ограниченными на $[a, b]$ функциями при $\mu_i \equiv \lambda_j$.

Рассуждая теперь так же, как при доказательстве теорем 1 и 2, убедимся в справедливости теоремы 3.

Очевидно, что известные результаты Birkhoff'а ([2]) и Fowler'а ([1]) являются частным случаем доказанных теорем при $Q = \alpha[\mu_1, \ldots, \mu_n]$.

Примечание 1. Доказанные теоремы и лемма справедливы в том случае, когда областью изменения x является произвольный спрямляемый контур L, не имеющий самопересечений, только требование неизменяемости знака величин $R[\alpha(\lambda_i - \lambda_j)]$, $R[\alpha(\mu_i - \mu_j)]$ и $R[\alpha(\lambda_i - \mu_j)]$ должно быть заменено требованием неизменяемости знака величин $R\left[\alpha \frac{\lambda_i - \lambda_j}{f'(x)}\right]$, $R\left[\alpha \frac{\mu_i - \mu_j}{f'(x)}\right]$ и $R\left[\alpha \frac{\lambda_i - \mu_j}{f'(x)}\right]$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ в области $x \subset L$, $\alpha \subset D$, где $f(x)$ — функция, реализующая такое конформное

отображение произвольной односвязной области, ограниченной контуром L и другим спрямляемым контуром L_1, при котором контур L переходит в отрезок действительной оси $0 \leqslant t \leqslant t_0$. Действительно, замена переменного $t = f(x)$ в формулах (11) и (41) дает*

$$\Omega_0(x, \xi) = \int_{\tau}^{t} \frac{\Lambda_0}{f'(x)} dt, \quad X_0(x, \xi) = \int_{\tau}^{t} \frac{M_0}{f'(x)} dt,$$

откуда непосредственно следует справедливость высказанного утверждения.

Примечание 2. Предыдущие теоремы и лемма справедливы и в том случае, когда P, Q и Π являются аналитическими функциями комплексного переменного x, голоморфными в некоторой области B, только требование неизменяемости знака величин $R[\alpha(\lambda_i - \lambda_j)]$, $R[\alpha(\mu_i - \mu_j)]$ и $R[\alpha(\lambda_i - \mu_j)]$ должно быть заменено требованием неизменяемости знака величин $R\left[\alpha(\lambda_i - \lambda_j)\frac{f}{f'}\right]$, $R\left[\alpha(\mu_i - \mu_j)\frac{f}{f'}\right]$ и $R\left[\alpha(\lambda_i - \mu_j)\frac{f}{f'}\right]$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ в области $x \subset B$, $\alpha \subset D$, где $f(x)$ — функция, реализующая конформное отображение области B на произвольный параллелограмм с вершиной в начале координат.

Само собой разумеется, что оговорки относительно существования соответствующего количества производных матриц P, Q и Π излишни.

Действительно, если B есть параллелограмм с вершиной в начале координат, то теорема и лемма будут очевидно справедливы, если величины $R[\alpha(\lambda_i - \lambda_j)x]$, $R[\alpha(\mu_i - \mu_j)x]$ и $R[\alpha(\lambda_i - \mu_j)x]$ не меняют знака в области $x \subset B$, $\alpha \subset D$, так как интегрирование в формулах (16), (17), (31), (32), (42) и (43) всегда можно производить вдоль ломаной, образованной отрезками, соединяющими точку x с началом координат и противоположной вершиной параллелограмма. Замена переменного $t = f(x)$ приводит к этому случаю при произвольной области B.

Военная Воздушная ордена Ленина
Академия им. Н. Е. Жуковского

Поступило
23.XI. 1940

ЛИТЕРАТУРА

[1] Fowler R. H. a. Lock C. N. H., Lond. Mat. Soc. Proc., (2) 20, XI—XII (1921).
[2] Birkhoff G. D., Trans. Amer. Mat. Soc., 9 (1908).
[3] Toyoda K., Sc. Rep. Tôhoku Univ., 24.

* Производная вдоль контура $f'(x)$, как известно, существует почти всюду на контуре $L + L_1$. Интегралы в формулах (48) следует понимать в смысле Лебега.

W. POUGATCHEFF. SUR LES EXPRESSIONS ASYMPTOTIQUES POUR LES INTÉGRALES DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES CONTENANT UN PARAMÈTRE

RÉSUMÉ

Considérons un système d'équations différentielles linéaires présentée en forme de matrices (1).

Convenons de désigner par la lettre H une matrice quelconque dont les éléments sont des fonctions de la variable réelle x et d'un paramètre α, qui tendent vers zéro uniformément par rapport à x quand $\alpha \to \infty$ en suivant un chemin situé dans un certain domaine D.

Soient P et Π dans l'équation (1) des fonctions uniformes de x et α admettant pour $\alpha \subset D$ la représentation (2) et (3) où $Z(x, \alpha)$ est l'intégrale d'une équation en matrices homogène du type considéré (4).

Supposons d'abord que le domaine de la variation de x est le segment $a \leqslant x \leqslant b$. Nous allons considérer le cas où les nombres caractéristiques $\lambda_1(x), \ldots, \lambda_n(x)$ de la matrice $P^{(0)}(x)$ sont différents quel que soit x sur le segment $a \leqslant x \leqslant b$ et qu'ils vérifient les inégalités (5) pour $a \leqslant x \leqslant b$, $\alpha \subset D$.

Pour les systèmes de ce type on a les trois théorèmes suivants:

THÉORÈME 1. *Si les matrices* $P^{(k)}(x)$ *et* $Q^{(k)}(x)$ $(k=0, 1, \ldots, m)$ *ont des dérivées jusqu'à l'ordre* $m-k+1$ *inclusivement et les matrices* $P^{(0)}(x)$ *et* $Q^{(0)}(x)$ *sont semblables, il existe une intégrale du système homogène* (6) *admettant la représentation* (7), *où* $Z(x, \alpha)$ *est une intégrale quelconque de l'équation* (4) *et les* $Y^{(k)}(x)$ *sont définis formellement en substituant* (7) *dans l'équation* (6) *et en comparant les coefficients de* $\alpha^{\varkappa}$ $(\varkappa=1, 0, -1, \ldots, 1-m)$ *dans les deux membres de l'équation.*

THÉORÈME 2. *Si les nombres caractéristiques* $\mu_1(x), \ldots, \mu_n(x)$ *de la matrice* $Q^{(0)}(x)$ *sont tels que les valeurs* $R[\alpha(\lambda_i-\mu_j)]$ *ne changent pas de signe dans le domaine* $a \leqslant x \leqslant b$, $\alpha \subset D$, *si les différences* $\lambda_i-\mu_j$ *ne s'annullent pas sur le segment* $a \leqslant x \leqslant b$ *et si les matrices* $P^{(k)}(x)$, $Q^{(k)}(x)$ *et* $\Pi^{(k)}(x)$ $(k=0, 1, \ldots, m)$ *possèdent des dérivées jusqu'à l'ordre* $m-k+1$ *inclusivement, il existe une intégrale de l'équation* (1) *admettant la représentation* (8) *où les* $Y^{(k)}(x)$ *sont définis formellement en substituant l'expression* (8) *dans l'équation* (1) *et en comparant les coefficients de* $\alpha^{\varkappa}$ $(\varkappa=r, r-1, \ldots, r-m)$ *dans les deux membres de l'équation.*

THÉORÈME 3. *Si les nombres caractéristiques de la matrice* $Q^{(0)}(x)$ *sont tels que les valeurs* $R[\alpha(\mu_i-\lambda_j)]$ *ne changent pas de signe dans le domaine* $a \leqslant x \leqslant b$, $\alpha \subset D$, *si quelques unes des différences* $\mu_i-\lambda_j$ *sont identiquement nulles et les autres ne s'annullent pas sur* $a \leqslant x \leqslant b$; *si les matrices* $P^{(k)}(x)$ *et* $Q^{(k)}(x)$ $(k=0, 1, \ldots, m)$ *ont des dérivées jusqu'à l'ordre* $m-k+1$ *unclusivement et les matrices* $\Pi^{(k)}(x)$ $(k=0, 1, \ldots, m-1)$ *ont des dérivées jusqu'à l'ordre* $m-k$ *inclusivement, il existe une intégrale du système* (1) *admettant la représentation* (9) *où les* $Y^{(k)}(x)$ *sont définies en substituant formellement l'expression* (9) *dans l'équation* (1) *et en comparant les coefficients de* $\alpha^{\varkappa}$ $(\varkappa=r+1, r, \ldots, r-m+1)$.

La démonstration de ces théorèmes est basée sur le lemme suivant:

LEMME. *Si la matrice* $P^{(1)}(x)$ *a la dérivée du premier ordre et la matrice* $P^{(0)}(x)$ *a les derivées du premier et du second ordres il existe une intégrale du système homogène* (6) *de la forme* (10) *où* $F(x, \alpha)$ *reste uniformément bornée dans le domaine* $a \leqslant x \leqslant b$, $\alpha \subset D$ *et* $\Omega_0(x, a)$ *est une matrice diagonale définie par la formule* (11).

Pour démontrer ce lemme nous réduisons au moyen de la substitution (12) l'équation (6) à la forme (13) où Λ est une matrice diagonale de la forme (14). En appliquant la méthode des approximations successives, nous obtiendrons la suite des matrices $U^{(\nu)}$ $(\nu=0, 1, \ldots)$ définies par

les formules (16), où $\Omega(x, a)$ est donnée par les formules (15). En choisissant les constantes arbitraires suivant les formules (17) on obtient l'inégalité (18), où $m = m(\alpha) \to 0$ quand $\alpha \to \infty$ dans le domaine D. Les inégalités (18) démontrent le lemme.

Pour démontrer le théorème 1 substituons formellement l'expression (19) dans l'équation (6). Soient S et T les matrices réduisans respectivement $P^{(0)}$ et $Q^{(0)}$ à la forme diagonale. Alors en comparant dans l'équation (20) les coefficients de α^{x} $(x = 1, 0, -1, \ldots, 1-m)$ et en utilisant les notations (21), nous aurons les équations (22). On en tire les équations (23) et (24), où $D_{ijh}^{(s)}$ sont des facteurs symboliques définis par la formule récurrente (25). En remarquant maintenant que la matrice (26) est une intégrale de l'équation (27) et en représentant l'intégrale de l'équation (6) dans la forme (28), nous aurons pour déterminer la matrice K l'équation (29). Cette équation peut être intégrée par la formule (30), où C est une constante arbitraire et $Y(x)$ est une intégrale arbitraire de l'équation (6). En s'appuyant sur le lemme démontré, nous aurons pour la matrice K l'expression (31), où F et G sont des matrices bornées dans le domaine $a \leqslant x \leqslant b$, $\alpha \subset D$. En choisissant maintenant les constantes arbitraires suivant les formules (32), nous voyons que le théorème est vrai.

Les théorèmes 2 et 3 se démontrent d'une manière analogue.

Remarquons qu'au lieu d'exiger que les signes de toutes les valeurs $R[\alpha(\lambda_i - \lambda_j)]$ et $R[\alpha(\mu_i - \lambda_j)]$ soient constants, on peut poser une condition beaucoup moins restrictive, à savoir que chacune des valeurs $R[\alpha(\lambda_i - \lambda_j)]$ et $R[\alpha(\mu_i - \lambda_j)]$ soit bornée ou bien supérieurement, ou bien inférieurement.

Tous les résultats que nous avons obtenu subsistent dans le cas où le domaine de la variation de x est un contour rectifiable arbitraire qui ne se coupe pas lui-même; seulement au lieu de supposer les valeurs $R[\alpha(\lambda_i - \lambda_j)]$ et $R[\alpha(\mu_i - \lambda_j)]$ bornées d'un côté, il faudra supposer que $R\left[\alpha \frac{\lambda_i - \lambda_j}{f'(x)}\right]$ et $R\left[\alpha \frac{\mu_i - \lambda_j}{f'(x)}\right]$ sont bornées d'un côté, où $f(x)$ est une fonction qui réalise le représentation conforme d'un certain domaine pour lequel le contour L est une partie de sa frontière, la représentation étant telle que le contour L a pour image le segment $0 \leqslant t \leqslant t_0$ de l'axe réel.

Les théorèmes et le lemme, démontrés subsistent dans le cas où P, Q et Π sont des fonctions analytiques de x holomorphes dans un certain domaine B. Il faut seulement remplacer l'hypothèse que $R[\alpha(\lambda_i - \lambda_j)]$ et $R[\alpha(\mu_i - \lambda_j)]$ sont bornées d'un côté, par l'hypothèse qu'il en est ainsi pour $R\left[\alpha(\lambda_i - \lambda_j)\frac{f}{f'}\right]$ et $R\left[\alpha(\mu_i - \lambda_j)\frac{f}{f'}\right]$, où f est la fonction réalisant la représentation conforme du domaine B sur un parallélogramme quelconque ayant un de ses sommet à l'origine des coordonnées.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADEMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 5 (1941), 85—94 Série mathématique

С. Н. БЕРНШТЕЙН

О «ДОВЕРИТЕЛЬНЫХ» ВЕРОЯТНОСТЯХ ФИШЕРА*

В статье зафиксированы и несколько развиты основные замечания, которые были сделаны автором на совещании по математической статистике в ноябре 1940 г.

1. Предлагаемая статья имеет целью зафиксировать и несколько развить основные замечания, которые были мною сделаны после докладов В. И. Романовского и А. Н. Колмогорова на совещании по математической статистике в ноябре 1940 г.

Для лучшего выяснения принципиальной стороны дела я постараюсь быть возможно более элементарным и рассмотрю случай, когда «доверительная» вероятность основана на одном наблюдении. Но все наши замечания применимы и в более сложных случаях.

Предположим, что производится одно наблюдение случайной величины x (давшее $x=x_1$), подчиненной непрерывному закону распределения вероятностей, зависящему от одного параметра a. А именно, положим, что вероятность неравенства

$$t_0 < x - a < t_1 \tag{1}$$

равна $\int\limits_{t_0}^{t_1} f(t)\,dt$ $\left(\text{например } f(t)=\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\right)$.

Согласно классической теории, только в том случае имеет смысл говорить о вероятности, что неизвестный параметр a (после того как наблюдение дало значение $x=x_1$) удовлетворяет неравенству

$$t_0 < x_1 - a < t_1, \tag{2}$$

* Быть может, не лишним будет указать, что подвергая здесь критике понятие «доверительности», я ни в какой мере не хотел бы умалить значение той части исследований Фишера и других английских статистиков, которая связана с задачей построения таких функций $F(x_0, \ldots, x_p, a_{p+1}, \ldots, a_k)$ от $p+1$ независимых величин $x_0, x_1, \ldots, x_p$ $(0 < p \leqslant k)$, подчиненных одному и тому же закону вероятностей $P(x, a_1, \ldots, a_k)$, законы которых при любых данных значениях a_i $(i=1, \ldots, k)$ не зависят от $a_1, \ldots, a_p$. Мои возражения относятся только к «доверительному» истолкованию результатов.

если и до наблюдения величину a можно было рассматривать как стохастическую. В частности, если $p(a)$ есть априорная плотность вероятности a, то априорная плотность вероятности x равна

$$P(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(a) f(x-a)\,da; \tag{3}$$

поэтому, согласно формуле Байеса, вероятность неравенства (2) равна

$$\Phi(x_1, t_0, t_1) = \frac{\int_{x_1-t_1}^{x_1-t_0} p(a) f(x_1-a)\,da}{\int_{-\infty}^{\infty} p(a) f(x_1-a)\,da} = \frac{1}{P(x_1)} \int_{t_0}^{t_1} p(x_1-t) f(t)\,dt. \tag{4}$$

Формула (4) дает, таким образом, вероятность неравенства (2), каков бы ни был рассматриваемый нами промежуток (x_1-t_1, x_1-t_0). К сожалению, обычно наши сведения о функции $p(a)$ весьма неполны, а потому и формула (4) дает значение $\Phi(x_1, t_0, t_1)$ лишь приближенно, причем точность этого приближения зависит от степени точности наших знаний о функции $p(a)$.

2. Это неудобство, соответствующее существу проблемы, явилось причиной того, что английские статистики, во главе с Фишером, сочли нужным отказаться от формулы Байеса и ввести некоторое новое понятие или, вернее, некоторое новое слово «доверительность».

Рассматривается некоторая пара значений t_0, t_1 таких, что $\int_{t_0}^{t_1} f(t)\,dt = 1 - \alpha(t_0, t_1)$ весьма близка к единице (например $\alpha(t_0, t_1) = 0{,}05$); они обладают следовательно свойством, что вероятность неравенства (1) отличается от единицы на данную малую величину $\alpha(t_0, t_1)$, и после того как наблюдение дало $x = x_1$, отрезок (x_1-t_1, x_1-t_0) называется «доверительной» областью величины a, соответствующей «доверительности» $1-\alpha(t_0, t_1)$.

Против введения нового термина «доверительность» можно было бы не возражать, если бы в это слово не вкладывалось содержание, отличное от того, которое принято при его определении, и кроме того, принципиально противоречащее первоначальному определению.

Действительно, Фишер и его последователи считают, после того как x получило значение x_1, величину

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t) = 1 - \alpha(t_0, t_1)$$

доверительной вероятностью (доверительностью) того, что a находится в промежутке (x_1-t_1, x_1-t_0). Но так как принципиально t_0, t_1 могут

получать любые значения, то «доверительная» вероятность удовлетворяет всем аксиомам, характеризующим классическое понятие вероятности, и к ней применимы все теоремы теории вероятностей, а поэтому при каком-то выборе функции $p(a)$ в формуле (4) «доверительная» вероятность должна совпадать с $\Phi(x_1, t_0, t_1)$, т. е. мы имели бы

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t)\,dt = \frac{1}{P(x_1)} \int_{t_0}^{t_1} p(x_1 - t) f(t)\,dt \qquad (\bar{4})$$

при любых значениях x_1, t_0, t_1. Отсюда следовало бы, что при любых значениях t_1 и x_1

$$f(t_1) = \frac{p(x_1 - t_1) f(t_1)}{P(x_1)},$$

т. е. $p(a) = P(x)$ должно быть постоянным на всей действительной оси, что невозможно (так как равномерное распределение вероятностей на всей действительной оси невозможно). Кроме того нетрудно видеть, что равенство $(\bar{4})$ ведет к тому же противоречию, если мы допустим его справедливость только при одном x_1 для данного t_0 и любого $t_1 > t_0$.

Нет надобности доказывать, что если доверительная область $(x_1 - t_1, x_1 - t_0)$ окажется частью области, где нахождение a заведомо невозможно, то $\Phi(x_1, t_0, t_1) = 0$; если например известно, что $|a| < 3$, то ни один здравомыслящий статистик не станет пользоваться доверительной вероятностью $\int_{-2}^{2} f(t)\,dt$ для промежутка $-2 < 5 - a < 2$, если одно наблюдение дало случайно $x_1 = 5$.

3. Равенство $(\bar{4})$ может быть п р и б л и ж е н н о правильным при некоторых более или менее определенных допущениях относительно априорной вероятности $p(a)$, означающих, по существу, что «доверительная область» является частью достаточно большой области, где $p(a)$ более или менее постоянна. А именно, верна следующая

ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА. *Если для любых положительных $\varepsilon < 1$ и L можно указать такое n_0, что при всех целых $n > n_0$*

$$\frac{p_n(x'')}{p_n(x')} < 1 + \varepsilon,$$

когда $|x'| \leq L$, $|x''| \leq L$, и вообще $\frac{p_n(a)}{p_n(x')} < c$, где $c \geq 1 + \varepsilon$ не зависящая от n постоянная, каково бы ни было значение a, то при $n \to \infty$

$$\Phi_n(x_1, t_0, t_1) = \frac{\int_{t_0}^{t_1} p_n(x_1 - t) f(t)\,dt}{\int_{-\infty}^{\infty} p_n(x_1 - t) f(t)\,dt} \to \int_{t_0}^{t_1} f(t)\,dt$$

для любых x_1, t_0, t_1. [Стремление к пределу равномерно, если доверительный промежуток $(x_1 - t_1, x_1 - t_0)$ находится внутри произвольно данной конечной области.]

В самом деле, каково бы ни было наблюденное значение x_1, можем, при данном произвольно малом $\varepsilon > 0$, взять число L настолько большим, что

$$\int_{x_1-L}^{x_1+L} f(t)\,dt > 1 - \varepsilon$$

и кроме того $L > |x_1 - t_0|$, $L > |x_1 - t_1|$. После этого, определяя n_0 согласно условию теоремы, имеем при $n > n_0$

$$p_n(x') \int_{t_0}^{t_1} f(t)\,dt < \int_{t_0}^{t_1} p_n(x_1 - t) f(t)\,dt < (1+\varepsilon)\, p_n(x') \int_{t_0}^{t_1} f(t)\,dt,$$

$$p_n(x') \int_{x_1-L}^{x_1+L} f(t)\,dt < \int_{x_1-L}^{x_1+L} p_n(x_1 - t) f(t)\,dt < (1+\varepsilon)\, p_n(x') \int_{x_1-L}^{x_1+L} f(t)\,dt,$$

где $p_n(x')$ — наименьшее значение $p_n(x)$, когда $|x| \leqslant L$. Следовательно

$$p_n(x')(1-\varepsilon) < \int_{-\infty}^{\infty} p_n(x_1 - t) f(t)\,dt < p_n(x')\,[1 - \varepsilon^2 + \varepsilon c] < p_n(x')(1 + \varepsilon c),$$

откуда

$$\frac{1}{1+\varepsilon c} \int_{t_0}^{t_1} f(t)\,dt < \Phi_n(x_1, t_0, t_1) < \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \int_{t_0}^{t_1} f(t)\,dt, \tag{5}$$

что и требовалось доказать.

4. Без сомнения, вообще у нас нет особых оснований надеяться, что на практике условия теоремы выполнены. Поэтому теория вероятностей определенно заявляет, что **заключение, основанное на одном наблюдении, вообще, ненадежно**; но если положить $a = \text{М. О. } x$, то доказанная выше теорема будет применима для определения $a\sqrt{n}$ после n наблюдений $x_1, \ldots, x_n$. А именно, из только что доказанной теоремы следует, что *вероятность неравенства*

$$t_0 < X_1 - a\sqrt{n} < t_1, \tag{6}$$

после того как было наблюдено $\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{\sqrt{n}} = X_1$ *при достаточно большом* n, *сколь угодно мало отличается от доверительной вероятности*

этого неравенства * $\int_{t_0}^{t_1} f_n(t)\,dt$ *при единственном допущении, что* $p(a)$ *непрерывна вблизи* $a = X_1$ *и* $\frac{p(a)}{p(X_1)} < \infty$, *при всех* $a \gtrless X_1$.

Таким образом, теория вероятностей, без применения термина «доверительность», с давних пор пользуется ею, как предельной вероятностью, и дает совершенно точные указания, в каких случаях это законно; в частности, поскольку закон больших чисел, в широком смысле слова, является единственной основой изучения стохастических явлений, принципиальное превосходство «доверительного» определения a из неравенства (6) при помощи n наблюдений (вместо одного) заключается не столько в том, что той же «доверительности» соответствует в $\sqrt{n}$ раз меньшая область, как в том, что эта область **при каждом** X_1 более надежна, так как **с увеличением** n **доверительная вероятность приближается к действительной апостериорной вероятности.**

5. Применение доверительной вероятности Фишера к определенной области $(x_1 - t_1, x_1 - t_0)$ является практически приемлемым с классической точки зрения и в том случае, когда можно быть уверенным, что истинная вероятность неравенства (2) не может быть значительно меньше «доверительной», т. е.

$$\Phi(x_1, t_0, t_1) \geqslant \frac{1 - \alpha(t_0, t_1)}{1 + \delta\alpha(t_0, t_1)}, \tag{7}$$

где δ невелико.

Для этого *достаточно, чтобы* $p(b) \leqslant (1 + \delta)\,p(a)$, *если* a — *любая точка внутри доверительной области* $(x_1 - t_1 < a < x_1 - t_0)$, *между тем как* b — *любая точка вне этой области* $(b < x_1 - t_1$ *или* $b > x_1 - t_0)$.

В самом деле, в таком случае

$$\frac{\Phi(x_1, t_0, t_1)}{1 - \Phi(x_1, t_0, t_1)} = \frac{\int_{t_0}^{t_1} p(x_1 - t)\,f(t)\,dt}{\int_{-\infty}^{t_0} p(x_1 - t)\,f(t)\,dt + \int_{t_1}^{\infty} p(x_1 - t)\,f(t)\,dt} =$$

$$= \frac{p(\xi)}{p(\eta)} \cdot \frac{\int_{t_0}^{t_1} f(t)\,dt}{\int_{-\infty}^{t_0} f(t)\,dt + \int_{t_1}^{\infty} f(t)\,dt},$$

---

* См. 4-е издание моего курса «Теория вероятностей» (добавление 4-е). Как известно, если существует М.О. $(x - a)^2 = c^2$, то $\lim_{n=\infty} \int_{t_0}^{t_1} f_n(t)\,dt = \frac{1}{c\sqrt{2\pi}} \int_{t_0}^{t_1} e^{-\frac{t^2}{2c^2}}\,dt$, какова бы ни была данная функция $f(t) = f_1(t)$.

где ξ есть некоторая точка внутри промежутка $(x_1 - t_1,\ x_1 - t_0)$, η — некоторая точка вне этого промежутка; поэтому, согласно принятому условию, $p(\eta) \leqslant (1+\delta)\, p(\xi)$. Следовательно

$$(1+\delta)\frac{\Phi(x_1,\ t_0,\ t_1)}{1-\Phi(x_1,\ t_0,\ t_1)} \geqslant \frac{\int\limits_{t_0}^{t_1} f(t)\,dt}{1-\int\limits_{t_0}^{t_1} f(t)\,dt} = \frac{1-\alpha(t_0,\ t_1)}{\alpha(t_0,\ t_1)},$$

откуда вытекает (7) (например, если $\alpha(t_0,\ t_1) = \frac{1}{20}$, $\delta = 1$, то $\Phi(x_1,\ t_0,\ t_1) >$ $> 1 - \frac{2}{21} > 1 - \frac{1}{10}$).

6. За исключением указанных или аналогичных случаев применение доверительной вероятности для оценки вероятности неравенства (2), после того как найдено **определенное** значение $x = x_1$, может иногда приводить к грубым ошибкам. Правда, очевидно, что в случае $\alpha(t_0, t_1) = 0$, при любых предположениях относительно $p(a)$, мы будем иметь

$$\Phi(x_1, t_0, t_1) = \int\limits_{t_0}^{t_1} f(t)\,dt = 1,$$

а потому чем меньше $\alpha(t_0, t_1)$, тем менее следует считать вероятным, что разность между $\Phi(x_1, t_0, t_1) - \int\limits_{t_0}^{t_1} f(t)\,dt$ будет значительна. Точный смысл этого утверждения вытекает из следующего замечания: интегрируя равенство

$$P(x_1)\cdot\Phi(x_1, t_0, t_1) = \int\limits_{t_0}^{t_1} p(x_1 - t)\, f(t)\,dt$$

по x_1 от $-\infty$ до ∞, получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} P(x_1)\cdot\Phi(x_1, t_0, t_1)\,dx_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{t_0}^{t_1} p(x_1 - t)\, f(t)\,dt\,dx_1 = \int\limits_{t_0}^{t_1} f(t)\,dt, \qquad (8)$$

или иначе говоря, доверительная вероятность является математическим ожиданием апостериорной вероятности неравенства (2).

Вполне естественно желание, когда мы **ничего** не знаем о $p(a)$ (а следовательно и о $P(x)$), воспользоваться для определения неизвестной величины $\Phi(x_1, t_0, t_1)$ известным нам математическим ожиданием этой величины. Принимая во внимание, что дисперсия

$$\text{М. О.}\left[\Phi(x_1, t_0, t_1) - \int_{t_0}^{t_1} f(t)\,dt\right]^2 = \text{М. О.}\, \Phi^2(x_1, t_0, t_1) - \left[\int_{t_0}^{t_1} f(t)\,dt\right]^2 <$$

$$< (1 - \alpha(t_0, t_1)) - [1 - \alpha(t_0, t_1)]^2 < \alpha(t_0, t_1)(1 - \alpha(t_0, t_1) < \alpha(t_0, t_1)),$$

мы можем заключить на основании леммы Чебышева — Маркова, что вероятность неравенства

$$\left|\Phi(x_1, t_0, t_1) - \int_{t_0}^{t_1} f(t)\,dt\right| > z\sqrt{\alpha(t_0, t_1)} \tag{9}$$

меньше, чем $\frac{1}{z^2}$ при любом $z > 1$; полагая например $\frac{1}{z^2} = \sqrt[3]{\alpha(t_0, t_1)}$, находим, что вероятность неравенства

$$\left|\Phi(x_1, t_0, t_1) - \int_{t_0}^{t_1} f(t)\,dt\right| \leq \sqrt[3]{\alpha(t_0, t_1)}$$

больше, чем $1 - \sqrt[3]{\alpha(t_0, t_1)}$, т. е. сколь угодно близка к 1, если $\alpha(t_0, t_1)$ достаточно мало.

Поэтому статистик может в каждом частном случае пользоваться доверительностью 0,999 только тогда, когда считается практически допустимым пренебречь вероятностью 0,1 (а не 0,001). Но вообще, если о $p(a)$ ничего не известно, «доверительность» приобретает реальный смысл в соответствии с ее первоначальным определением лишь тогда, когда она применяется к большому числу независимых наблюдений $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а именно, в силу закона больших чисел, частота случаев, когда a будет находиться в соответствующих доверительных областях, будет близка* к доверительности (так же, как и средняя арифметическая из $\Phi(x_i, t_0, t_1)$). Однако если во всех наблюдениях a оставалось неизменным, то, как мы видели выше, определение a при помощи $\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$ будет не только в $\sqrt{n}$ раз точней при той же «доверительной» вероятности, но она будет уже весьма близка к индивидуальной вероятности нахождения a в данном промежутке $\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} - \frac{t_1}{\sqrt{n}}, \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} - \frac{t_0}{\sqrt{n}}\right)$, так как для n достаточно большого регулирующее действие закона больших чисел приводит уже к практически одинаковым значениям для апостериорной вероятности при любых предположениях об априорной вероятности $p(a)$ (лишь бы они не были придуманы нарочно вопреки всякому здравому смыслу).

7. Для выяснения недоразумений, которые могут возникнуть на прак-

* Согласно сказанному выше, это утверждение было бы, очевидно, неправильно, если бы было нарушено условие независимости значений x_i и рассматривались бы, например, только те из них, которые находятся в некотором данном промежутке.

тике при слишком большом доверии к «доверительной» вероятности, рассмотрим следующий пример.

Предположим, что на складе имеется большое число ящиков $(A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots)$, содержащих объекты, потребительная ценность которых x_i рублей в ящике A_i подчиняется закону Гаусса $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a_i)^2}{2}}$ с дисперсией 1 и центром a_i.

По техническим или экономическим соображениям в каждом ящике A_i проверена ценность $x_{1,i}$ только одного объекта. Полагая $t_1 = -t_0 = 2$, получаем для каждого a_i доверительную область $(x_{1,i}-2, x_{1,i}+2)$, соответствующую доверительной вероятности $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-2}^{2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \approx 0{,}95$.

Продавец на всех ящиках наклеивает доверительные ярлычки: $|a_i - x_{1,i}| < 2$, и считая, согласно Фишеру, излишним предупреждать покупателя, что надпись ярлыка основана только на одном наблюдении, лишь честно объявляет, что имеется 5% ящиков с ошибочными отметками. Если покупатель пришел в магазин с тем, чтобы купить любой из ящиков, то лишь в одном случае из 20 содержимое ящика не оправдает своего ярлыка; но если покупатель желает получить один или несколько ящиков с определенным значением $a_i = a$ (с точностью до ± 2), то мы бы ему посоветовали обратиться в магазин, где сортировка товара производится более осмотрительно. Действительно, если покупателю нужны, например, ящики с объектами высокой ценности, соответствующими средней $a_i = a$, которых сравнительно мало на складе (априорная вероятность $p(a)$ мала для больших значений a), то весьма вероятно, что из купленных им двадцати ящиков с требуемыми доверительными ярлыками негодным окажется не один, а более десяти ящиков.

Если техническая трудность или дороговизна выборки настолько велика, что из каждого ящика может быть исследован только один объект, в таком случае необходимо было бы знать (априорную) плотность распределения $p(a)$ на складе. Тогда ярлыки, обеспечивающие не более 5% ошибок, соответствовали бы промежуткам $(x_{1,i} \pm t_i)$ неодинаковой длины, но они гарантировали бы покупателю, что каков бы ни был **определенный** ящик, который он приобретает, вероятность ошибки действительно равна 0,05; t_i определяется из равенства

$$\Phi(x_{1,i}, -t_i, t_i) = \frac{\int\limits_{-t_i}^{t_i} p(x_{1,i} - t)\, e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x_{1,i} - t)\, e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt} = 0{,}95.$$

Я не буду останавливаться на вопросе о том, как практически определить $p(a)$, на основании известного для всего склада распределения $P(x_{1,i})$ взятых из каждого ящика величин $x_{1,i}$; эта задача теоретически решается при помощи равенства

$$e^{-\frac{t^2}{2}}\theta_a(t)=\theta_{x_1}(t), \tag{10}$$

где $\theta_{x_1}(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}P(x)\,e^{itx}\,dx$, $\theta_a(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}p(a)\,e^{ita}\,da$ — соответственно, характеристические функции $x_{1,i}$ и a_i.

Равенство (10) полезно также иметь в виду для того, чтобы предостеречь слишком усердных сторонников Фишера от поспешного вывода, что поскольку при весьма большом числе опытов частота случаев, когда $|x_{1,i}-a_i|<t$ приближается к тому же самому значению $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-t}^{t}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ независимо от того, считаем ли мы данным a_i или $x_{1,i}$ (я надеюсь, что предыдущие страницы разъяснили читателю, что это утверждение ошибочно), — предельные частоты или вероятности $p(a_i)$ и $P(x_{1,i})$ должны бы совпадать * или по крайней мере должны быть связаны симметрично.

Резюмируя вышесказанное, мы видим, что отказ Фишера от формулы Байеса приводит к смешению статистической частоты с математической вероятностью и к отожествлению случая, когда доверительность весьма близка к действительной апостериорной вероятности, с тем случаем, когда она является лишь какой-то средней из различных апостериорных вероятностей. Поэтому в последнем случае применение доверительной вероятности может приводить к тем же ошибкам, которые связаны с рассмотрением общих средних для сложных совокупностей, как например применение среднего коэффициента смертности или грамотности стомиллионного населения данной страны к различным его группам.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии Наук СССР

Поступило
20 I 1941

* Если бы вместо $x_{1,i}$ мы рассматривали $\xi_{n,i}=\frac{x_{1,i}+x_{2,i}+\ldots+x_{n,i}}{n}$, то при достаточно большом n распределение вероятностей $\xi_{n,i}$ действительно стремилось бы к $p(a_i)$, так как, обозначая через $\theta_n(t)$ характеристическую функцию $\xi_{n,i}$, мы имеем тогда вместо (10) равенство $e^{-\frac{t^2}{2n}}\theta_a(t)=\theta_n(t)$, из которого видно, что $\theta_n(t)\to\theta_a(t)$ при $n\to\infty$.

S. BERNSTEIN. ON «FIDUCIAL» PROBABILITIES OF FISHER

SUMMARY

Fisher's rejection of the formula of Bayes leads to an interchange of the statistical frequency with the mathematical probability and to identification of the case, when the fiducity is rather close to the real *a posteriori* probability, with the case, when it is only some average of different *a posteriori* probabilities. In this last case the application of the fiducial probability may lead to the same errors, which are connected with the consideration of general averages for complicated aggregates, as, for instance, the application of the mean mortality or literality coefficient of a hundred million population of a given country to its different groups.

The author points out that his criticism in no way aims at reducing the value of the investigations of Fisher and other english authors, which contain a series of important results independent of the notion of «fiducity».

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 5 (1941), 95—98 Série mathématique

А. О. ГЕЛЬФОНД

О КОЭФФИЦИЕНТАХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В работе устанавливается связь между плотностью коэффициентов разложения в ряд Тейлора периодической целой функции и ее ростом.

Как известно, не существует целой функции, имеющей два периода. Очевидно также, что периодическая целая функция не может иметь круговых симметрий за исключением простейших — четности или нечетности. Другими словами, если $f(z)$ — периодическая функция, то равенство $f(z)=\varphi(z^p)$, где $\varphi(z)$ — целая функция и $p>2$, невозможно.

Действительно, допустив, что $f(z)=\varphi(z^p)$, $p>2$, и считая 1 периодом $f(z)$, мы получим, что

$$f(z)=f(\omega z)=f(\omega z+\omega)=f(z+\omega),$$

где $\omega^p=1$. Отсюда следует, что, кроме 1, $f(z)$ имеет период ω и $\omega\neq\pm 1$, если $p>2$.

Это последнее обстоятельство указывает на то, что у периодической целой функции коэффициенты ее разложения в ряд Тейлора не могут слишком часто обращаться в нуль. Действительно, можно установить связь между множеством равных нулю коэффициентов периодической целой функции и ее ростом.

Пусть периодическая целая функция $f(z)$ представлена своим разложением

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \tag{1}$$

Введем понятие плотности коэффициентов. Обозначим $N(n)$ число коэффициентов $a_k\neq 0$, $k=0, 1, 2, \ldots, n$, и положим

$$\gamma=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{N(n)}{n}. \tag{2}$$

Тогда может быть доказана

ТЕОРЕМА. *Если* $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *— целая периодическая функция порядка* ρ *и плотность ее коэффициентов* a_n *равна* γ, *то* $\gamma\geqslant\frac{1}{2\rho}$.

Для доказательства этого предложения будут нужны следующие леммы.

ЛЕММА I. *Положим* $\gamma = \overline{\lim\limits_{n=\infty}} \frac{N(n)}{n}$, *где* $N(n)$ *есть число членов последовательности целых положительных чисел* $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ $\ldots < n_k < \ldots$, *меньших* n. *Тогда* $u(z) = \prod\limits_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n_k^2}\right)$ *удовлетворяет неравенству* $|u(\pm ir)| < e^{\gamma\pi r + o(r)}$ *при действительном и положительном* r.

Для доказательства этой леммы нужно знать границу сверху чисел n_k. Из условия леммы следует, что если $n_k \leqslant p$, то $k \leqslant (\gamma + \varepsilon) p$ для любого $\varepsilon > 0$ и $p \geqslant p_0(\varepsilon)$. Значит, $n_{[(\gamma+\varepsilon)p]} > p$, и заменив p на $\left[\frac{p}{\gamma+\varepsilon}\right]$, мы получим, что $n_p > \frac{p}{\gamma+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, $p > p_0(\varepsilon)$. Отсюда следует, что

$$|u(\pm ir)| < \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 + \frac{r^2}{n_k^2}\right) < \prod_{k=1}^{p_0-1}\left(1 + \frac{r^2}{n_k^2}\right)\prod_{k=p_0}^{\infty}\left(1 + \frac{[r(\gamma+\varepsilon)]^2}{k^2}\right) <$$
$$< C_0 \frac{\sin[\pi i(\gamma+\varepsilon) r]}{r} < e^{\pi(\gamma+\varepsilon)r + o(r)}, \quad r > r(\varepsilon) \tag{3}$$

для всякого ε, начиная с некоторого r. Этим лемма I доказана.

ЛЕММА II. *Если* $f(z)$ — *периодическая функция с периодом* 1 *имеет порядок* ρ *и представляется рядом Фурье*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{2\pi i n z} \tag{4}$$

то функции $v_1(z)$ *и* $v_2(z)$,

$$v_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n n^z; \quad v_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{-n} n^z, \tag{5}$$

в полуплоскости $Rz \geqslant 0$ *удовлетворяют неравенствам при* $z = re^{i\varphi}$

$$|v_s(z)| < Ce^{\frac{\rho-1}{\rho} r\cos\varphi \ln r + o(r\cos\varphi\ln r)}; \quad s = 1, 2, \tag{6}$$

где C *не зависит от* z *и* $-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Действительно, A_n и A_{-n} удовлетворяют неравенствам

$$|A_n| < e^{-|n|^{\frac{\rho}{\rho-1}-\delta}} \tag{7}$$

для всякого $\delta > 0$ и $|n| \geqslant |n(\delta)|$, так как из представления

$$A_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=c} f\left(\frac{\ln z}{2\pi i}\right) z^{-n-1}\,dz, \quad -\infty < n < \infty, \tag{8}$$

и неравенства

$$\left|f\left(\frac{\ln z}{2\pi i}\right)\right| < Ce^{(\ln|z|)^{\rho+\varepsilon}}; \quad |z| \geqslant R(\varepsilon), \tag{9}$$

верного для всякого $\varepsilon > 0$ при $|z| \geqslant R(\varepsilon)$, следует, если положить в формуле (8) $z = e^{\left(\frac{n}{\rho+\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\rho-1+\varepsilon}}}$ $(n > 0)$, или $z = e^{-\left(\frac{n}{\rho+\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\rho-1+\varepsilon}}}$ $(n < 0)$, что

$$|A_n| < e^{-|n|^{\frac{\rho}{\rho-1}-\delta}}; \quad \delta > 0, \tag{10}$$

для всякого $\delta > 0$ при $|n| > |n(\delta)|$.

Из неравенства (7) для функций $v_1(z)$ и $v_2(z)$ следуют неравенства

$$|v_s(z)| < C \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^{\frac{\rho}{\rho-1}-\delta}} n^{r\cos\varphi}; \quad z = re^{i\varphi}, \tag{11}$$

где $s = 1, 2$ и $\delta > 0$ произвольно мало, $C = C(\delta)$, или

$$|v_s(z)| = C_1 \max_{1 \leqslant n \leqslant \infty} [e^{-n^{\frac{\rho}{\rho-1}-\delta}+r\cos\varphi\ln n+2\ln n}]. \tag{12}$$

Максимум в правой части этого неравенства может быть легко найден, и полагая, что он осуществится при $n = n_0$, мы получим, что

$$n = [1 + o(1)]\left[\frac{r\cos\varphi}{\frac{\rho}{\rho-1}-\delta}\right]^{\frac{1}{\frac{\rho}{\rho-1}-\delta}} \tag{13}$$

откуда

$$|v_s(z)| < Ce^{\frac{\rho-1}{\rho}r\cos\varphi\ln r + o(r\cos\varphi\ln r\cos\varphi)} \tag{14}$$

где C не зависит от z и $-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Пользуясь этими двумя леммами, можно уже доказать нашу теорему. Без нарушения общности можно предположить, что период нашей целой функции $f(z)$ равен 1. Сравним прежде всего представления целой периодической функции рядами Тейлора и Фурье:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{2k\pi i z}; \tag{15}$$

откуда следует, что

$$a_n = \frac{(2\pi)^n}{n!}\left[A_0 + e^{\frac{\pi n i}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} A_k k^n + e^{-\frac{\pi n i}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} A_{-k} k^n\right] \tag{16}$$

или

$$a_n = \frac{(2\pi)^n}{n!}\varphi(n); \qquad \varphi(z) = A_0 + e^{\frac{\pi i}{2}z} \sum_{k=1}^{\infty} A_k k^z + e^{-\frac{\pi i}{2}z} \sum_{k=1}^{\infty} A_{-k} k^z. \tag{17}$$

На основании леммы II и непосредственных оценок, для функции $\varphi(z)$, при $z = re^{i\varphi}$ и $-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, следует неравенство

$$|\varphi(z)| < C_1 e^{\frac{\rho-1}{\rho}r\cos\varphi\ln r + \frac{\pi}{2}\sin\varphi r + o(r\cos\varphi\ln r)} \tag{18}$$

где C_1 не зависит от z.

Пусть все $a_p \neq 0$, если $p = n_k$, $k = 1, 2, \ldots$, и $a_p = 0$, если $p \neq n_k$. Если γ — плотность отличных от нуля коэффициентов a_p в формуле (17), то по лемме I функция $u(z)$,

$$u(z) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n_k^2}\right), \quad z = re^{i\varphi}, \tag{19}$$

удовлетворяет неравенству

$$|u(z)| < e^{\gamma\pi r + o(r)}; \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2} \tag{20}$$

и кроме того функция $u(z)\varphi(z)$ имеет нули при всех целых положительных значениях n, другими словами $u(z)\varphi(z)=0$, $n=0, 1, 2, \ldots$ (a_0 можно положить равным нулю без нарушения общности нашей теоремы).

Допустим теперь, что $\gamma < \frac{1}{2\rho}$, где γ — ранее определенная плотность отличных от нуля коэффициентов $f(z)$, а $\rho > 1$ — ее порядок. Тогда $\frac{\rho-1}{\rho} < 1-2\gamma$, и всегда можно найти β, удовлетворяющее неравенствам

$$\frac{\rho-1}{\rho} < \beta < 1-2\gamma. \tag{21}$$

Построим вспомогательную функцию $F(z)$:

$$F(z) = \frac{u(z)\varphi(z)}{\sin \pi z} e^{-\beta z \ln(1+z)} \tag{22}$$

где $u(z)$ определена равенством (19), а $\varphi(z)$ формулой (17). Эта функция $F(z)$ будет, по способу выбора функции $u(z)$, регулярна в полуплоскости $Rz \geqslant 0$ и в этой полуплоскости, благодаря неравенствам (18) и (20), будет подчиняться условиям

$$|F(\pm ir)| < e^{(\beta+2\gamma-1)r+o(r)} \tag{23}$$

$$|F(r)| < e^{\left(\frac{\rho-1}{\rho}-\beta\right) r \ln r + o(r \ln r)} \tag{24}$$

и при $-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, $z = re^{i\varphi}$

$$|F(z)| < Ae^{\eta r} \tag{25}$$

где A и η не зависят от r. Но, как известно, условий (21), (23), (24) и (25) достаточно для заключения, что $F(z) \equiv 0$ *. Отсюда следует, что и $\varphi(z) \equiv 0$, а значит и $f(z) \equiv a_0 = 0$. Другими словами, $\gamma \geqslant \frac{1}{2\rho}$, и наша теорема доказана.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии Наук СССР

Поступило
30 XII 1940

A. GELFOND. ON THE COEFFICIENTS OF PERIODIC FUNCTIONS

SUMMARY

The present note contains the proof of the following theorem: if $f(z)$ is an integral periodic function of finite order ρ, and γ is the density of the coefficients of the Taylor series of $f(z)$ unequal to zero, where γ is defined as $\gamma = \lim \frac{N(n)}{n}$, $N(n)$ being the number of different from zero coefficients among $a_0, a_1, \ldots, a_n$; $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, then $\gamma > \frac{1}{2\rho}$, $\rho \geqslant 1$.

---

* Если функция $f(z)$ регулярна в полуплоскости $R(z) \geqslant 0$ и в этой полуплоскости удовлетворяет условиям

$$1^0 \quad |f(z)| < Ae^{B|z|}; \qquad 2^0 \quad |f(\pm ir)| \leqslant 1; \qquad 3^0 \quad \lim_{r\to\infty} \frac{\ln|f(r)|}{\ln r} = -\infty,$$

то $f(z) \equiv 0$ (см. G. Polya и G. Szegö, Aufgaben und Lehrzätze aus der Analysis, Bd. I, dritter Abschn., 326 Aufg., Berlin, 1925).

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 5 (1941), 99—104 Série mathématique

А. О. ГЕЛЬФОНД

О СОВМЕСТНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ РАЦИОНАЛЬНЫМИ ДРОБЯМИ

В работе устанавливается точная связь между решениями задачи об одновременном приближении степеней алгебраического числа дробями с одинаковыми знаменателями и задачи о построении линейных форм от степеней этого же числа, достаточно быстро стремящихся к нулю.

Пусть α будет корнем неприводимого уравнения $f(z)=0$ с целыми рациональными коэффициентами и старшим коэффициентом, равным единице. Возьмем алгебраическое число высоты A

$$\xi=\sum_{k=0}^{p-1} A_k\alpha^k, \quad \max_{0\leqslant k\leqslant p-1} |A_k|=A, \tag{1}$$

где все числа A_i, $i=0, 1, 2, \ldots, p-1$, целые рациональные, $D(A_0, A_1, \ldots, A_{p-1})=1$ и p—степень уравнения $f(z)=0$, которому удовлетворяет α. Построим число $\bar\xi$, союзное числу ξ. Тогда

$$\bar\xi=\sum_{k=0}^{p-1} C_k\alpha^k, \quad D(C_0, C_1, \ldots, C_{p-1})=1, \tag{2}$$

где все $C_0, C_1, \ldots, C_{p-1}$—целые рациональные числа, определяющиеся единственным образом (с точностью до знака) и

$$\xi\bar\xi=N, \tag{3}$$

где N—целое число. Мы можем определить союзное число единственным образом, положив $C_p>0$, если допустим, конечно, что $C_p\neq 0$.

Относительно линейных форм ξ можно доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА. *Пусть имеется последовательность форм ξ_s, высоты которых неограниченно растут,*

$$\xi_s=\sum_{k=0}^{p-1} A_{k,s}\alpha^k; \quad \max_{0\leqslant k\leqslant p-1} |A_{k,s}|=A_s, \tag{4}$$

где α — *алгебраическое число, целое и степени* p *и* $D(A_{0,s}, A_{1,s}, \ldots$ $\ldots, A_{p-1,s}) = 1$. *Если существует такое* λ_0, *не зависящее от коэффициентов форм* ξ_s, *что для всякого* s *выполняется неравенство*

$$|\xi_s| \leqslant \frac{\lambda_0}{A_s^{p-1}}, \quad s = 0, 1, \ldots, \tag{5}$$

то можно найти такие целые рациональные числа $q_{1,s}, \ldots, q_{p-1,s}$, *что для всякого* s *будут выполнены неравенства*

$$|C_{p-1,s}\alpha^k - q_{k,s}| < \frac{\lambda_1}{C_{p-1,s}^{\frac{1}{p-1}}}, \quad k = 1, \ldots, p-1, \tag{6}$$

где λ_1 *зависит только от* α, *а* $C_{p-1,s}$ *есть коэффициент при* $(p-1)$*-ой степени* α *в форме* $\bar{\xi}_s$, *союзной форме* ξ_s. *Обратно, если дана последовательность чисел* $C_{p-1,s}$, *при которых выполняются неравенства* (6), *то можно построить последовательность форм* ξ_s, *удовлетворяющих неравенствам* (5).

Существование связи между линейными формами от степеней произвольного числа, в смысле нижней границы отклонения такой формы от нуля, и одновременными приближениями этих степеней рациональными дробями было установлено еще А. Хинчиным ([1]). В настоящей работе эта связь дана для определенного класса форм от алгебраических чисел в точной форме.

Для доказательства нашей теоремы мы покажем прежде всего, что если A_s — высота формы ξ_s, а C_s — высота формы $\bar{\xi}_s$, то

$$C_s < \lambda_2 A_s^{p-1}, \quad \lambda_2 > 0, \tag{7}$$

где λ_2 зависит только от числа α и его сопряженных по уравнению. Действительно, умножая ξ_s на форму $L = \sum_{k=0}^{p-1} B_k\alpha^k$, мы получим, что

$$\left.\begin{aligned} \xi_s L &= \sum_{k=0}^{p-1} A_{k,s}\alpha^k \sum_{k=0}^{p-1} B_k\alpha^k = \sum_{k=0}^{p-1} D_k\alpha^k \\ D_k &= \sum_{m=0}^{p-1}\left(\sum_{l=0}^{p-1} a_{k,l,m}A_{l,s}\right)B_m, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

где все числа $a_{k,l,m}$ — целые рациональные, зависящие только от α и его сопряженных. Полагая

$$\max_{0 \leqslant k,l,m \leqslant p-1} |a_{k,l,m}| = a; \quad F_{m,k} = \sum_{l=0}^{p-1} a_{k,l,m}A_{l,s}, \tag{9}$$

мы получим, что $|F_{m,k}| \leqslant paA_s$; кроме того все числа $F_{m,k}$ будут целыми рациональными.

Рассматривая величины D_k, $k = 0, 1, \ldots, p-1$, как линейные формы с целыми рациональными коэффициентами $F_{m,k}$, относительно переменных B_m, мы можем, с помощью принципа Дирихле, выбрать числа B_m

целыми, в совокупности отличными от нуля и удовлетворяющими неравенствам [2]

$$B_m < 1 + (p^2 a A_s)^{p-1} \tag{10}$$

и притом так, чтобы $D_1 = D_2 = \ldots = D_{p-1} = 0$. Но α удовлетворяет неприводимому уравнению, и поэтому форма L может отличаться только целочисленным множителем от формы $\bar{\xi}$. Отсюда и следует неравенство (7).

Введем в рассмотрение полиномы

$$P_s(z) = \sum_{k=0}^{p-1} A_{k,s} z^k; \quad Q_s(z) = \sum_{k=0}^{p-1} C_{k,s} z^k, \tag{11}$$

где $A_{k,s}$ и $C_{k,s}$ будут соответственно коэффициентами форм ξ_s и $\bar{\xi}_s$.

Обозначим $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}$ числа, сопряженные целому алгебраическому числу α. Тогда, по свойству симметричных функций корней алгебраического уравнения, мы будем иметь, что

$$|P_s(\alpha)| \left| \prod_{i=1}^{p-1} P_s(\alpha_i) \right| \geqslant 1, \tag{12}$$

откуда следует, что

$$|P_s(\alpha_i)| > \frac{1}{|P_s(\alpha)| \prod\limits_{i \neq k} |P_s(\alpha_k)|}, \quad i = 1, 2, \ldots, p-1. \tag{13}$$

Но пользуясь неравенством (5) и непосредственно оценивая сверху $|P_s(\alpha_k)|$, мы получаем из неравенства (13) неравенство

$$|P_s(\alpha_i)| > \lambda_3 A_s, \quad i = 1, 2, \ldots, p-1, \tag{14}$$

где λ_3 зависит только от α.

Форма $\bar{\xi}$ — союзная форме ξ. Поэтому

$$P_s(\alpha_i) Q_s(\alpha_i) = N_s, \quad i = 1, \ldots, p-1. \tag{15}$$

Отсюда следует, что

$$|Q_s(\alpha_i)| = \frac{N_s}{P_s(\alpha_i)}, \quad i = 1, \ldots, p-1. \tag{16}$$

Но из неравенств (5) и (7) непосредственно следует, что

$$|N_s| < |P_s(\alpha)| \, |Q_s(\alpha)| < \frac{\lambda}{A_s^{p-1}} \lambda_2 A_s^{p-1} = \lambda\lambda_2. \tag{17}$$

Из неравенств (14), (17) и соотношения (16) непосредственно следует, что

$$|Q_s(\alpha_i)| < \frac{\lambda\lambda_2}{\lambda_3} A_s^{-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, p-1. \tag{18}$$

Кроме того мы непосредственно имеем, что

$$|Q_s(\alpha)| \geqslant \frac{1}{|P_s(\alpha)|} \geqslant \frac{1}{\lambda} A_s^{p-1}. \tag{19}$$

Обозначая корни полинома $Q_s(z)$ через $\beta_{s,k}$, $k = 1, \ldots, t$, $t \leqslant p-1$, и принимая во внимание, что коэффициенты полинома $Q_s(z)$ целые рациональные, мы из неравенств (18) получаем неравенства

$$\left| \prod_{k=1}^{t} (\alpha_i - \beta_{s,k}) \right| < \frac{\lambda\lambda_2}{\lambda_3} A_s^{-1}, \quad i = 1, \ldots, p-1. \tag{20}$$

Эти последние неравенства, так как они верны при сколь угодно больших A_s, показывают, что $t = p - 1$ и

$$\beta_{s,k} = \alpha_k + \eta_{s,k}; \quad \lim_{s\to\infty} \eta_{s,k} = 0. \tag{21}$$

Более точно

$$|\eta_{s,i}| = |\alpha_i - \beta_{s,i}| \leqslant \frac{\lambda\lambda_2}{\lambda_3} \frac{A_s^{-1}}{\left|\prod\limits_{\substack{k=1\\ i\neq k}}^{p-1} (\alpha_i - \beta_{s,k})\right|} < \frac{\lambda_4}{A_s}, \tag{22}$$

где λ_4 зависит только от α. Поэтому мы получаем, что

$$|C_{p-1,s}| = \frac{|Q_s(\alpha)|}{\prod\limits_{k=1}^{p-1} |\alpha - \beta_{s,k}|} > \lambda_5 A_s^{p-1} \tag{23}$$

где λ_5 зависит только от α, так как α не равно ни одному из α_i, $i = 1, 2, \ldots, p-1$ и $|Q_s(\alpha)|$ удовлетворяет неравенству (19).

Из неравенств (18) и (23) следует, далее, что

$$\prod_{k=1}^{p'-1} |\alpha_i - \beta_{s,k}| = \frac{|Q_s(\alpha_i)|}{C_{p-1,s}} < \frac{\lambda\lambda_2}{\lambda_3\lambda_5} A^{-p}. \tag{24}$$

Отсюда следует окончательно, что

$$|\eta_{s,i}| < \lambda_6 A_s^{-p}, \tag{25}$$

где λ_6 зависит только от α.

Пользуясь неравенствами (7) и (25), мы можем дать новое представление полиному $Q_s(z)$, именно

$$Q_s(z) = C_{p-1,s} \prod_{k=1}^{p-1} (z - \beta_{s,k}) = C_{p-1,s} \prod_{k=1}^{p-1} (z - \alpha_k - \eta_{s,k}) =$$

$$= C_{p-1,s} \prod_{k=1}^{p-1} (z - \alpha_k) + \sum_{k=0}^{p-2} b_{s,k} z^k, \tag{26}$$

где

$$|b_{s,k}| < \lambda_7 A_s^{-1}, \quad k = 0, 1, \ldots, p-2, \quad \lambda_7 = \lambda_7(\alpha). \tag{27}$$

Так как α корень уравнения $f(z) = 0$, то

$$Q_s(z) = C_{p-1,s} \frac{f(z)}{z - \alpha} + \sum_{k=0}^{p-2} b_{s,k} z^k =$$

$$= C_{p-1,s} z^{p-1} + C_{p-1,s} \sum_{k=0}^{p-2} \left(\sum_{n=0}^{p-k-1} a_{p-n} \alpha^{p-k-n-1} \right) z^k + \sum_{k=0}^{p-2} b_{s,k} z^k, \tag{28}$$

где положено $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{p} a_n z^n$, $a_p = 1$. Из этого последнего соотношения следуют соотношения

$$C_{s,k} = C_{p-1,s} \sum_{n=0}^{p-k-1} a_{p-n} \alpha^{p-k-n-1} + b_{s,k}, \quad k = 0; 1, 2, \ldots, p-2. \tag{29}$$

Так как $a_p = 1$, то решая эту систему равенств относительно $\alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{p-1}$ и замечая, что детерминант этой системы равен 1, мы получим, что

$$C_{p-1,s}\alpha^k = q_{k,s} + b'_{k,s}, \quad k = 1, 2, \ldots, p-1, \tag{30}$$

где все $q_{k,s}$ — целые рациональные числа, а $b'_{k,s}$ вследствие неравенств (27) и (23) удовлетворяют неравенствам

$$|b'_{k,s}| < \lambda_8 C_{p-1,s}^{-\frac{1}{p-1}}, \quad k = 1, 2, \ldots, p-1, \tag{31}$$

где λ_8 зависит только от α.

Это и доказывает первую часть нашей теоремы. Обратное утверждение можно доказать легко.

Допустим, что мы имеем последовательность неравенств (6) с λ_1, не зависящей от $C_{p-1,s}$, и неограниченно растущим $C_{p-1,s}$. С помощью чисел $q_{k,s}$ мы можем построить числа

$$C_{k,s} = \sum_{n=0}^{p-k-1} a_{p-n} q_{p-k-n-1,s}, \quad k = 0, 1, \ldots, p-2. \tag{32}$$

Тогда

$$Q_s(z) = \sum_{k=0}^{p-1} C_{k,s} z^k = C_{p-1,s} \frac{f(z)}{z-\alpha} \sum_{k=0}^{p-2} b_{k,s} z^k, \tag{33}$$

где, на основании неравенств (6),

$$|b_{k,s}| \leqslant \frac{\lambda_9}{C_s^{\frac{1}{p-1}}}, \quad k = 0, 1, \ldots, p-2, \tag{34}$$

и λ_9 не зависит от C_s.

С помощью принципа Дирихле мы можем теперь выбрать целые числа $D_{k,s}$, $k = 0, 1, \ldots, p-1$, так, чтобы

$$|D_{k,s}\alpha^k| < \lambda_{10} C_{p-1,s}^{-1}; \quad |D_{k,s}| \leqslant C_{p-1,s}^{\frac{1}{p-1}}, \tag{35}$$

где λ_{10} будет зависеть только от α.

Полагая $R_s(z) = \sum_{k=0}^{p-1} D_{k,s} z^k$, мы непосредственно получаем, что

$$R_s(z) Q_s(z) = \sum_{k=0}^{p-1} g_{k,s} z^k + u(z) f(z), \tag{36}$$

где все $g_{k,s}$ — целые рациональные. С другой стороны,

$$R_s(z) Q_s(z) = R_s(z) C_{p-1,s} \frac{f(z)}{z-\alpha} + \sum_{k=0}^{p-2} b_{k,s} z^k R_s(z) =$$

$$= C_{p-1,s} R_s(\alpha) \frac{f(z)}{z-\alpha} + \sum_{k=0}^{p-2} b_{k,s} z^k R_s(z) + C_{p-1,s} \frac{R_s(z) - R_s(\alpha)}{z-\alpha} f(z). \tag{37}$$

Сравнивая соотношения (36) и (37) и пользуясь неравенствами (34) и (35), мы сразу получаем, что

$$|g_{k,s}| < \lambda_{11}, \quad k = 0, 1, \ldots, p-1, \quad s = 0, 1, \ldots, \tag{38}$$

где λ_{11} зависит только от α.

Построив форму, союзную форме $\bar{\xi}_s'' = \sum_{k=0}^{p-1} g_{k,s}\alpha^k$, и замечая, что коэффициенты этой формы ξ_s'' будут иметь верхнюю границу, зависящую только от α, мы положим

$$\xi_s'(\alpha) = \xi_s''(\alpha) \sum_{k=0}^{p-1} D_{k,s}\alpha^k = \sum_{k=0}^{p-1} A'_{k,s}\alpha^k. \tag{39}$$

Очевидно, что форма, союзная форме $\sum_{k=0}^{p-1} C_{k,s}\alpha^k$, может отличаться от формы $\xi_s'(\alpha)$ только множителем, не превосходящим 1. Поэтому форма, союзная форме $\sum_{k=0}^{p-1} C_{k,s}\alpha^k$, удовлетворяет условиям нашей теоремы. Теорема доказана полностью.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии Наук СССР

Поступило
30 XII 1940

ЛИТЕРАТУРА

[1] Khintchine A., Über eine Klasse linearer Diophantischer Approximationen, Rendiconti del Circolo math. di Palermo, 50 (1926), 170.

[2] Siegel C. L., Über einige Anwendungen Diophantischer Approximationen, Abhandl. der Preuss. Acad. d. Wissenschaften, math.-phys. Klasse, № 1, 1929.

A. GELFOND ON THE SIMULTANEOUS APPROXIMATIONS OF ALGEBRAIC NUMBERS BY RATIONAL FRACTIONS

SUMMARY

If α is an algebraic number of the power p and we are given a sequence of integral algebraic numbers

$$\xi_s = \sum_{k=0}^{p-1} A_{k,s}\,\alpha^k$$

satisfying the inequalities

$$|\xi_s| < \lambda A_s^{-(p-1)},$$

where λ is a constant and $A_s = \max_{0\leq k\leq p-1} |A_{k,s}|$, then we construct the sequence of numbers

$$\bar{\xi}_s = \sum_{k=0}^{p-1} C_{k,s}\,\alpha^k$$

adjoined to the numbers ξ_s, i. e., such that $\bar{\xi}_s\xi_s = N_s$, where N_s is an integer and $D(C_{0,s}, \ldots, C_{p-1,s}) = 1$. Taking now the sequence of integers $C_{p-1,s}$ we may assert that $|C_{p-1,s}\alpha^k - q_{k,s}| < \frac{\lambda_1}{A_s}$ where λ_1 is a constant and $q_{k,s}$ are integral rational numbers. The inverse assertion is also true.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 5 (1941), 105—126 Série mathématique

Б. А. РОЗЕНФЕЛЬД

ТЕОРИЯ КОНГРУЕНЦИЙ И КОМПЛЕКСОВ ПРЯМЫХ В ЭЛЛИПТИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

В работе изучаются системы прямых эллиптического пространства. Находится строение окрестности прямой в конгруенции, комплексе и во всем четырехпараметрическом множестве прямых. На основе этого проводится изучение частных типов конгруенций и комплексов.

Множество прямых нашего трехмерного пространства является не только одним из простейших наглядно представляемых пространств с числом измерений больше трех (оно четырехмерно), но также и простейшим анизотропным пространством, т. е. таким пространством, свойства которого не одинаковы по разным направлениям в окрестности каждого его элемента. Поэтому представляет интерес изучать строение прямой в множестве прямых. В чем может заключаться изучение этого строения?

Всякие две прямые в любом пространстве постоянной кривизны имеют кратчайшее расстояние, осуществляющееся по их общему перпендикуляру. Если две прямые приближать друг к другу каким-нибудь способом, то и кратчайшее расстояние и угол между двумя плоскостями, проходящими через общий перпендикуляр, по которому осуществляется кратчайшее расстояние, и, соответственно, через одну из наших прямых, будут стремиться к нулю, но отношение кратчайшего расстояния к углу между построенными плоскостями будет стремиться к определенному пределу. Если приближать наши прямые друг к другу разными способами, по разным направлениям в множестве прямых, то этот предел будет принимать разные значения. Поэтому этот предел можно назвать п а р а м е т р о м прямой в данном направлении в множестве прямых. При нашем сближении прямых оба конца общего перпендикуляра сливаются в одну точку, так же как обе построенные нами плоскости сливаются в одну плоскость. Эта предельная точка и предельная плоскость тоже зависят от пути, по которому мы сближали прямые, и поэтому их можно назвать г о р л о в о й т о ч к о й и г о р л о в о й п л о с к о с т ь ю прямой в данном направлении в множестве прямых.

Картина строения окрестности прямой в множестве прямых будет выяснена, если мы будем знать зависимость значения параметра и поло-

жения горловых точек и горловых плоскостей на каждой прямой от направления, исходящего из данной прямой в множестве прямых. Эта задача в эвклидовом пространстве рассматривалась только для конгруенций прямых (конгруенцией прямых в трехмерном пространстве называется двупараметрическая система прямых, так что через каждую прямую пространства проходит одна и, вообще говоря, только одна прямая системы), где решение этой задачи было дано известными формулами Гамильтона и Мангейма. В этой работе мы будем решать эту задачу для эллиптического пространства, причем найдем не только строение элемента конгруенции прямых, но и строение элемента комплекса прямых (комплексом прямых в трехмерном пространстве называется трехпараметрическая система прямых), а также строение элемента всего множества прямых пространства.

1. Предварительные замечания

Трехмерное эллиптическое пространство, как известно, можно определить как трехмерную сферу в четырехмерном эвклидовом пространстве, причем диаметрально противоположные точки сферы надо считать за одну точку эллиптического пространства. Будем называть наше эллиптическое пространство R^3. Точки сферы, радиус которой (радиус кривизны эллиптического пространства) мы будем считать равным 1, будем характеризовать единичными векторами четырехмерного эвклидова пространства $x(x^1, x^2, x^3, x^4)$. Расстояние ω между двумя точками x и y пространства R^3 очевидно найдется по формуле

$$\cos\omega = xy = x^1y^1 + x^2y^2 + x^3y^3 + x^4y^4. \qquad (1)$$

Прямые пространства R^3 мы будем характеризовать **плюккеровыми координатами**, т. е. числами

$$r^{ij} = x^iy^j - y^ix^j, \qquad (2)$$

где x^i и y^i — координаты двух точек, лежащих на этой прямой (в дальнейшем для определения прямой мы будем выбирать пары ортогональных точек R^3, т. е. таких точек, что $xy = 0$, и следовательно ω по формуле (1) равно $\frac{\pi}{2}$). Каждой прямой соответствует шесть существенно различных плюккеровых координат. Если умножить плюккеровы координаты на одно и то же число, то они будут определять ту же прямую. Шесть чисел r^{ij}, являющиеся плюккеровыми координатами какой-нибудь прямой, связаны соотношением

$$r^{12}r^{34} + r^{13}r^{42} + r^{14}r^{23} = 0. \qquad (3)$$

Совокупность шести чисел r^{ij} мы будем сокращенно записывать r, а уравнения (2) так:

$$r = [xy]. \qquad (2')$$

В эллиптическом пространстве две прямые всегда имеют наименьшее расстояние ω_1 и наибольшее расстояние ω_2, осуществляющиеся по общим перпендикулярам (они также имеют минимальный и максимальный углы между проходящими через них плоскостями, которые равны тем же числам ω_1 и ω_2). А. П. Норден [1] предложил ввести метрику в множество всех прямых R^3 (это множество прямых мы будем называть P^4), причем «расстоянием» между двумя прямыми он предложил называть число ω, связанное с инвариантами ω_1 и ω_2 этих двух прямых по формуле

$$\cos\omega = \cos\omega_1 \cdot \cos\omega_2. \tag{4}$$

Таким образом наше многообразие P^4 стало метрическим пространством. Оно допускает шестичленную группу, преобразующую его в себя с сохранением метрики (это группа движений R^3). Как нашел Норден, в пятимерном эллиптическом пространстве можно найти четырехмерную поверхность, метрика на которой, индицируемая эллиптической метрикой пятимерного пространства, в точности совпадает с метрикой многообразия P^4. Поэтому мы можем считать, что наше многообразие P^4 погружено в некоторое пятимерное эллиптическое пространство R^5.

В качестве R^5 можно взять введенное И. Люротом и Ф. Клейном [см. (2), §§ 19—23, стр. 79—105] пятимерное проективное пространство, точки которого характеризуются шестерками однородных координат. Тогда те точки этого проективного пространства, координаты которых удовлетворяют уравнению (3), лежат на некоторой четырехмерной поверхности 2-го порядка. С этой поверхностью мы и отождествим наше многообразие P^4, и всюду в дальнейшем будем считать, что многообразие P^4 является поверхностью с уравнением (3) в построенном нами проективном пространстве R^5. Как поверхность пространства R^5 многообразие P^4 имеет прямолинейные образующие и два семейства плоских образующих. Как нашли Люрот и Клейн, прямолинейные образующие многообразия P^4 — не что иное, как плоские пучки прямых пространства R^3, плоские образующие одного семейства — связки прямых пространства R^3, асимптотические линии многообразия P^4 — развертывающиеся поверхности в пространстве R^3.

Точки пространства R^5 мы будем характеризовать шестерками чисел $r^{ij} = -r^{ji}$ $(i, j = 1, 2, 3, 4)$, вообще не связанными соотношением (3). Если для определения тех чисел, которые связаны соотношением (3), мы будем пользоваться уравнениями (2), в которых координаты точек x^i и y^i будут нормированы, а сами эти точки будут ортогональны, то, как легко проверить, и наши числа r^{ij} окажутся нормированными соотношением

$$r^{12^2} + r^{13^2} + r^{14^2} + r^{34^2} + r^{42^2} + r^{23^2} = 1. \tag{5}$$

Потребуем, чтобы координаты и всех остальных точек пространства R^5 были нормированы этим соотношением. Чтобы получить на много-

образии P^4 метрику Нордена, надо, как он нашел, ввести в пространство R^5 эллиптическую метрику с абсолютом

$$r^{12^2}+r^{13^2}+r^{14^2}+r^{34^2}+r^{42^2}+r^{23^2}=0.$$

Тогда расстояние ω между точками пространства R^5, координаты которых r^{ij} и s^{ij}, ввиду условия (5) будет находиться по формуле

$$\cos\omega = rs = r^{12}s^{12}+r^{13}s^{13}+r^{14}s^{14}+r^{34}s^{34}+r^{42}s^{42}+r^{23}s^{23}. \tag{6}$$

Формулой (6) установлено скалярное произведение точек пространства R^5.

Нормаль к многообразию P^4 в пространстве R^5 пересекает P^4 в двух таких его точках, которые (не забудем, что каждая точка многообразия P^4 есть прямая пространства R^3) являются абсолютными полярами в пространстве R^3. Как нашел Норден, линии кривизны многообразия P^4 — такие линейчатые поверхности пространства R^3, что все их прямолинейные образующие параллельны между собой в смысле параллельности Клиффорда. Из каждой точки многообразия P^4 выходит не четыре взаимно-ортогональных линии кривизны, как это вообще имеет место для четырехмерных поверхностей в пространстве R^5, а в каждой точке многообразия P^4 существуют две вполне ортогональные плоские площадки, каждое направление в которых соответствует линии кривизны (является главным направлением). Эти две площадки мы будем называть главными площадками в точке многообразия P^4. Если линейный элемент длины ds, исходящий из какой-нибудь точки многообразия P^4, имеет проекции ds_1 и ds_2 на главные площадки в этой точке, то очевидно первая дифференциальная квадратичная форма многообразия P^4 равна

$$\mathrm{I} = ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2. \tag{7}$$

Норден доказал, что вторая дифференциальная квадратичная форма многообразия P^4 равна

$$\mathrm{II} = ds_1^2 - ds_2^2. \tag{8}$$

В нашей работе ([3]), посвященной геометрии многообразия P^4, мы доказали, что в пространстве R^5 существуют две двумерные плоскости (абсолютно полярные между собой), которые можно назвать осевыми плоскостями многообразия P^4 и которые обладают тем свойством, что каждая точка многообразия P^4 отстоит от каждой из этих плоскостей на расстоянии $\frac{\pi}{4}$. Там же мы показали, что многообразие P^4 можно двумя способами расщепить на ∞^2 (т. е. на двухпараметрическое множество) двумерных сфер, которые имеют радиус $\frac{\pi}{4}$ и центры которых лежат на осевых плоскостях многообразия P^4. Эти сферы в многообразии P^4 — не что иное, как конгруенции клиффордовых парал-

лелей в пространстве R^3. Касательные площадки к двум таким сферам, проходящим через какую-либо точку многообразия, — главные площадки в этой точке. Там же мы показали, что многообразие P^4 можно ∞^2 способов расщепить на ∞^2 двумерных клиффордовых поверхностей, которые имеют радиус $\frac{\pi}{4}$ и оси которых лежат на осевых плоскостях многообразия P^4. Эти поверхности в многообразии P^4 не что иное, как конгруенции всех перпендикуляров к одной прямой. И наконец, в этой работе найдено, что геодезические линии многообразия P^4 — линейчатые геликоиды пространства R^3.

2. Общая задача

Будем изучать окрестность прямой r, на которой лежат две ортогональные точки x и y. Поляру этой прямой обозначим $\bar{r}$, на ней выберем ортогональные друг другу точки u и v. Точки x, y, u, v — четыре вершины автополярного тетраэдра пространства R^3 — выберем за базис координатной системы в нем. Направление в многообразии P^4, исходящее из точки r этого многообразия, будем характеризовать геодезической линией многообразия P^4, проходящей в этом направлении, т. е. линейчатым геликоидом в пространстве R^3, содержащим прямую r этого пространства в качестве образующей.

Рассмотрим какой-нибудь из этих геликоидов. Легко видеть, что параметр p этого геликоида и есть параметр нашей прямой в данном направлении в многообразии прямых. Мы всегда можем считать параметр не большим, по абсолютной величине, чем 1. Обозначим расстояние от точки пересечения одной из осей геликоида с прямой r до точки x через ϑ. Тогда расстояние от точки пересечения другой оси геликоида с прямой r до точки x будет равно $\frac{\pi}{2} - \vartheta$, и координаты этих двух точек, в сокращенной записи, будут

$$x \cos\vartheta + y \sin\vartheta, \quad -x \sin\vartheta + y \cos\vartheta.$$

Обозначим расстояние от точки пересечения первой из осей геликоида с прямой $\bar{r}$ до точки u через θ. Тогда расстояние от точки пересечения второй оси геликоида с прямой $\bar{r}$ до точки u будет равно $\frac{\pi}{2} - \theta$, и координаты этих двух точек будут

$$u \cos\theta + v \sin\theta, \quad -u \sin\theta + v \cos\theta.$$

Легко видеть, что точка $x\cos\vartheta + y\sin\vartheta$ есть горловая точка нашей прямой в данном направлении многообразия прямых, определяемом нашим геликоидом. А полярная плоскость к точке $u\cos\theta + v\sin\vartheta$ есть горловая плоскость нашей прямой в этом же направлении в многообразии прямых. Иногда рассматривают точку $-x\sin\vartheta + y\cos\vartheta$, которую называют второй горловой точкой в данном направлении в многообра-

гии прямых, и плоскость полярную к точке $-u\sin\theta+v\cos\theta$, которую называют второй горловой плоскостью в данном направлении в многообразии прямых. Мы в этой работе не будем о них ничего говорить, так как они вполне определяются первой горловой точкой и первой горловой плоскостью.

Если обозначить через φ угол между горловой плоскостью прямой r и такой же плоскостью некоторой образующей $r(\varphi)$ нашего геликоида (обе плоскости берутся в том же направлении многообразия прямых, которое определяется нашим геликоидом), то очевидно, что прямая $r(\varphi)$ имеет плюккеровы координаты (записанные по сокращенному способу (2′)):

$$r(\varphi)=[(x\cos\vartheta+y\sin\vartheta)\cos p\varphi+(u\cos\theta+v\sin\theta)\sin p\varphi,\\ (-x\sin\vartheta+y\cos\vartheta)\cos\varphi+(-u\sin\theta+v\cos\theta)\sin\varphi]. \qquad (9)$$

Составим выражение

$$\left(\frac{dr(\varphi)}{d\varphi}\right)_{\varphi=0}=p[u\cos\theta+v\sin\theta,\quad -x\sin\vartheta+y\cos\vartheta]+\\ +[x\cos\vartheta+y\sin\vartheta,\quad -u\sin\theta+v\cos\theta].$$

В этой формуле в сокращенном виде записано шесть чисел. Если эти шесть чисел нормировать условием, чтобы сумма их квадратов равнялась единице, мы получим шесть чисел

$$l=\frac{p[u\cos\theta+v\sin\theta,-x\sin\vartheta+y\cos\vartheta]+[x\cos\vartheta+y\sin\vartheta,-u\sin\theta+v\cos\theta]}{\sqrt{1+p^2}}. \qquad (10)$$

Эти шесть чисел являются координатами одной из точек пространства R^5. Если брать все ∞^3 геликоидов, которые можно провести через прямую r пространства R^3, и для каждого из них находить по описанному здесь способу точку l из пространства R^5, то легко видеть, что все эти точки заполнят трехмерную плоскость в пространстве R^5. В пространстве R^5 для точки r из многообразия P^4 имеется касательная четырехмерная плоскость, касающаяся многообразия P^4 в этой точке (мы будем называть ее $R^4(r)$). Нетрудно проверить, что трехмерная плоскость точек l, построенная для точки r многообразия P^4, целиком лежит в $R^4(r)$ и притом расположена так, что является абсолютно полярной плоскостью точки r. Значит, каждая точка l определяет направление в многообразии P^4, исходящее из его точки r.

В трехмерной плоскости точек l можно выбрать четыре взаимно ортогональные точки. Например:

$$e_1=\frac{[uy]+[xv]}{\sqrt{2}};\quad e_2=\frac{[vy]-[xu]}{\sqrt{2}};\quad e_3=\frac{[uy]-[xv]}{\sqrt{2}};\quad e_4=\frac{[vy]+[xu]}{\sqrt{2}}. \qquad (11)$$

Рассмотрим теперь соприкасающееся эвклидово пространство к многообразию P^4 в точке r. Будем обозначать его $E^4(r)$. Оно же будет соприкасающимся эвклидовым пространством и для пространства $R^4(r)$.

В бесконечно малой окрестности точки r геометрия пространства $E^4(r)$ совпадает с геометрией пространства $R^4(r)$. Всякое направление в многообразиях $R^4(r)$ и P^4, исходящее из точки r, можно характеризовать вектором $\mathbf{l}$ в $E^4(r)$ (будем считать $\mathbf{l}$ единичным вектором). В частности, тем направлениям в пространстве $R^4(r)$, которые определяются точками e_1, e_2, e_3, e_4 в $E^4(r)$, соответствуют четыре взаимно ортогональных вектора, которые можно обозначить $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$. Так как точки e_1, e_2, e_3, e_4 образуют базис плоскости точек l, то всякая точка l может быть представлена в виде

$$l = l^1 e_1 + l^2 e_2 + l^3 e_3 + l^4 e_4,$$

где l^1, l^2, l^3, l^4 — числа с суммой квадратов, равной 1. Вектор в пространстве $E^4(r)$, касательный к тому направлению в пространстве $R^4(r)$, которое определяется точкой l, очевидно, разлагается по векторам $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ с теми же коэффициентами l^i. Мы будем обозначать этот вектор $\mathbf{l}$.

Итак, всякому направлению в многообразиях P^4 и $R^4(r)$ соответствует единичный вектор $\mathbf{l}$ в соприкасающемся к ним эвклидовом пространстве $E^4(r)$. Чему же равны компоненты этого вектора в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$, если соответственное направление в многообразии P^4 характеризовалось параметром p, горловой точкой с координатой ϑ и горловой плоскостью с угловой координатой θ? Компоненты l^i этого вектора равны компонентам разложения точки l, соответствующей этому направлению (выражение координат этой точки через значения p, ϑ, θ дано формулой (10)) по точкам e_1, e_2, e_3, e_4 (выражения для которых даны формулами (11)). Эти компоненты разложения ввиду ортонормированности точек e_i равны скалярным произведениям le_i (скалярное произведение точек пространства R^5 мы установили формулой (6)). При составлении этих скалярных произведений учтем правило

$$[ab]\,[cd] = ac \cdot bd - ad \cdot bc.$$

В результате вычислений находим:

$$\left.\begin{aligned} l^1 = le_1 &= \frac{1+p}{\sqrt{2}\sqrt{1+p^2}}\cos(\theta-\vartheta), & l^2 = le_2 &= \frac{1+p}{\sqrt{2}\sqrt{1+p^2}}\sin(\theta-\vartheta), \\ l^3 = le_3 &= \frac{1-p}{\sqrt{2}\sqrt{1+p^2}}\cos(\theta+\vartheta), & l^4 = le_4 &= \frac{1-p}{\sqrt{2}\sqrt{1+p^2}}\sin(\theta+\vartheta). \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Первая главная площадка, как это видно из приведенных выше результатов Нордена, соответствует переходам от прямой r к бесконечно близким прямым, параллельным ей (по Клиффорду) в каком-нибудь (например правом) смысле. Соответствующие геликоиды очевидно — клиффордовы поверхности (радиуса $\frac{\pi}{4}$), их параметр равен $+1$. Вторая главная площадка соответствует переходам от прямой r к бесконечно близ-

ким лево-параллельным к ней прямым. Соответствующие геликоиды (опять клиффордовы поверхности радиуса $\frac{\pi}{4}$) имеют параметр, равный -1. Сравнивая выражения (11) для e_1, e_2, e_3, e_4 с общим выражением (10) для l, видим, что e_1 и e_2 соответствуют геликоидам параметра 1, т. е. $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ направлены по первой главной площадке. Также e_3 и e_4 соответствуют геликоидам параметра -1, т. е. $\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}_4$ направлены по второй главной площадке. Площадки в пространстве $E^4(r)$, определяемые этими парами векторов, естественно называть главными площадками в пространстве $E^4(r)$.

Из формул (9) видно, что если обозначить угол вектора $\mathbf{l}$ с первой главной площадкой через ρ (тогда угол вектора $\mathbf{l}$ со второй главной площадкой равен $\frac{\pi}{2}-\rho$), то ρ определится по формуле

$$\operatorname{tg}\rho=\frac{1-p}{1+p}, \tag{13}$$

т. е. угол наклона вектора $\mathbf{l}$ к главным площадкам определяется только параметром соответствующего ему направления в многообразии прямых. Обратно, легко найти, что

$$p=\frac{\cos\rho-\sin\rho}{\cos\rho+\sin\rho}. \tag{14}$$

Если какой-нибудь линейный элемент длины ds, исходящий из точки r, имеет проекции ds_1 и ds_2 на главные площадки в этой точке, то очевидно

$$ds_1=ds\cos\rho, \qquad ds_2=ds\sin\rho,$$

так что

$$p=\frac{ds_1-ds_2}{ds_1+ds_2}. \tag{15}$$

С другой стороны, нормальная кривизна этого линейного элемента равна отношению дифференциальных форм многообразия P^4, и по формулам (7) и (8)

$$k=\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}=\frac{ds_1^2-ds_2^2}{ds_1^2+ds_2^2}. \tag{16}$$

Из формул (15) и (16) выводим, что нормальная кривизна k линейного элемента многообразия P^4 связана с параметром p этого элемента соотношением

$$k=\frac{2}{p+\frac{1}{p}}. \tag{17}$$

Тогда из (14) и (17) следует, что нормальная кривизна k линейного элемента многообразия P^4 связана с углом ρ наклона этого элемента к первой главной площадке соотношением

$$k=\cos 2\rho. \tag{18}$$

Если мы проведем через точку r многообразия P^4 двумерную плоскую площадку и если эта площадка составит с первой главной площадкой экстремальные углы ρ_1 и ρ_2, то нетрудно найти гауссову кривизну многообразия P^4 в двумерном направлении, определяемом этой площадкой: гауссова кривизна K в данном двумерном направлении в какой-нибудь гиперповерхности эллиптического пространства (многообразие P^4 — гиперповерхность эллиптического пространства R^5), как известно, выражается

$$K = k_1 k_2 + K_0,$$

где k_1 и k_2 — экстремальные значения нормальной кривизны гиперповерхности в данной площадке, K_0 — кривизна объемлющего эллиптического пространства; в нашем случае $K_0 = +1$. Следовательно, пользуясь (18), имеем

$$K = 1 + \cos 2\rho_1 \cos 2\rho_2. \tag{19}$$

Если ввести в $E^4(r)$ полярные координаты

$$l^1 = \cos\varphi \cos\chi \cos\psi, \quad l^2 = \sin\varphi \cos\chi \cos\psi, \quad l^3 = \sin\chi \cos\psi, \quad l^4 = \sin\psi,$$

то для линейного элемента многообразия P^4, выходящего из точки r под углами φ, χ, ψ, как показывает несложное вычисление,

$$p = \frac{\cos\chi \cos\psi - \sqrt{1 - \cos^2\chi \cos^2\psi}}{\cos\chi \cos\psi + \sqrt{1 - \cos^2\chi \cos^2\psi}}, \tag{20}$$

$$k = 2\cos^2\chi \cos^2\psi - 1, \tag{21}$$

$$\vartheta = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{\operatorname{tg}\psi}{\sin\chi} - \varphi\right), \qquad \theta = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{\operatorname{tg}\psi}{\sin\chi} + \varphi\right). \tag{22}$$

3. Теория конгруенций

Конгруенция прямых в пространстве R^3 является, очевидно двумерной поверхностью в многообразии P^4. Элементом конгруенции естественно называть двумерную площадку в многообразии P^4. Вместо такой двумерной площадки, проходящей через точку r многообразия P^4, мы будем рассматривать касательную к ней в точке r двумерную площадку из пространства $E^4(r)$. В этой площадке существуют два направления (соответствующие этим направлениям векторы обозначим $\mathbf{l}_1$ и $\mathbf{l}_2$), которые составляют наибольший и наименьший углы с первой главной площадкой. Эти направления мы будем называть главными направлениями в площадке. Векторы $\mathbf{l}_1$ и $\mathbf{l}_2$ ортогональны друг другу. Произвольное направление в площадке, исходящее из точки r и составляющее с вектором $\mathbf{l}_1$ угол φ, характеризуется вектором $\mathbf{l} = \mathbf{l}_1 \cos\varphi + \mathbf{l}_2 \sin\varphi$. Для нашей площадки применима формула Эйлера из обычной теории поверхностей

$$k = k_1 \cos^2\varphi + k_2 \sin^2\varphi, \tag{23}$$

где k — нормальная кривизна многообразия P^4 в направлении вектора $\mathbf{l}$, k_1 — нормальная кривизна многообразия P^4 в направлении $\mathbf{l}_1$, k_2 — нормальная кривизна многообразия P^4 в направлении $\mathbf{l}_2$.

Из формулы (23), благодаря соотношению (17), следует формула

$$p=\frac{\sqrt{\frac{(1+p_1)^2}{1+p_1^2}\cos^2\varphi+\frac{(1+p_2)^2}{1+p_2^2}\sin^2\varphi}-\sqrt{\frac{(1-p_1)^2}{1+p_1^2}\cos^2\varphi+\frac{(1-p_2)^2}{1+p_2^2}\sin^2\varphi}}{\sqrt{\frac{(1+p_1)^2}{1+p_1^2}\cos^2\varphi+\frac{(1+p_2)^2}{1+p_2^2}\sin^2\varphi}+\sqrt{\frac{(1-p_1)^2}{1+p_1^2}\cos^2\varphi+\frac{(1-p_2)^2}{1+p_2^2}\sin^2\varphi}}, \quad (24)$$

где p — параметр в направлении $\mathbf{l}$, p_1 — параметр в направлении $\mathbf{l}_1$, p_2 — параметр в направлении $\mathbf{l}_2$.

Пусть наша прямая r «в направлении вектора $\mathbf{l}_1$» (т. е. в том направлении в многообразии прямых, которому соответствует вектор $\mathbf{l}_1$ из пространства $E^4(r)$) имеет горловую точку с координатой ϑ_0 и горловую плоскость с угловой координатой θ_0; пусть эта же прямая r «в направлении вектора $\mathbf{l}_2$» имеет горловую точку с координатой ϑ'_0 и горловую плоскость с угловой координатой θ'_0. Так как векторы $\mathbf{l}_1$ и $\mathbf{l}_2$ имеют наибольший и наименьший из углов с главными площадками среди всех векторов нашей площадки, то и проекции этих векторов на каждую из главных площадок ортогональны. Проекции векторов $\mathbf{l}_1$ и $\mathbf{l}_2$ на первую главную площадку составляют с вектором $\mathbf{e}_1$ углы $\theta_0-\vartheta_0$ и $\theta'_0-\vartheta'_0$, и так как эти проекции ортогональны между собой, то

$$\theta'_0-\vartheta'_0=\theta_0-\vartheta_0\pm\frac{\pi}{2}. \quad (25)$$

Проекции векторов $\mathbf{l}_1$ и $\mathbf{l}_2$ на вторую главную площадку составляют с вектором $\mathbf{e}_3$ углы $\theta_0+\vartheta_0$ и $\theta'_0+\vartheta'_0$, и так как эти проекции тоже ортогональны между собой, то

$$\theta'_0+\vartheta'_0=\theta_0+\vartheta_0\pm\frac{\pi}{2}. \quad (26)$$

Составим четыре проекции векторного равенства $\mathbf{l}=\mathbf{l}_1\cos\varphi+\mathbf{l}_2\sin\varphi$ на оси $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ в случае, когда знаки перед $\frac{\pi}{2}$ оба плюс:

$$\left.\begin{aligned}
\sqrt{\frac{1+k}{2}}\cos(\theta-\vartheta)&=\sqrt{\frac{1+k_1}{2}}\cos(\theta_0-\vartheta_0)\cos\varphi-\sqrt{\frac{1+k_2}{2}}\sin(\theta_0-\vartheta_0)\sin\varphi,\\
\sqrt{\frac{1+k}{2}}\sin(\theta-\vartheta)&=\sqrt{\frac{1+k_1}{2}}\sin(\theta_0-\vartheta_0)\cos\varphi+\sqrt{\frac{1+k_2}{2}}\cos(\theta_0-\vartheta_0)\sin\varphi,\\
\sqrt{\frac{1-k}{2}}\cos(\theta+\vartheta)&=\sqrt{\frac{1-k_1}{2}}\cos(\theta_0+\vartheta_0)\cos\varphi-\sqrt{\frac{1-k_2}{2}}\sin(\theta_0+\vartheta_0)\sin\varphi,\\
\sqrt{\frac{1-k}{2}}\sin(\theta+\vartheta)&=\sqrt{\frac{1-k_1}{2}}\sin(\theta_0+\vartheta_0)\cos\varphi+\sqrt{\frac{1-k_2}{2}}\cos(\theta_0+\vartheta_0)\sin\varphi.
\end{aligned}\right\} \quad (27)$$

Деля второе равенство этой системы на первое и четвертое на третье, получаем

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}(\theta-\vartheta) &= \frac{\sqrt{1+k_1}\sin(\theta_0-\vartheta_0)+\sqrt{1+k_2}\cos(\theta_0-\vartheta_0)\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1+k_1}\cos(\theta_0-\vartheta_0)-\sqrt{1+k_2}\sin(\theta_0-\vartheta_0)\operatorname{tg}\varphi} \\ \operatorname{tg}(\theta+\vartheta) &= \frac{\sqrt{1-k_1}\sin(\theta_0+\vartheta_0)+\sqrt{1-k_2}\cos(\theta_0+\vartheta_0)\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1-k_1}\cos(\theta_0+\vartheta_0)-\sqrt{1-k_2}\sin(\theta_0+\vartheta_0)\operatorname{tg}\varphi}. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Отсюда несложным вычислением найдем значения производных $\frac{d\theta}{d\varphi}$ и $\frac{d\vartheta}{d\varphi}$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\theta}{d\varphi} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1+k_1}{1+k_2}}\cos^2\varphi+\sqrt{\frac{1+k_2}{1+k_1}}\sin^2\varphi}+\right. \\ &\qquad\left.+\frac{1}{\sqrt{\frac{1-k_1}{1-k_2}}\cos^2\varphi+\sqrt{\frac{1-k_2}{1-k_1}}\sin^2\varphi}\right), \\ \frac{d\vartheta}{d\varphi} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1+k_1}{1+k_2}}\cos^2\varphi+\sqrt{\frac{1+k_2}{1+k_1}}\sin^2\varphi}-\right. \\ &\qquad\left.-\frac{1}{\sqrt{\frac{1-k_1}{1-k_2}}\cos^2\varphi+\sqrt{\frac{1-k_2}{1-k_1}}\sin^2\varphi}\right). \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Если бы в формулах (25) и (26) мы взяли перед $\frac{\pi}{2}$ в обоих случаях знак минус, мы получили бы такое же самое условие. Отсюда получаем, что условие для $\frac{d\theta}{d\varphi}=0$ есть

$$\operatorname{tg}^2\varphi = -\sqrt{\frac{1-k_2^2}{1-k_1^2}}, \tag{30}$$

условие же для $\frac{d\vartheta}{d\varphi}=0$ есть

$$\operatorname{tg}^2\varphi = +\sqrt{\frac{1-k_2^2}{1-k_1^2}}. \tag{31}$$

Если бы мы задались разными знаками перед $\frac{\pi}{2}$ в формулах (25) и (26), то мы точно таким же образом получили бы, что условие для $\frac{d\theta}{d\varphi}=0$ есть (31), а условие для $\frac{d\vartheta}{d\varphi}=0$ есть (30). Отсюда как следствие получается известный (см. например ([4])) факт, что если любая плоскость, проходящая через прямую r, — горловая для какого-нибудь направления конгруенции, то горловые точки заполняют ограниченный отрезок с серединой в точке с координатой ϑ_0; если же любая точка прямой r — горловая для какого-нибудь направления конгруенции, то горловые плоскости заполняют ограниченный угол, средней плоскостью которого является плоскость с угловой координатой θ_0.

4. Теория комплексов

Комплекс прямых в пространстве R^3 является очевидно трехмерной поверхностью в многообразии P^4. Элементом комплекса естественно называть трехмерную площадку в многообразии P^4. Вместо такой трех-

мерной площадки, проходящей через точку многообразия P^4, мы будем рассматривать касательную к ней в точке r трехмерную площадку из пространства $E^4(r)$. Эта площадка пересекается с каждой из главных площадок по прямой. Легко видеть, что именно эти два направления и направление ортогональное к ним обоим и есть те три взаимно ортогональные направления, по которым осуществляются стационарные значения нормальной кривизны этого трехмерного многообразия. Векторы из пространства $E^4(r)$, касательные к прямым, по которым элемент комплекса пересекается с главными площадками, мы обозначим $\mathfrak{f}_1$ и $\mathfrak{f}_2$ ($\mathfrak{f}_1$ лежит в первой главной площадке, $\mathfrak{f}_2$ — во второй и следовательно перпендикулярен $\mathfrak{f}_1$). Обозначим через $\mathfrak{f}_3$ вектор ортогональный к $\mathfrak{f}_1$ и $\mathfrak{f}_2$. Нормальная кривизна k и параметр p, соответствующие вектору $\mathfrak{f}_1$, очевидно равны $+1$; k и p, соответствующие вектору $\mathfrak{f}_2$, очевидно равны -1. Значения этих величин, соответствующие третьему вектору, обозначим k' и p'. Число k' или p' вполне определяет характер элемента комплекса. Произвольный вектор $\mathfrak{l}$ элемента комплекса может быть разложен по векторам $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \mathfrak{f}_3$:

$$\mathfrak{l} = l^1\mathfrak{f}_1 + l^2\mathfrak{f}_2 + l^3\mathfrak{f}_3.$$

Введем в элемент комплекса полярную систему координат:

$$l^1 = \cos\chi\cos\varphi, \quad l^2 = \cos\chi\sin\varphi, \quad l^3 = \sin\chi.$$

Проекции вектора $\mathfrak{l}$ на главные площадки очевидно равны

$$\cos\rho = \sqrt{\cos^2\chi\cos^2\varphi + \frac{(1+p')^2}{2(1+p'^2)}\sin^2\chi}$$
$$\sin\rho = \sqrt{\cos^2\chi\sin^2\varphi + \frac{(1-p')^2}{2(1+p'^2)}\sin^2\chi}\ .$$

Отсюда по формуле (14)

$$p = \frac{\sqrt{\cos^2\chi\cos^2\varphi + \frac{(1+p')^2}{2(1+p'^2)}\sin^2\chi} - \sqrt{\cos^2\chi\sin^2\varphi + \frac{(1+p')^2}{2(1+p'^2)}\sin^2\chi}}{\sqrt{\cos^2\chi\cos^2\varphi + \frac{(1+p')^2}{2(1+p'^2)}\sin^2\chi} + \sqrt{\cos^2\chi\sin^2\varphi + \frac{(1-p')^2}{2(1+p'^2)}\sin^2\chi}} \tag{32}$$

и по формуле (18)

$$k = \cos 2\varphi\cos^2\chi + k'\sin^2\chi. \tag{33}$$

Пусть наша прямая r «в направлении вектора $\mathfrak{f}_1$», т. е. в том направлении многообразия прямых, которому в пространстве $E^4(r)$ соответствует вектор $\mathfrak{f}_1$, имеет горловую точку с координатой ϑ_1 и горловую плоскость с угловой координатой θ_1; пусть r «в направлении вектора $\mathfrak{f}_2$» имеет горловую точку с координатой ϑ_2 и горловую плоскость с угловой координатой θ_2, а в направлении вектора $\mathfrak{f}_3$ пусть она имеет горловую точку с координатой ϑ_3 и горловую плоскость с угловой

координатой θ_3. Проекция вектора $\mathbf{f}_3$ на первую главную площадку ортогональна вектору $\mathbf{f}_1$, т. е.

$$\theta_3 - \vartheta_3 = \theta_1 - \vartheta_1 \pm \frac{\pi}{2}; \tag{34}$$

проекция этого вектора на вторую главную площадку ортогональна вектору $\mathbf{f}_2$, т. е.

$$\theta_3 - \vartheta_3 = \theta_2 - \vartheta_2 \pm \frac{\pi}{2}. \tag{35}$$

Если в каждой из формул (34), (35) перед $\frac{\pi}{2}$ стоит знак плюс, то таким же способом, как мы это делали для конгруенций, найдем, что если произвольному вектору $\mathbf{l}$ комплекса с угловыми координатами φ и χ соответствует горловая точка с координатой ϑ и горловая плоскость с угловой координатой θ, то эти значения ϑ и θ можно найти из формул

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}(\theta - \vartheta) &= \frac{\sqrt{2}\sin(\theta_1 - \vartheta_1)\cos\chi\cos\varphi + \sqrt{1+k'}\cos(\theta_1 - \vartheta_1)\sin\chi}{\sqrt{2}\cos(\theta_1 - \vartheta_1)\cos\chi\cos\varphi - \sqrt{1+k'}\sin(\theta_1 - \vartheta_1)\sin\chi}, \\ \operatorname{tg}(\theta + \vartheta) &= \frac{\sqrt{2}\sin(\theta_2 + \vartheta_2)\cos\chi\cos\varphi + \sqrt{1-k'}\cos(\theta_2 + \vartheta_2)\sin\chi}{\sqrt{2}\cos(\theta_2 + \vartheta_2)\cos\chi\cos\varphi - \sqrt{1-k'}\sin(\theta_2 + \vartheta_2)\sin\chi}. \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Такой же вид будут иметь формулы, если в каждой из формул (34) и (35) перед $\frac{\pi}{2}$ будет стоять знак минус. Нетрудно вывести аналогичные формулы для случая разных знаков перед $\frac{\pi}{2}$ в формулах (34) и (35).

5. Простейшие специальные конгруенции и комплексы

Прежде чем перейти к рассмотрению частных типов конгруенций и комплексов, мы должны сделать несколько замечаний.

Всякой точке r многообразия P^4 соответствуют на каждой из осевых плоскостей многообразия P^4 точки пересечения нормали к многообразию P^4 в точке r с этими плоскостями. Эта нормаль перпендикулярна к обеим осевым плоскостям. Нетрудно подсчитать координаты точек пересечения. Пусть точка r имеет координаты $(r^{12}, r^{13}, r^{14}, r^{34}, r^{42}, r^{23})$. Легко проверить, что точки пространства R^5

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

лежат на первой осевой плоскости, где и составляют ортонормированный базис, а также что точки пространства

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0,\right), \quad \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right),$$
$$\left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

лежат на второй осевой плоскости, где тоже составляют ортонормированный базис. Зная базисные точки этих плоскостей, нетрудно найти проекции точки r на эти плоскости. Если найти эти проекции, а затем в каждой из осевых плоскостей установить координацию так, чтобы найденные нами базисные точки на каждой из осевых плоскостей получили координаты (1, 0, 0,), (0, 1, 0) и (0, 0, 1), то мы убедимся, что координаты проекции точки многообразия на первую осевую плоскость есть

$$(r^{12}+r^{34},\ r^{13}+r^{42},\ r^{14}+r^{23}), \tag{37}$$

а координаты проекции точки r на вторую осевую плоскость есть

$$(r^{12}-r^{34},\ r^{13}-r^{42},\ r^{14}-r^{23}). \tag{38}$$

Каждую из этих осевых плоскостей можно осуществить независимо в виде двумерной эвклидовой сферы в трехмерном эвклидовом пространстве. Вектор $\mathbf{r}$ с компонентами (37) (этот вектор, в силу того что его компоненты удовлетворяют формулам (3) и (5), единичен) является радиусом-вектором сферы, которую можно обозначить S_1^2; вектор $\mathbf{l}$ с компонентами (38) (тоже единичный в силу (3) и (5)) опишет сферу S_2^2. В сферах S_1^2 и S_2^2, пары точек на которых изображают, как мы видели, прямые эллиптического пространства R^3, легко узнать открытые еще в конце прошлого века сферы Фубини [(2), § 80, стр. 319—324]. Следовательно сферы Фубини—не что иное, как осевые плоскости многообразия P^4.

Пара точек—по точке на каждой из осевых плоскостей—изображает не одну, а две точки многообразия P^4: две «диаметрально противоположные точки», являющиеся (опять-таки не забудем, что каждая точка многообразия P^4 есть прямая пространства R^3) абсолютными полярами пространства R^3. Чтобы получить однозначность при переходе от пар точек на осевых плоскостях к точкам самого многообразия P^4, надо считать осевые плоскости двулистными, а при переходе осевых плоскостей к сферам Фубини не отождествлять диаметрально противоположные точки сфер Фубини.

Для наглядности представим себе, что при переходе от первой осевой плоскости многообразия P^4 к первой сфере Фубини S_1^2 первый лист осевой плоскости переходит в верхнюю полусферу сферы S_1^2, а второй лист—в нижнюю, и так же при переходе от второй осевой плоскости к сфере S_2^2. Но тут появляется неоднозначность при переходе в другую сторону: если на каждой из сфер Фубини мы имеем по точке, то этой паре точек соответствует прямая пространства R^3. Если мы одну из этих точек заменяем на диаметрально противоположную, то, как видно из выражений (37) и (38), этой паре точек будет соответствовать полярная прямая к первоначальной прямой. А если обе точки на сферах Фубини заменить на диаметрально противоположные, то, как видно из тех же выражений, мы получим снова первоначальную прямую (сам Фубини выходит из этого затруднения тем, что снабжает

прямые ориентацией и считает, что при замене обеих точек на его сферах на диаметрально противоположные он получает ту же прямую, но с обратной ориентацией). Так как нас интересует инфинитезимальная теория, то эта неоднозначность не причинит нам неудобств.

Всякая конгруенция прямых пространства R^3 определяет отображение одной осевой плоскости на другую (причем мы будем считать осевые плоскости двулистными) или, что то же, отображение одной сферы Фубини на другую. Для конгруенций это отображение, вообще говоря, взаимно-однозначное. Во всех работах по теории конгруенций в эллиптическом пространстве конгруенции классифицировались по типу отображений сфер Фубини, которые они определяют. Мы сохраним эту классификацию и те типы конгруенций, которые здесь введем впервые, будем классифицировать по тому же принципу, но вместо слов «сферы Фубини» будем всюду говорить «осевые плоскости». Комплексы прямых пространства R^3 тоже определяют отображение одной осевой плоскости на другую, и хотя это отображение неоднозначно в общем случае ни в одну сторону, для некоторых частных типов комплексов это отображение может быть охарактеризовано простыми способами.

Элемент конгруенции в окрестности прямой r пространства R^3 также определяет отображение главных площадок пространства $E^4(r)$ друг на друга: всякая точка на плоской площадке, изображающей в $E^4(r)$ элемент конгруенции, определяет основания перпендикуляров на каждой из главных площадок и этим определяет, вообще говоря, взаимно-однозначное отображение одной из них на другую. Так как первые главные площадки — это касательные плоскости к сферам радиуса $\frac{\pi}{2}$ с центрами на первой осевой плоскости, вторые главные площадки — касательные плоскости к сферам того же радиуса с центрами на второй осевой плоскости, то отображение главных площадок, определяемое элементом конгруенции, в бесконечно малом совпадает с отображением осевых плоскостей, определяемым конгруенцией в целом. (То же, за исключением взаимно-однозначности отображения, относится к отображению главных площадок, определяемому элементом комплекса.)

Теперь можно перейти к рассмотрению частных типов конгруенций и комплексов.

Изотропная конгруенция ([2,4,5]) может быть определена как конгруенция, устанавливающая конформное отображение между (двулистными) осевыми плоскостями. Значит, ее элемент определяет соответствие подобия между главными площадками. Различают два типа изотропных конгруенций — *собственно-изотропные* и *псевдоизотропные*. Две конгруенции одного типа обладают тем свойством, что если построить с их помощью отображения первой осевой плоскости на вторую, то результаты этого отображения на второй осевой плоскости можно перевести один в другой с помощью конформного отображения первого рода; если же конгруенции разных типов, то построив с их помощью такие же отображения первой осевой плоскости на вторую,

результаты этих отображений на второй плоскости можно перевести один в другой с помощью конформного отображения второго рода. Конгруенция одного типа может быть превращена в конгруенцию другого типа абсолютно-полярным преобразованием пространства R^3. Для того чтобы двумерная плоская площадка, изображающая в $E^4(r)$ элемент такой конгруенции, определяла соответствие подобия между главными площадками, все углы нашей площадки с каждой из главных площадок должны быть равны между собой.

Известно, что в четырехмерном эвклидовом пространстве через одну точку на двумерной плоскости можно провести двумерную же плоскость, все углы которой с первой плоскостью будут равны между собой. Известно также, что через каждую прямую, проходящую через эту точку, можно провести две таких плоскости, так что всего существует два семейства по ∞^2 плоскостей, удовлетворяющих поставленному условию. Так как $E^4(r)$ — четырехмерное эвклидово пространство, то таких площадок в нем, которые проходят через точку r и все углы которых с первой, например, площадкой будут равны между собой (это и есть те площадки, которые соответствуют элементам изотропных конгруенций), существует два семейства по ∞^2 площадок в каждом. Площадки одного семейства соответствуют элементам изотропных конгруенций одного типа, площадки другого семейства — элементам изотропных конгруенций другого типа. Так как все углы площадки, изображающей элемент конгруенции с первой главной площадкой, равны между собой, то по формуле (18) $k = k_1 = k_2$. Тогда формулы (27), выведенные для того случая, когда в формулах (25) и (26) перед $\frac{\pi}{2}$ стоят одинаковые знаки, дают нам $\vartheta = \vartheta_0$, $\theta = \theta_0 + \varphi$. Изотропные конгруенции такого типа являются прямым обобщением изотропных конгруенций эвклидова пространства (на каждом луче у них лишь одна горловая точка); они представляют собой один из двух типов изотропных конгруенций; конгруенции с этим свойством естественно назвать собственно-изотропными конгруенциями. Формулы типа (27), выведенные для того случая, когда в формулах (25) и (26) перед $\frac{\pi}{2}$ стоят разные знаки, дают нам $\vartheta = \vartheta_0 + \varphi$, $\theta = \theta_0$. Такие изотропные конгруенции естественно назвать псевдо-изотропными. У них очевидно на каждом луче единственная горловая плоскость.

Нормальная конгруенция [2,4,5] — конгруенция нормалей к системе параллельных поверхностей в пространстве R^3. Она определяет такое соответствие осевых плоскостей, при котором сохраняется площадь. Но кроме нормальных конгруенций этим свойством обладает еще один класс конгруенций, так называемые псевдо-нормальные конгруенции, которые могут быть получены из нормальных абсолютно-полярным преобразованием пространства R^3. Если с помощью двух конгруенций одного из этих типов построить отображение первой осевой плоскости на вторую, то два изображения одной ориентированной окружности из первой плоскости будут иметь на второй плоскости одинаковую ориентацию; если же брать конгруенции разных типов,

то два изображения одной ориентированной окружности на первой плоскости будут иметь на второй плоскости разные ориентации. Двумерная площадка, изображающая в $E^4(r)$ элемент такой конгруенции, очевидно тоже определяет соответствие между главными площадками, сохраняющее площадь. Для этого экстремальные углы двумерной площадки, изображающей элемент такой конгруенции, с каждой из главных площадок должны быть дополнительными до $\frac{\pi}{2}$. Формула (18) показывает, что в таком случае $k_1 = -k_2$.

Из каждой точки многообразия P^4 очевидно исходит круглый трехмерный конус асимптотических направлений многообразия P^4. По этим направлениям обращается в нуль форма (8), следовательно для линейного элемента длины ds, выходящего из точки r в этом направлении, будет: $ds_1 = ds_2$, векторы в пространстве $E^4(r)$, соответствующие этим направлениям, наклонены к каждой из главных площадок на угол $\frac{\pi}{4}$. Площадка, экстремальные углы которой с каждой из главных площадок — дополнительные до $\frac{\pi}{2}$, пересекает асимптотический конус по двум ортогональным его образующим. То-есть асимптотические направления на площадке пространства $E^4(r)$, изображающей элемент нормальной или псевдо-нормальной конгруенции, ортогональны между собой и следовательно делят пополам углы между главными направлениями в этой площадке. Направления площадки, обладающие тем свойством, что горловые точки (или горловые плоскости) «в этом направлении в многообразии прямых» — граничные, можно назвать граничными направлениями в элементе конгруенции. Угол φ между граничным направлением и ближайшим к нему главным дается формулой (31). Условие $k_1 = k_2$ показывает, что оба эти угла равны $\frac{\pi}{4}$, т. е. граничные направления тоже делят пополам углы между главными направлениями в площадке, изображающей элемент конгруенции, и следовательно совпадают с асимптотическими направлениями в элементе конгруенции.

Конгруенция нормалей к поверхности нулевой гауссовой кривизны ([2,4,5]) определяет соответствие между линией на одной осевой плоскости и линией на другой осевой плоскости. Двумерная площадка, изображающая в $E^4(r)$ элемент такой конгруенции, пересекается (ортогонально) с обеими главными площадками. Конгруенция может быть расщеплена на семейство линейчатых поверхностей, составленных из правых клиффордовых поверхностей, и семейство таких же поверхностей, составленных из левых параллелей. Как показывает формула (19), гауссова кривизна многообразия P^4 в двумерном направлении, определяемом касательной площадкой к этой конгруенции, равна нулю. Частный случай ее — конгруенция перпендикуляров к одной прямой (конгруенция нормальна к семейству коаксиальных клиффордовых поверхностей).

Параболическая конгруенция. Эта конгруенция определяет такое соответствие осевых плоскостей, при котором система ∞^1 кривых

на одной плоскости переходит в такую же систему на другой плоскости с сохранением длин кривых. Если линия на одной осевой плоскости переходит в линию на другой плоскости с сохранением длин, то та линия многообразия P^4, которая определяет это соответствие в каждой точке, составляет углы $\frac{\pi}{4}$ с каждой из главных площадок этой точки. Но направления, составляющие угол $\frac{\pi}{4}$ с каждой из главных площадок, — асимптотические направления многообразия P^4. Линия, в каждой точке касающаяся асимптотического направления, — асимптотическая линия многообразия P^4, т. е., как мы уже знаем, развертывающаяся поверхность пространства R^3.

Параболическая конгруенция расщепляется на одно семейство развертывающихся поверхностей. Двумерная площадка, изображающая в пространстве $E^4(r)$ элемент такой конгруенции, должна касаться асимптотического конуса данной точки; одно из экстремальных значений параметра (и следовательно нормальной кривизны) должно равняться нулю. Гауссова кривизна многообразия P^4 в двумерном направлении определяется площадкой, касательной к этой конгруенции, и как показывает формула (19), равна 1.

Изометрическая конгруенция. Эта конгруенция определяет конгруентное отображение осевых плоскостей. Такая конгруенция должна быть одновременно изотропной, нормальной и параболической. Все значения параметра этой конгруенции равны нулю. Все углы, которые ее элемент составляет с главными площадками, равны $\frac{\pi}{4}$. Двумерная площадка, изображающая в пространстве $E^4(r)$ элемент такой конгруенции, есть плоская образующая асимптотического конуса в данной точке. Легко доказать, что всякая такая конгруенция — связка прямых. Псевдо-изометрическая конгруенция определяет зеркальное отображение особых плоскостей. Такая конгруенция должна быть одновременно псевдо-изотропной, псевдо-нормальной и параболической. Элемент такой конгруенции есть плоская образующая другого семейства асимптотического конуса в данной точке. Легко видеть, что всякая такая конгруенция — плоское поле прямых.

Необратимая конгруенция определяет такое соответствие осевых плоскостей, что двумерная область на одной из них переходит в линию на другой. Двумерная площадка, изображающая в пространстве $E^4(r)$ элемент такой конгруенции, должна пересекаться с одной из главных площадок, а значит, одно из экстремальных значений параметра равно ± 1. В этом случае, как следует из формулы (28), ни $\frac{d\theta}{d\varphi}$, ни $\frac{d\vartheta}{d\varphi}$ не может обратиться в нуль, и нет ни граничных точек, ни граничных плоскостей. Конгруенция может быть расщеплена на семейство линейчатых поверхностей, составленных из правых или из левых клиффордовых параллелей.

Необратимый комплекс определяет соответствие осевых плоскостей, однозначное в одну сторону (в общем случае это соответствие не однозначно ни в одну сторону). Трехмерная площадка, изображающая в $E^4(r)$ элемент комплекса, содержит целиком одну из главных площадок. Комплекс состоит из ∞^1 конгруенций одноименных параллелей. Стационарные значения параметра для направлений в этом комплексе: $+1$, $+1$ и -1 (или $+1$, -1, -1).

Параболический комплекс определяет соответствие осевых плоскостей, при котором система ∞^2 кривых на одной плоскости переходит в такую же систему на другой плоскости с сохранением длин кривых. Следовательно комплекс состоит из ∞^2 развертывающихся поверхностей пространства R^3. Элемент комплекса касается асимптотического конуса в данной точке многообразия P^4. Стационарные значения параметра для направлений в этом комплексе: $+1, 0, -1$. Частные случаи: комплекс всех касательных к поверхности (∞^2 пучков), комплекс всех прямых, пересекающих кривую (∞^1 связок), и комплекс всех прямых, поляры которых пересекают кривую (∞^1 плоских полей).

Институт математики
Московского гос. университета

Поступило
19 XII 1940

ЛИТЕРАТУРА

[1] Норден А. П., Геометрия линейчатого пространства, курс, чит. в Моск. гос. унив. в 1938/39 г. (гот. к печати).
[2] Клейн Ф., Высшая геометрия, 1939.
[3] Розенфельд Б. А., Внутренняя геометрия множества прямых эллиптического пространства (печ. в Учен. записках Моск. гос. унив.).
[4] Coolidge L., The elements of non-euclidian geometry, Oxford, 1909 (Ch. 16, p. 215 — 235).
[5] Бродский М. С., Конгруенции прямых эллиптического пространства, Одесса, 1940, кандид. диссерт. (рукопись).

B. ROSENFELD. THÉORIE DES CONGRUENCES ET DES COMPLEXES DE DROITES DANS UN ESPACE ELLIPTIQUE

RÉSUMÉ

En suivant A. Norden (¹) introduisons dans la multiplicité des droites de l'espace elliptique à 3 dimensions R^3 une métrique en nommant «distance» entre deux droites à distances extrémales ω_1 et ω_2 le nombre ω défini par la formule

$$\cos\omega = \cos\omega_1 \cdot \cos\omega_2 .$$

A. Norden a démontré que la multiplicité considérée (nous la nommons multiplicité P^4) ainsi métrisée est isométrique à une surface du second ordre à 4 dimensions située dans l'espace elliptique à 5 dimensions R^5.

Dans le présent article j'étudie la structure du voisinage d'une droite r dans une congruence, un complexe, et dans toute la multiplicité P^4.

A chaque direction dans la multiplicité des droites il correspond sur la droite r une valeur déterminée du paramètre et des positions déterminées du point de striction et du plan de striction. D'autre part, le voisinage da la droite r est représenté par le voisinage d'un point sur une surface à 4 dimensions dans l'espace R^5. Construisons sur cette surface au point correspondant à la droite r un espace euclidien tangent $E^4(r)$. A chaque direction sur la surface à 4 dimensions issue du point qui représente la droite r il correspond un vecteur unitaire dans l'espace $E^4(r)$. Si l'on choisit convenablement dans $E^4(r)$ une base formée de 4 vecteurs orthonormaux $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$, les composantes l^1, l^2, l^3, l^4 d'un vecteur arbitraire $\mathbf{l}$ pour cette base seront liées avec la valeur p du paramètre, la coordonnée ϑ du point de striction et la coordonnée angulaire θ du plan de striction de la direction correspondante dans la multiplicité des droites par les formules

$$l^1 = \frac{1+p}{\sqrt{2}\sqrt{1+p^2}}\cos(\theta-\vartheta), \quad l^2 = \frac{1+p}{\sqrt{2}\sqrt{1+p^2}}\sin(\theta-\vartheta),$$

$$l^3 = \frac{1-p}{\sqrt{2}\sqrt{1+p^2}}\cos(\theta+\vartheta), \quad l^4 = \frac{1-p}{\sqrt{2}\sqrt{1+p^2}}\sin(\theta+\vartheta).$$

Il en résulte que si pour une certaine direction dans la multiplicité des droites la valeur du paramètre est égale à p et pour la direction correspondante sur la surface à 4 dimensions la valeur de la courbure normale de cette surface est égale à k, on a

$$k = \frac{2}{p+\dfrac{1}{p}}.$$

Il correspond à un élément de la congruence dans $E^4(r)$ un élément plan à 2 dimensions. Les vecteurs de cet élément correspondant aux valeurs extrémales du paramètre seront désignés par $\mathbf{l}_1$ et $\mathbf{l}_2$. Alors un vecteur arbitraire de cet élément est $\mathbf{l} = \mathbf{l}_1\cos\varphi + \mathbf{l}_2\sin\varphi$. Le paramètre correspondant à ce vecteur s'exprime par l'angle φ et les valeurs extrémales p_1 et p_2 du paramètre suivant la formule

$$p = \frac{\sqrt{\dfrac{(1+p_1)^2}{1+p_1^2}\cos^2\varphi + \dfrac{(1+p_2)^2}{1+p_2^2}\sin^2\varphi} - \sqrt{\dfrac{(1-p_1)^2}{1+p_1^2}\cos^2\varphi + \dfrac{(1-p_2)^2}{1+p_2^2}\sin^2\varphi}}{\sqrt{\dfrac{(1+p_1)^2}{1+p_1^2}\cos^2\varphi + \dfrac{(1+p_2)^2}{1+p_2^2}\sin^2\varphi} + \sqrt{\dfrac{(1-p_1)^2}{1+p_1^2}\cos^2\varphi + \dfrac{(1-p_2)^2}{1+p_3^2}\sin^2\varphi}}.$$

La coordonnée ϑ du point de striction et la coordonnée θ du plan de striction correspondant au vecteur $\mathbf{l}$ s'expriment par l'angle φ, les valeurs

θ_0 et ϑ_0 du vecteur $\mathbf{l}_1$ et les valeurs extrémales de la courbure normale k_1 et k_2 suivant les formules

$$\operatorname{tg}(\theta-\vartheta)=\frac{\sqrt{1+k_1}\sin(\theta_0-\vartheta_0)\pm\sqrt{1+k_2}\cos(\theta_0-\vartheta_0)\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1+k_1}\cos(\theta_0-\vartheta_0)\mp\sqrt{1+k_2}\sin(\theta_0-\vartheta_0)\operatorname{tg}\varphi},$$

$$\operatorname{tg}(\theta+\vartheta)=\frac{\sqrt{1-k_1}\sin(\theta_0+\vartheta_0)\pm\sqrt{1-k_2}\cos(\theta_0+\vartheta_0)\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1-k_1}\cos(\theta_0+\vartheta_0)\mp\sqrt{1-k_2}\sin(\theta_0+\vartheta_0)\operatorname{tg}\varphi}.$$

Alors les valeurs de l'angle φ correspondant aux directions dans l'ensemble des droites pour lesquelles les points de striction ou bien les plans de striction sont f r o n t i è r e s, s'obtiennent de la formule

$$\operatorname{tg}^2\varphi=\sqrt{\frac{1-k_2^2}{1-k_1^2}}.$$

Il correspond à un élément du complexe dans $E^4(r)$ un élément plan à 3 dimensions. Les vecteurs de cet élément correspondant aux valeurs stationnaires du paramètre (qui sont égales à $+1$, -1 et p') seront désignés par $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$. Alors un vecteur arbitraire de cet élément est

$$\mathbf{l}=\mathbf{f}_1\cos\chi\cos\varphi+\mathbf{f}_2\cos\chi\sin\varphi+\mathbf{f}_3\sin\chi.$$

Le paramètre correspondant à ce vecteur s'exprime par les angles φ et χ et la valeur p' suivant la formule

$$p=\frac{\sqrt{\cos^2\chi\cos^2\varphi+\frac{(1+p')^2}{2(1+p'^2)}\sin^2\chi}-\sqrt{\cos^2\chi\sin^2\varphi+\frac{(1-p')^2}{2(1+p'^2)}\sin^2\chi}}{\sqrt{\cos^2\chi\cos^2\varphi+\frac{(1+p')^2}{2(1+p'^2)}\sin^2\chi}+\sqrt{\cos^2\chi\sin^2\varphi+\frac{(1-p')^2}{2(1+p'^2)}\sin^2\chi}}.$$

La coordonnée ϑ du point de striction et la coordonnée angulaire θ du plan de striction correspondant au vecteur $\mathbf{l}$ s'expriment par les angles φ et χ, les valeurs $\theta_1, \vartheta_1, \theta_2, \vartheta_2$ pour les vecteurs $\mathbf{f}_1$ et $\mathbf{f}_2$ et la valeur stationnaire de la courbure normale k' suivant les formules

$$\operatorname{tg}(\theta-\vartheta)=\frac{\sqrt{2}\sin(\theta_1-\vartheta_1)\cos\chi\cos\varphi\pm\sqrt{1+k'}\cos(\theta_1-\vartheta_1)\sin\chi}{\sqrt{2}\cos(\theta_1-\vartheta_1)\cos\chi\cos\varphi\mp\sqrt{1+k'}\sin(\theta_1-\vartheta_1)\sin\chi},$$

$$\operatorname{tg}(\theta+\vartheta)=\frac{\sqrt{2}\sin(\theta_2+\vartheta_2)\cos\chi\sin\varphi\pm\sqrt{1-k'}\cos(\theta_2+\vartheta_2)\sin\chi}{\sqrt{2}\cos(\theta_2+\vartheta_2)\cos\chi\sin\varphi\mp\sqrt{1-k'}\sin(\theta_2+\vartheta_2)\sin\chi}.$$

Les résultats obtenus s'appliquent à certains types particuliers de congruences et de complexes qu'on peut classifier suivant les valeurs extrémales et stationnaires du paramètre. Dans notre article nous consi-

dérons 3 congruences connues par les mémoires [2,4,5]: la congruence isotrope ($p_1 = p_2$), la congruence normale ($p_1 = -p_2$) et la congruence des normales à une surface à courbure de Gauss nulle ($p_1 = +1$, $p_2 = -1$). D'ailleurs nous considérons les congruences: parabolique (p_1 ou bien $p_2 = 0$), isométrique ($p_1 = p_2 = 0$), non invertible (l'une des valeurs p_1, $p_2 = \pm 1$, l'autre $\neq \pm 1$), le complexe non invertible ($p_1 = +1$, $p_2 = -1$, $p_3 = \pm 1$), le complexe parabolique ($p_1 = +1$, $p_2 = -1$, $p_3 = 0$).

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADEMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 5 (1941), 127—158 Série mathématique

Н. А. АРТЕМЬЕВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ОСУЩЕСТВИМОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ

(*Представлено академиком* **С. Н. Бернштейном**)

Устанавливается достаточный признак неосуществимости для одного класса периодических движений. Этот признак применяется к исследованию осуществимости точки равновесия консервативной системы и к двум задачам небесной механики. Исследуется осуществимость либрационных точек L_4, L_5 в ограниченной задаче трех тел и осуществимость круговых орбит. Первая задача тесно связана с вопросом о движении Троянцев, вторая задача—с вопросом о распределении астероидов.

В своих предыдущих работах я ввел понятие осуществимых движений и траекторий и провел исследование осуществимости в случае, когда все характеристические показатели невозмущенного движения имеют отрицательные вещественные части ([1]), и в случае, когда один из характеристических показателей равен нулю, а все остальные имеют отрицательные вещественные части ([2]). Обе полученные в этих работах теоремы не могут быть применены к исследованию осуществимости периодического движения консервативной системы, так как в случае консервативной системы сумма характеристических показателей $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ периодического движения

$$\sigma_1 + \ldots + \sigma_n = il,$$

где l—целое число или нуль, и следовательно даже для устойчивости необходимым условием является равенство нулю вещественных частей всех характеристических показателей.

Между тем исследование осуществимости периодических движений консервативной системы имеет большое значение для приложений—в частности для небесной механики.

В § 1 этой работы я устанавливаю достаточный признак неосуществимости одного класса периодических движений, затем применяю его в § 2 к исследованию консервативной системы, в §§ 3, 4—к исследованию осуществимости либрационных точек L_4, L_5 в ограниченной задаче трех тел и наконец в §§ 5,6—к исследованию осуществимости круговых орбит. Эта последняя задача тесно связана с задачей о распределении астероидов.

1

Рассмотрим динамическую систему четного порядка

$$\frac{dx_j}{dt} = X_j(t, x_1, \ldots, x_n), \quad j = 1, \ldots, n = 2m, \tag{1}$$

правые части которой — периодические функции t периода 2π, удовлетворяющие условиям

1° $X_j, \frac{\partial X_j}{\partial x_k}$, $j, k = 1, \ldots, n$, — вещественны, однозначны и непрерывны в области $\bar{G}_{1,n} \begin{cases} t \in [0, +\infty) \\ \{x\} \in \bar{G}_n \end{cases}$, где $\bar{G}_n$ — область n-мерного пространства $x_1, \ldots, x_n$;

2° $\frac{\partial X_j}{\partial x_k}$, $j, k = 1, \ldots, n$, удовлетворяют в области $\bar{G}_{1,n}$ относительно $x_1, \ldots, x_n$ условиям Липшица

$$\left| \frac{\partial X_j}{\partial x_k}\Big|_{x'} - \frac{\partial X_j}{\partial x_k}\Big|_{x} \right| \leqslant L \sum_{k=1}^{n} |x'_k - x_k|.$$

Пусть* $\{f(t)\}$ — периодическое движение системы (1), периода 2π. Исследуем осуществимость этого движения по отношению к возмущениям $Y_j(t, y_1, \ldots, y_n)$, $j = 1, \ldots, n$, периодического характера, периода 2π

$$\frac{dy_j}{dt} = X_j(t, y_1, \ldots, y_n) + \varepsilon Y_j(t, y_1, \ldots, y_n), \quad j = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

предполагая пока, что функции Y_j также удовлетворяют условиям 1°, 2°. Полагаем

$$y_j = f_j(t) + z_j(t), \quad j = 1, \ldots, n \tag{3}$$

и составляем уравнения возмущенного движения:

$$\frac{dz_j}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial X_j}{\partial y_k}\Big|_f \cdot z_k + R_j(t, z_1, \ldots, z_n) + \varepsilon Y_j(t, f_1 + z_1, \ldots, f_n + z_n) \equiv$$
$$\equiv Z_j(t, \varepsilon, z_1, \ldots, z_n), \quad j = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

Уравнения (4) можно представить также в виде

$$\frac{dz_j}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial X_j}{\partial y_k}\Big|_f \cdot z_k + \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial Y_j}{\partial y_k}\Big|_f \cdot z_k + \varepsilon Y_j(t, f_1, \ldots, f_n) +$$
$$+ R_j^*(t, z_1, \ldots, z_n), \quad j = 1, \ldots, n. \tag{5}$$

Рассмотрим теперь уравнения в вариациях

$$\frac{d\bar{z}_j}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial X_j}{\partial y_k}\Big|_f \cdot \bar{z}_k, \quad j = 1, \ldots, n \tag{6}$$

и наряду с ними также линейную систему

$$\frac{d\tilde{z}_j}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial X_j}{\partial y_k}\Big|_f \cdot \tilde{z}_k + \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial Y_j}{\partial y_k}\Big|_f \cdot \tilde{z}_k, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{7}$$

* Не поясненные в тексте обозначения даны в предыдущих работах ( ).

Предположим, что характеристические показатели системы (6) все различные и притом чисто мнимые, попарно сопряженные. Обозначим их

$$\left.\begin{aligned} \sigma_k &= i\omega_k, & k &= 1, \ldots, m, \\ \sigma_l &= -i\omega_{l-m}, & l &= m+1, \ldots, 2m. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Таким образом, матрица $\overline{Z}(t)$ фундаментальной системы решений в канонической форме имеет вид

$$\overline{Z}(t) = \left\| \begin{array}{lll} e^{i\omega_1 t}\theta_{11}(t), & \ldots, & e^{i\omega_1 t}\theta_{1,2m}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ e^{i\omega_m t}\theta_{m1}(t), & \ldots, & e^{i\omega_m t}\theta_{m,2m}(t) \\ e^{-i\omega_1 t}\theta_{m+1,1}(t), & \ldots, & e^{-i\omega_1 t}\theta_{m+1,2m}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ e^{-i\omega_m t}\theta_{2m,1}(t), & \ldots, & e^{-i\omega_m t}\theta_{2m,2m}(t) \end{array} \right\| \tag{9}$$

где $\theta_{jk}(t)$ — периодические функции t периода 2π.

Матрицу $\overline{\overline{Z}}(t)$ фундаментальной системы решений можно представить также в вещественной форме:

$$\overline{\overline{Z}}(t) = \left\| \begin{array}{lll} \vartheta_{11}(t)\cos\omega_1 t, & \ldots, & \vartheta_{1,2m}(t)\cos\omega_1 t \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \vartheta_{m1}(t)\cos\omega_m t, & \ldots, & \vartheta_{m,2m}(t)\cos\omega_m t \\ \vartheta_{m+1,1}(t)\sin\omega_1 t, & \ldots, & \vartheta_{m+1,2m}(t)\sin\omega_1 t \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \vartheta_{2m,1}(t)\sin\omega_m t, & \ldots, & \vartheta_{2m,2m}(t)\sin\omega_m t \end{array} \right\| \tag{10}$$

где $\vartheta_{jk}(t)$ — периодические функции t периода 2π.

Характеристические показатели системы (7) суть непрерывные функции ε вблизи $\varepsilon = 0$, причем при $\varepsilon = 0$ они обращаются в характеристические показатели системы (6). Действительно, имеет место следующая

ЛЕММА. *Пусть задана система линейных однородных уравнений*

$$\frac{dx_j}{dt} = \sum_{k=1}^{n} A_{jk}(t, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)\, x_k, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{11}$$

коэффициенты которой удовлетворяют условиям:

1. $A_{jk}(t, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$ *— вещественные однозначные и непрерывные функции своих аргументов в области* $\overline{\Omega}$,

$$\overline{\Omega}\begin{cases} t \geqslant 0 \\ |\varepsilon_k| \leqslant \mu \end{cases} \quad k = 1, \ldots, m.$$

2. $A_{jk}(t, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m) = A_{jk}(t + 2\pi, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m), \quad j, k = 1, \ldots, n.$

Тогда матрица любой фундаментальной системы решений, а также ее характеристические показатели $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ *являются непрерывными* * *функциями параметров* $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ *в области* $\overline{\Omega}$.

* Матрицу $A = \| a_{jk} \|$ мы называем непрерывной функцией ε, если каждый ее элемент есть непрерывная функция ε. Мы предполагаем в лемме, что начальные условия не зависят от $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$.

Доказательство. В силу сделанных предположений прежде всего мы можем утверждать, что система (11) имеет решение, удовлетворяющее любым начальным условиям. Обозначим через $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ характеристические показатели решения системы (11), а через $\Theta(t)$ матрицу фундаментальной системы решений.

На основании теоремы о непрерывной зависимости решения от параметров непосредственно следует, что каждый элемент матрицы Θ, а следовательно и сама матрица Θ есть непрерывная функция $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$. Чтобы доказать, что характеристические показатели $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ суть также непрерывные функции параметров $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$, мы рассмотрим характеристическое уравнение, соответствующее матрице B интегральной подстановки фундаментальной системы Θ. Имеем

$$\Theta(t+2\pi, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m) = \mathrm{B} \cdot \Theta(t, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m). \tag{12}$$

Полагая в (12) $t=0$ и замечая, что определитель $D(\Theta)$ матрицы Θ отличен от нуля в области $\overline{\Omega}$, находим

$$\mathrm{B} = \Theta^{-1}(0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m) \cdot \Theta(2\pi, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m). \tag{13}$$

Так как в силу сказанного $D(\Theta(0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)) \neq 0$, то правая часть равенства (13) есть непрерывная функция параметров $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$, следовательно и матрица B есть непрерывная функция этих параметров. Таким образом коэффициенты $B_1, \ldots, B_n$ характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} \rho - b_{11}, & \ldots, & b_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ b_{n1}, & \ldots, & \rho - b_{nn} \end{vmatrix} = \rho^n + B_1\rho^{n-1} + \ldots + B_n = 0 \tag{14}$$

являются непрерывными функциями параметров $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$. Отсюда по известной теореме алгебры вытекает, что корни характеристического уравнения (14) $\rho_1, \ldots, \rho_n$ являются также непрерывными функциями $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$. Но характеристические показатели связаны с корнями $\rho_1, \ldots, \rho_n$ формулами

$$\sigma_k = \frac{1}{2\pi} \lg \rho_k, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Так как ρ_k суть непрерывные функции $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ в области $\overline{\Omega}$ и так как ни один из них не может быть равен нулю ни при каких значениях параметров, взятых из этой области, ибо тогда $B_n = 0$, что невозможно, то отсюда вытекает непрерывность $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ по отношению к параметрам $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$, что и требовалось доказать.

Обозначим характеристические показатели системы (7) через

$$\tilde{\sigma}_k(\varepsilon) = \lambda_k(\varepsilon) + i\tilde{\omega}_k(\varepsilon), \quad k = 1, \ldots, 2m. \tag{15}$$

Таким образом

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_k(0) = 0, && k = 1, \ldots, 2m, \\ &\tilde{\omega}_k(0) = \omega_k, && k = 1, \ldots, m, \\ &\tilde{\omega}_k(0) = -\omega_{k-m}, && k = m+1, \ldots, 2m. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Предположим, что при $0 < \varepsilon < \alpha$ хотя бы одна из величин $\lambda_k(\varepsilon)$, например $\lambda_1(\varepsilon)$, является положительной

$$\lambda_1(\varepsilon) > 0 \text{ при } 0 < \varepsilon < \alpha. \tag{17}$$

Докажем, что в этом случае *невозмущенное движение системы* (5) $\{z\} \equiv \{0\}$, *соответствующее* $\varepsilon = 0$, *будет положительно неосуществимым*. Иными словами, имеет место следующая

ТЕОРЕМА. *Пусть функции* X_j, Y_j *удовлетворяют условиям* 1°, 2° *и являются периодическими функциями* t *периода* 2π. *Пусть характеристические показатели* (15) *системы* (7) *удовлетворяют условию* (16). *Тогда, если функции* Y_j *таковы, что хотя бы одна из величин* $\lambda_k(\varepsilon)$, $k = 1, \ldots, 2m$, *или несколько из них положительны при* $0 < \varepsilon < \alpha$, *то периодическое движение* $\{f(t)\}$ *системы* (1) *положительно неосуществимо по отношению** *к возмущениям* Y_j.

Доказательство. В силу (15) общее решение линейной однородной системы (7) имеет вид

$$\left.\begin{aligned} \tilde{z}_1(t) &= C_1 e^{(\lambda_1 + i\tilde{\omega}_1)t} \theta_{11}(t, \varepsilon) + \ldots + C_n e^{(\lambda_n + i\tilde{\omega}_n)t} \theta_{n,1}(t, \varepsilon), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \tilde{z}_n(t) &= C_1 e^{(\lambda_1 + i\tilde{\omega}_1)t} \theta_{1,n}(t, \varepsilon) + \ldots + C_n e^{(\lambda_n + i\tilde{\omega}_n)t} \theta_{n,n}(t, \varepsilon), \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

где $\theta_{jk}(t, \varepsilon)$ — периодические функции t периода 2π при $0 \leqslant \varepsilon < \alpha$.

Пусть теперь соблюдается условие (17). Выберем постоянную C_1 положительной, а все остальные постоянные $C_2, \ldots, C_n$ равными нулю. Составленное таким образом решение

$$\tilde{z}_k(t) = C_1 e^{(\lambda_1 + i\tilde{\omega}_1)t} \theta_{1k}(t, \varepsilon), \quad k = 1, \ldots, n, \tag{19}$$

будет при $t \to +\infty$ неограниченно возрастать по модулю.

Так как система (7) — линейная однородная и притом с вещественными коэффициентами, то как вещественная, так и мнимая части решения (19) также являются ее решениями, т. е. $\{\operatorname{Re} \tilde{z}(t)\}$ и $\{\operatorname{Im} \tilde{z}(t)\}$ суть ее решения. Имеем

$$|\tilde{z}_k(t)| = C_1 e^{\lambda_1(\varepsilon)t} |\theta_{1k}(t, \varepsilon)|, \quad k = 1, \ldots, n; \tag{20}$$

в частности

$$|\tilde{z}_k(0)| = C_1 |\theta_{1k}(0, \varepsilon)|, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{21}$$

---

* Всякую функцию $Y(t, y_1, \ldots, y_n)$, периодическую относительно t, периода 2π, удовлетворяющую условиям 1°, 2°, назовем функцией класса S. В этой работе я считаю функции Y_j вполне определенными заданными функциями класса S. Но можно считать функции Y_j какими-либо произвольными функциями класса S. Если при каком-либо выборе функций Y_j из этого класса S хотя бы одна из величин $\lambda_k(\varepsilon)$, $k = 1, \ldots, 2m$, или несколько из них окажутся положительными при $0 < \varepsilon < \alpha$, то периодическое движение $\{f(t)\}$ системы (1) будет положительно неосуществимым по отношению к возмущениям класса S.

Нормируем функции $\theta_{1k}(t,\varepsilon)$, $k=1,\ldots,n$, следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{n} |\theta_{1k}(0,0)|^2 = 1. \tag{22}$$

Положим

$$\left.\begin{aligned} &\sup_{\substack{0\leqslant t\leqslant 2\pi\\ 0\leqslant\varepsilon\leqslant\alpha_0}} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |\theta_{1k}(t,\varepsilon)|^2} = \theta,\\ &\inf_{\substack{0\leqslant t\leqslant 2\pi\\ 0\leqslant\varepsilon\leqslant\alpha_0}} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |\theta_{1k}(t,\varepsilon)|^2} = \chi, \text{ где } \alpha_0 < \alpha. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Числа χ и θ в силу (22) будут определенными постоянными $\neq 0$ и не зависящими от C_1, ε и t. В самом деле, если бы $\chi=0$, то решение $\{\tilde{z}\}\equiv\{0\}$, ибо при некотором $t_0\in[0,2\pi]$ и $\varepsilon_0\in[0,\alpha_0]$ оно удовлетворяло бы нулевым начальным условиям. Ввиду (20) и (23) среди чисел $1,\ldots,n$ найдется при всяком $t\in[0,2\pi]$ и всяком $\varepsilon\in[0,\alpha_0]$ такое число ν, что

$$|\tilde{z}_\nu(t)| \geqslant C_1\frac{\chi}{\sqrt{n}}e^{\lambda_1(\varepsilon)t}. \tag{24}$$

Замечаем теперь, что если модуль комплексного числа $|z|=|x+iy|=\gamma$, то имеет место одно из неравенств: либо $|\operatorname{Re} z|\geqslant\frac{\gamma}{\sqrt{2}}$, либо $|\operatorname{Im} z|\geqslant\frac{\gamma}{\sqrt{2}}$. Поэтому из (24) вытекает

$$\left.\begin{aligned} &\text{либо } |\operatorname{Re}\tilde{z}_\nu(t)| \geqslant C_1\frac{\chi}{\sqrt{2n}}e^{\lambda_1(\varepsilon)t}\\ &\text{либо } |\operatorname{Im}\tilde{z}_\nu(t)| \geqslant C_1\frac{\chi}{\sqrt{2n}}e^{\lambda_1(\varepsilon)t} \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Из неравенств $|\tilde{z}_k(t)|\geqslant|\operatorname{Re}\tilde{z}_k(t)|$, $|\tilde{z}_k(t)|\geqslant|\operatorname{Im}\tilde{z}_k(t)|$ и (21), (23) выводим

$$\left.\begin{aligned} |\operatorname{Re}\tilde{z}_k(0)| &= C_1|\operatorname{Re}\theta_{1k}(0,\varepsilon)| \leqslant C_1|\theta_{1k}(0,\varepsilon)| \leqslant C_1\theta,\\ |\operatorname{Im}\tilde{z}_k(0)| &= C_1|\operatorname{Im}\theta_{1k}(0,\varepsilon)| \leqslant C_1|\theta_{1k}(0,\varepsilon)| \leqslant C_1\theta. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Переписываем (25) следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} &\text{либо } |\operatorname{Re}\tilde{z}_\nu(t)| \geqslant C_1\theta\frac{\chi}{\theta\sqrt{2n}}e^{\lambda_1(\varepsilon)t}\\ &\text{либо } |\operatorname{Im}\tilde{z}_\nu(t)| \geqslant C_1\theta\frac{\chi}{\theta\sqrt{2n}}e^{\lambda_1(\varepsilon)t} \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Усиливаем неравенства (27), заменяя $C_1\theta$ в правой части первого неравенства через $|\operatorname{Re}\tilde{z}_\nu(0)|$ и в правой части второго неравенства через $|\operatorname{Im}\tilde{z}_\nu(0)|$; находим:

$$\left.\begin{aligned} &\text{либо } |\operatorname{Re} \tilde{z}_\nu(t)| \geqslant |\operatorname{Re} \tilde{z}_\nu(0)| \frac{\chi}{\theta\sqrt{2n}} e^{\lambda_1(\varepsilon)t} \\ &\text{либо } |\operatorname{Im} \tilde{z}_\nu(t)| \geqslant |\operatorname{Im} \tilde{z}_\nu(0)| \frac{\chi}{\theta\sqrt{2n}} e^{\lambda_1(\varepsilon)t} \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Обозначим для удобства

$$\operatorname{Re} \tilde{z}_k(t) = z_k^*(t), \quad k = 1, \ldots, n,$$

или

$$\operatorname{Im} \tilde{z}_k(t) = z_k^*(t), \quad k = 1, \ldots, n,$$

смотря по тому, которое из неравенств (28) имеет место. Допустим для определенности, что имеет место первое из неравенств (28). Введем также обозначение

$$r[\{\operatorname{Re} \tilde{z}(t)\}, 0] = r[\{z^*(t)\}, 0] = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} z_k^{*2}(t)} = r^*(t). \tag{29}$$

Из (28) и (29) выводим оценку

$$r[\{z^*(t)\}, 0] \geqslant |z_1^*(t)| \geqslant \frac{|z_1^*(0)|\, e^{\lambda_1(\varepsilon)t} \chi}{\theta\sqrt{2n}}. \tag{30}$$

Формула (30) показывает, как быстро возрастает расстояние $r[\{z^*(t)\}, 0]$. Чтобы доказать неосуществимость невозмущенного движения, надо оценить снизу расстояние $r[\{z(t)\}, 0]$. Для этого мы сравним решение $\{z(t)\}$ системы (5) с «соответствующим» ([1]) решением $\{z^*(t)\}$ системы (7) и затем воспользуемся теоремой треугольника. Имеем

$$\begin{aligned} z_j(t) - z_j^*(t) = &\int_0^t \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial X_j}{\partial y_k}\Big|_f + \varepsilon \frac{\partial Y_j}{\partial y_k}\Big|_f \right)(z_k - z_k^*)\, dt + \\ &+ \int_0^t \{R_j^*(t, z_1, \ldots, z_n) - R_j^*(t, z_1^*, \ldots, z_n^*)\}\, dt + \\ &+ \int_0^t R_j^*(t, z_1^*, \ldots, z_n^*)\, dt + \varepsilon \int_0^t Y_j(t, f_1, \ldots, f_n)\, dt, \quad j = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{31}$$

Введем обозначения

$$A = \sup_{\substack{0 \leqslant \varepsilon \leqslant \alpha \\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi}} \left\{ \left| \frac{\partial X_1}{\partial y_1}\Big|_f + \varepsilon \frac{\partial Y_1}{\partial y_1}\Big|_f \right|, \left| \frac{\partial X_2}{\partial y_2}\Big|_f + \varepsilon \frac{\partial Y_2}{\partial y_2}\Big|_f \right|, \ldots, \left| \frac{\partial X_n}{\partial y_n}\Big|_f + \varepsilon \frac{\partial Y_n}{\partial y_n}\Big|_f \right| \right\}, \tag{32}$$

$$D = \sup_{0 \leqslant t \leqslant 2\pi} \{ |Y_1(t, f_1, \ldots, f_n)|, \ldots, |Y_n(t, f_1, \ldots, f_n)| \}. \tag{33}$$

Составляем усиливающую систему уравнений по отношению к системе (7)

$$\frac{dv_j}{dt} = \sum_{k=1}^{n} A v_k, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{34}$$

Решение системы (34), удовлетворяющее начальным условиям $v_j(0) = r^*(0)$, $j = 1, \ldots, n$, имеет вид

$$v_j(t) = r^*(0)\, e^{nAt}; \quad j = 1, \ldots, n. \tag{35}$$

Из (35) выводим

$$|z_j^*(t)| \leqslant v_j(t) = r^*(0)\,e^{nAt} \leqslant r^*(0)\,e^{nAT}; \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{36}$$

С помощью леммы, доказанной мною ранее [3], из (31), (32), (33) и (36) выводим

$$|z_j(t) - z_j^*(t)| \leqslant A\int_0^t \sum_{k=1}^n |z_k(t) - z_k^*(t)|\,dt + \\ + \mu\int_0^t \sum_{k=1}^n |z_k(t) - z_k^*(t)|\,dt + \frac{\mu r^*(0)\,e^{nAT}}{A} + \varepsilon DT, \tag{37}$$
$$0 \leqslant t \leqslant T, \quad j = 1, \ldots, n,$$

где $\mu = nl\xi$, $r[z^*(t), 0]$, $r[z(t), 0] \leqslant \xi \leqslant \eta$, число l есть коэффициент Липшица для функций

$$\frac{\partial X_j}{\partial y_k} + \varepsilon\frac{\partial Y_j}{\partial y_k}, \quad j,\ k = 1, \ldots, n, \quad 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \alpha_0$$

в условии Липшица относительно переменных $y_1, \ldots, y_n$.

Из неравенств (37) выводим *

$$|z_j(t) - z_j^*(t)| \leqslant \gamma\left[\mu r^*(0)\frac{e^{nAT}}{A} + \varepsilon DT\right]e^{(A+\mu)nt} \leqslant \\ \leqslant \gamma\left[\mu r^*(0)\frac{e^{nAT}}{A} + \varepsilon DT\right]e^{(A+\mu)nT} \tag{38}$$
$$0 \leqslant t \leqslant T, \quad j = 1, \ldots, n,$$

где γ — любое число большее 1. Наконец из (38) выводим

$$r[z(t), z^*(t)] \leqslant \gamma\left[\mu r^*(0)\frac{e^{nAT}}{A} + \varepsilon DT\right]n^{\frac{1}{2}}e^{(A+\mu)nT}; \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{39}$$

На основании теоремы треугольника имеем

$$r[z(t), 0] \geqslant r[z^*(t), 0] - r[z^*(t), z(t)]. \tag{40}$$

Покажем теперь, что можно выбрать число $t = T$ так, что как бы ни было мало ε, будет соблюдаться неравенство

$$r[z(T), 0] \geqslant \delta, \tag{41}$$

где δ — произвольное, но достаточно малое число. Этим самым будет доказана неосуществимость движения $\{f(t)\}$.

---

* Мы пользуемся здесь следующей леммой:

Пусть задана система n функций $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$, непрерывных при $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + h$ и удовлетворяющих в этом промежутке неравенствам

$$|\varphi_j(t)| < \delta + L\int_{t_0}^t \sum_{k=1}^n |\varphi_k(\tau)|\,d\tau, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Тогда функции $\varphi_j(t)$ удовлетворяют в промежутке $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + h$ неравенствам $|\varphi_j(t)| < \delta e^{Ln(t-t_0)}$; $j = 1, \ldots, n$.

Эта лемма заимствована мною из лекций, читанных проф. А. А. Марковым.

Заметим предварительно, что между числами $\frac{r^*(0)}{A}$ и $|z_1^*(0)|$ существует соотношение

$$\frac{r^*(0)}{A} = |z_1^*(0)|\, p(\varepsilon), \tag{42}$$

где $p(\varepsilon)$ — некоторая функция ε, ограниченная при $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \alpha_0 < \alpha$. Точно так же имеет место соотношение

$$\mu = q\, |z_1^*(0)|, \tag{43}$$

где q при $r^*(0) \to 0$ либо постоянная, либо бесконечно малая вместе с $r^*(0)$ (T при этом фиксировано).

Чтобы вывести неравенство (41), мы воспользуемся теперь неравенствами (30), (39) и теоремой треугольника (40). Пусть δ — произвольное, но достаточно малое число. Покажем, что можно выбрать число T так, что при любом достаточно малом ε будут одновременно соблюдаться два неравенства

$$r[z^*(T), 0] \geqslant 2\delta, \quad r[z^*(T), z(T)] \leqslant \delta;$$

тогда из них будет вытекать (41).

Итак, надо выбрать T таким образом, чтобы при любом достаточно малом $\varepsilon > 0$

$$\left.\begin{aligned} &2\delta \leqslant \frac{|z_1^*(0)|\, e^{\lambda_1(\varepsilon)T}}{\sqrt{2}} \leqslant \xi, \\ &\gamma\left[\mu r^*(0)\frac{e^{nAT}}{A} + \varepsilon DT\right] n^{\frac{1}{2}} e^{(A+nl\eta)nT} \leqslant \delta. \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

Вполне достаточно вместо (44) удовлетворить неравенствам

$$\left.\begin{aligned} &\frac{|z_1^*(0)|\, e^{\lambda_1(\varepsilon)T}}{\sqrt{2}} = 2\delta, \\ &\gamma\left[\mu r^*(0)\frac{e^{nAT}}{A} + \varepsilon DT\right] n^{\frac{1}{2}} e^{(A+nl\eta)nT} \leqslant \delta. \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

Выбираем $|z_1^*(0)| = \varepsilon$ и заменяем $\mu, r^*(0)$ с помощью (42) и (43):

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\varepsilon e^{\lambda_1(\varepsilon)T}}{\sqrt{2}} = 2\delta, \\ &\gamma[P\varepsilon^2 e^{nAT} + \varepsilon DT]\, e^{(A+nl\eta)nT} \leqslant \delta, \text{ где } P = q\, p(\varepsilon). \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Из (46) выводим

$$\gamma[P\varepsilon^2 e^{nAT} + \varepsilon DT]\, e^{(A+nl\eta)nT} \leqslant \frac{\varepsilon e^{\lambda_1(\varepsilon)T}}{2\sqrt{2}},$$

откуда

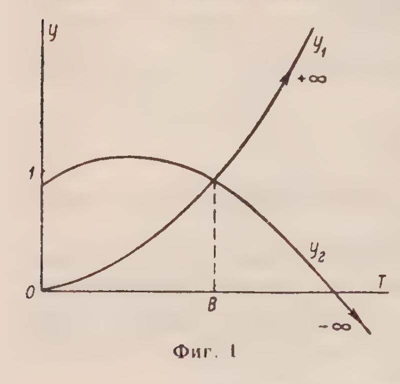
$$2\sqrt{2}\,\gamma DT e^{(A+nl\eta)nT} \leqslant e^{\lambda_1(\varepsilon)T} - 2\sqrt{2}\,\gamma P e^{nAT} e^{(A+nl\eta)nT}\varepsilon. \tag{47}$$

Рассмотрим две кривые:

$$\left.\begin{aligned} &y_1 = 2\sqrt{2}\,\gamma DT e^{(A+nl\eta)nT} \\ &y_2 = e^{\lambda_1(\varepsilon)T} - 2\sqrt{2}P\,\gamma e^{nAT} e^{(A+nl\eta)nT}\varepsilon. \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Возьмем весьма малое положительное значение ε_0 из промежутка $0 < \varepsilon_0 < \alpha_0$.

Построим при этом значении ε_0 кривые (48), имеющие вид, указанный на фиг. 1. За T_0 принимаем абсциссу OB их единственной точки пересечения. По взятым ε_0 и T_0 определяем из (46) число δ_0. Если теперь, наоборот, задать это самое число δ_0, то найдутся $\varepsilon = \varepsilon_0$ и $T = T_0$ такие, что неравенства (45) будут соблюдены.



Фиг. 1

При уменьшении ε_0 семейство кривых y_2 стремится к прямой $y = 1$, поэтому как бы ни было мало δ_0, выбрав достаточно малое ε_0, всегда найдем точку пересечения кривых y_1 и y_2 и следовательно сможем подобрать T_0 так, чтобы (45) соблюдалось.

Пример. Рассмотрим в виде иллюстрации к этой теореме элементарный пример *.

Дано дифференциальное уравнение 1-го порядка

$$\frac{dx}{dt} = (x - a)^2. \tag{49}$$

Уравнение (49) имеет точку равновесия $x = a$. Исследуем осуществимость этой точки равновесия a по отношению к возмущениям вида

$$\frac{dy}{dt} = (y - a)^2 + \varepsilon y. \tag{50}$$

Полагаем $y = a + z$ и составляем уравнение возмущенного движения

$$\frac{dz}{dt} = z^2 + \varepsilon z + \varepsilon a. \tag{51}$$

Уравнение в вариациях имеет вид

$$\frac{d\bar{z}}{dt} = 0. \tag{52}$$

Линейное уравнение, аналогичное в этом частном случае системе (7), имеет вид

$$\frac{d\tilde{z}}{dt} = \varepsilon\tilde{z}, \tag{53}$$

его решение

$$\tilde{z} = Ce^{\varepsilon t}. \tag{54}$$

При сколь угодно малом положительном ε решение (54) неограниченно растет по модулю при $t \to +\infty$. Очевидно, на основании соображений, аналогичных тем, которые были приведены при доказательстве предыдущей теоремы, можно утверждать, что точка равновесия a положительно неосуществима. И действительно, в этом легко убедиться,

* Этот пример не вполне соответствует теореме, так как в теореме порядок системы был четный и т. д. Однако аналогичные рассуждения применимы и в этом случае.

непосредственно интегрируя уравнение (51). Пусть $\varepsilon > 0$ и достаточно мало, тогда решение уравнения (51) при $a > 0$ имеет вид

$$z = -\frac{\varepsilon}{2} + \sqrt{\varepsilon a - \frac{\varepsilon^2}{4}}\,\mathrm{tg}\sqrt{\varepsilon a - \frac{\varepsilon^2}{4}}\,(t - C), \tag{55}$$

где C — постоянная интегрирования. При $a < 0$ решение имеет вид

$$z + \frac{\varepsilon}{2} - m = \left(z + \frac{\varepsilon}{2} + m\right) e^{2m(t-C)}, \tag{56}$$

где $m = \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4} - \varepsilon a}$. В обоих случаях (55) и (56) при надлежащем выборе начальных условий, соответствующих моменту t_0, и достаточно малом ε, $z(t)$ в промежутке $t_0 < t < +\infty$ будет по модулю неограниченным.

2

Приложим доказанную выше теорему к случаю консервативной системы *. Пусть задана консервативная система

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\bar{p}_j}{dt} &= \frac{\partial H_0}{\partial \bar{q}_j}, \\ \frac{d\bar{q}_j}{dt} &= -\frac{\partial H_0}{\partial \bar{p}_j}, \end{aligned} \quad j = 1, \ldots, n \right\} \tag{1}$$

где $H_0(\bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_n;\ \bar{q}_1, \ldots, \bar{q}_n) = T - U_0(\bar{q}_1, \ldots, \bar{q}_n)$. Пусть $\{a_1, \ldots, a_n;\ b_1, \ldots, b_n\}$ — точка равновесия системы (1), так что

$$\frac{\partial H_0}{\partial a_j} = 0, \qquad \frac{\partial H_0}{\partial b_j} = 0, \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Исследуем осуществимость этой точки равновесия по отношению ** к возмущениям консервативных же сил, функция Гамильтона которых $H(t, p_1, \ldots, p_n;\ q_1, \ldots, q_n;\ \mu_1, \ldots, \mu_\nu)$ является заданной периодической функцией времени t периода τ и зависит кроме того еще от ν параметров $\mu_1, \ldots, \mu_\nu$. Уравнения с возмущениями имеют таким образом вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp_j}{dt} &= \frac{\partial H_0}{\partial q_j} + \varepsilon\frac{\partial H}{\partial q_j}, \\ \frac{dq_j}{dt} &= -\frac{\partial H_0}{\partial p_j} - \varepsilon\frac{\partial H}{\partial p_j}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Полагаем, как обычно, $p_j = a_j + u_j$, $q_j = b_j + v_j$ и составляем уравнения возмущенного движения, выделяя линейные члены:

---

* Имея в виду следующий параграф, я изучаю здесь точку равновесия системы (1). Аналогичные рассуждения применимы, разумеется, и к тому случаю, когда H_0 является периодической функцией t и рассматривается осуществимость периодического движения (того же периода) консервативной системы.

** См. сноску на стр. 131.

$$\left.\begin{aligned}\frac{du_j}{dt}&=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial b_j\,\partial a_k}u_k+\frac{\partial^2 H_0}{\partial b_j\,\partial b_k}v_k+\varepsilon\frac{\partial^2 H}{\partial b_j\,\partial a_k}u_k+\varepsilon\frac{\partial^2 H}{\partial b_j\,\partial b_k}v_k\right)+\ldots\\ \frac{dv_j}{dt}&=-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial a_j\,\partial a_k}u_k+\frac{\partial^2 H_0}{\partial a_j\,\partial b_k}v_k+\varepsilon\frac{\partial^2 H}{\partial a_j\,\partial a_k}u_k+\varepsilon\frac{\partial^2 H}{\partial a_j\,\partial b_k}v_k\right)+\ldots\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

Предположим, что линейная система с постоянными коэффициентами

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\bar{u}_j}{dt}&=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial b_j\,\partial a_k}\bar{u}_k+\frac{\partial^2 H_0}{\partial b_j\,\partial b_k}\bar{v}_k\right)\\ \frac{d\bar{v}_j}{dt}&=-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial a_j\,\partial a_k}\bar{u}_k+\frac{\partial^2 H_0}{\partial a_j\,\partial b_k}\bar{v}_k\right)\end{aligned}\qquad j=1,\ldots,n\right\}\quad(5)$$

имеет все характеристические показатели чисто мнимые; тогда они будут попарно сопряженными *

$$\left.\begin{aligned}\bar{\sigma}_1&=i\bar{\omega}_1,\ldots,\bar{\sigma}_n=i\bar{\omega}_n,\\ \bar{s}_1&=-i\bar{\omega}_1,\ldots,\bar{s}_n=-i\bar{\omega}_n.\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

Характеристические показатели системы

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\tilde{u}_j}{dt}&=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial b_j\,\partial a_k}\tilde{u}_k+\frac{\partial^2 H_0}{\partial b_j\,\partial b_k}\tilde{v}_k+\right.\\ &\qquad\left.+\varepsilon\frac{\partial^2 H}{\partial b_j\,\partial a_k}\tilde{u}_k+\varepsilon\frac{\partial^2 H}{\partial b_j\,\partial b_k}\tilde{v}_k\right)\\ \frac{d\tilde{v}_j}{dt}&=-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial a_j\,\partial a_k}\tilde{u}_k+\frac{\partial^2 H_0}{\partial a_j\,\partial b_k}\tilde{v}_k+\right.\\ &\qquad\left.+\varepsilon\frac{\partial^2 H}{\partial a_j\,\partial a_k}\tilde{u}_k+\varepsilon\frac{\partial^2 H}{\partial a_j\,\partial b_k}\tilde{v}_k\right)\end{aligned}\qquad j=1,\ldots,n\right\}\quad(7)$$

по доказанной выше лемме являются непрерывными функциями ε и превращаются при $\varepsilon=0$ в характеристические показатели (6) системы (5).

Заметим теперь, что система (7) сама является канонической. В самом деле, если ввести обозначения

$$\frac{\partial^2 H_0}{\partial a_j\,\partial a_k}+\varepsilon\frac{\partial^2 H}{\partial a_j\,\partial a_k}=A_{jk}=A_{kj};\qquad \frac{\partial^2 H_0}{\partial b_j\,\partial b_k}+\varepsilon\frac{\partial^2 H}{\partial b_j\,\partial b_k}=C_{jk}=C_{kj};$$

$$\frac{\partial^2 H_0}{\partial a_j\,\partial b_k}+\varepsilon\frac{\partial^2 H}{\partial a_j\,\partial b_k}=B_{jk};\quad j,\ k=1,\ldots,n,$$

$$H^*=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(A_{kk}\tilde{u}_k^2+C_{kk}\tilde{v}_k^2)-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(A_{jk}\tilde{u}_j\tilde{u}_k+C_{jk}\tilde{v}_j\tilde{v}_k)-$$

$$-\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}B_{jk}\tilde{u}_j\tilde{v}_k,$$

* В силу вещественности коэффициентов системы (5).

то систему (7) можно представить в виде

$$\frac{d\tilde{u}_j}{dt}=\frac{\partial H^*}{\partial \tilde{v}_j};\quad \frac{d\tilde{v}_j}{dt}=-\frac{\partial H^*}{\partial \tilde{u}_j};\quad j=1,\ldots,n. \tag{8}$$

А. М. Ляпунов показал [см. ([4]), § 51], что в этом случае характеристичное уравнение системы есть возвратное. Поэтому каждому его корню ρ_k будет соответствовать другой корень $\frac{1}{\rho_k}$. Но характеристические показатели σ связаны с корнями ρ зависимостью вида $\rho=e^{\tau\sigma}$, поэтому характеристические показатели решений системы (7) будут связаны соотношениями

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_1(\varepsilon)=\lambda_1(\varepsilon)+i\omega_1(\varepsilon),\ldots,\sigma_n(\varepsilon)=\lambda_n(\varepsilon)+i\omega_n(\varepsilon),\\ &s_1(\varepsilon)=-\lambda_1(\varepsilon)-i\omega_1(\varepsilon),\ldots,s_n(\varepsilon)=-\lambda_n(\varepsilon)-i\omega_n(\varepsilon).\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Поэтому, если вещественная часть хотя бы одного характеристического показателя, при всяком сколь угодно малом $\varepsilon \neq 0$, окажется отличной от нуля, — найдется хоть один характеристический показатель с положительной вещественной частью. А тогда, по теореме предыдущего параграфа, точка равновесия $\{a_1,\ldots,a_n;\ b_1,\ldots,b_n\}$ будет положительно неосуществима.

Таким образом *необходимым условием осуществимости точки* $\{a_1,\ldots,a_n;\ b_1,\ldots,b_n\}$ *является выполнение равенств*

$$\lambda_1(\varepsilon)=0,\ldots,\lambda_n(\varepsilon)=0 \quad \textit{при} \quad 0<|\varepsilon|\leqslant\alpha. \tag{10}$$

Заметим теперь, что для приложений, которыми мы будем заниматься в следующих параграфах, задачу об осуществимости интереснее поставить несколько иначе. Именно, во многих конкретных задачах коэффициент ε в уравнениях (3) не может изменяться, он имеет вполне определенное значение, также и параметры $\mu_1,\ldots,\mu_\nu$, входящие в H. Поэтому интересно рассмотреть вопрос об осуществимости точки равновесия $\{a_1,\ldots,a_n;\ b_1,\ldots,b_n\}$, предполагая параметры $\mu_1,\ldots,\mu_\nu$ и ε фиксированными, равными соответственно $\mu_1^0,\ldots,\mu_\nu^0$, ε_0, и считая, что лишь начальные условия могут изменяться внутри пределов

$$\begin{aligned}&|u_j(0)|=|p_j(0)-a_j|<\delta,\\ &|v_j(0)|=|q_j(0)-b_j|<\delta,\end{aligned}\quad j=1,\ldots,n. \tag{11}$$

Характеристические показатели зависят от $\varepsilon,\mu_1,\ldots,\mu_\nu$. Условие (10) при фиксированных $\varepsilon_0,\mu_1^0,\ldots,\mu_\nu^0$ имеет вид

$$\lambda_1(\varepsilon_0,\mu_1^0,\ldots,\mu_\nu^0)=0,\ldots,\lambda_n(\varepsilon_0,\mu_1^0,\ldots,\mu_\nu^0)=0. \tag{12}$$

Следовательно, *если система уравнений*

$$\lambda_1(\varepsilon,\mu_1,\ldots,\mu_\nu)=0,\ldots,\lambda_n(\varepsilon,\mu_1,\ldots,\mu_\nu)=0 \tag{13}$$

имеет решение (или несколько решений) $\varepsilon_0,\mu_1^0,\ldots,\mu_\nu^0$, *то точка равновесия* $\{a_1,\ldots,a_n;\ b_1,\ldots,b_n\}$ *может при этих значениях параметров оказаться положительно осуществимой.*

Во многих конкретных задачах бывает возможным получить первые члены разложений величин $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ по параметру ε, тогда удается приближенно вычислить корни уравнений (13).

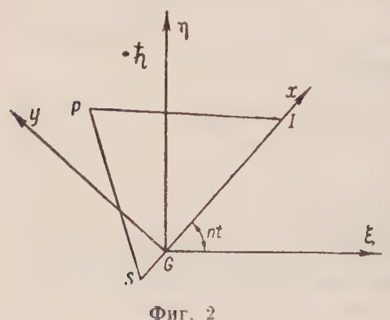
3

Существует группа малых планет, известных под именем Троянцев, движение которой обратило на себя внимание астрономов. Планеты эти образуют вместе с Солнцем и Юпитером приблизительно равносторонний треугольник, они находятся таким образом вблизи одной из либрационных точек. Известно, что задача о трех телах имеет строгое решение Лагранжа, когда три тела с массами m_1, m_2, m_3 во все время движения образуют равносторонний треугольник, вращаясь вокруг общего центра масс.

Можно поставить вопрос: как будет двигаться астероид P с нулевой массой, помещенный вблизи либрационной точки L_4, начальная скорость которого близка к скорости либрационной точки L_4? Останется ли астероид навсегда внутри некоторой окрестности точки L_4 или рано или поздно будет выброшен из этой окрестности?

На этот вопрос можно ответить, исследовав устойчивость в смысле Ляпунова либрационной точки L_4, что представляет собой трудную задачу. Действительно, характеристические показатели уравнений в вариациях для точки L_4, как мы увидим дальше, суть две пары чисто мнимых сопряженных корней. Поэтому исследование уравнений в вариациях не позволяет сделать каких-либо заключений об устойчивости либрационной точки L_4. Только исследование нелинейных членов могло бы дать ответ на этот вопрос.

Однако легко показать, что если поставить задачу более правильно с физической точки зрения, то в новой постановке она решается до конца и притом сравнительно элементарным математическим аппаратом. На самом деле в условиях солнечной системы на астероид P действуют кроме Солнца и Юпитера также возмущения других планет. Следовательно с физической точки зрения было бы правильнее исследовать не устойчивость либрационной точки L_4, а ее осуществимость по отношению к возмущениям остальных планет. Здесь мы ограничимся пока исследованием осуществимости точки L_4 по отношению к возмущениям только одной планеты (четвертого тела) — «Сатурна».



Фиг. 2

Составим уравнения движения астероида P, находящегося под действием тяготения со стороны Солнца S, Юпитера I и Сатурна $\hbar$. Примем массу «Солнца» S за единицу и обозначим массу I через μ, массу $\hbar$ через ε. Центр масс S и I обозначим G (фиг. 2).

Единицу расстояния выберем так, чтобы

$$r_1 + r_2 = 1, \tag{1}$$

где $r_1 = GS$, $r_2 = GI$. Начало координат поместим в G. Так как G есть центр масс S и I, то

$$r_1 - \mu r_2 = 0. \tag{2}$$

Единицу времени выберем так, чтобы постоянная тяготения равнялась 1. Обозначим расстояния

$$PS = \rho_1; \quad PI = \rho_2; \quad Ph = \rho_3.$$

Уравнения движения астероида P, находящегося под действием тяготения со стороны S, I и $\hbar$, отнесенные к неподвижным осям ξ, η, имеют вид

$$\ddot{\xi} = \frac{\partial U}{\partial \xi}; \quad \ddot{\eta} = \frac{\partial U}{\partial \eta}, \tag{3}$$

где

$$U = \frac{1}{\rho_1} + \frac{\mu}{\rho_2} + \frac{\varepsilon}{\rho_3}. \tag{4}$$

Уравнения движения (3), отнесенные к подвижным осям xGy, вращающимся с постоянной угловой скоростью $n = \sqrt{1+\mu}$, имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2 x &= \frac{\partial U}{\partial x}, \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2 y &= \frac{\partial U}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Положим

$$\left.\begin{aligned} &\xi^2 + \eta^2 = x^2 + y^2 = r^2, \\ &\Omega = \frac{n^2}{2}(x^2 + y^2) + U = \frac{n^2}{2} r^2 + U; \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

тогда (5) примет вид

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} - 2n\dot{y} &= \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} &= \frac{\partial \Omega}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Введем обозначения

$$U_0 = \frac{1}{\rho_1} + \frac{\mu}{\rho_2}; \quad \Omega_0 = \frac{n^2}{2} r^2 + U_0;$$

тогда

$$U = U_0 + \frac{\varepsilon}{\rho_3}; \quad \Omega = \Omega_0 + \frac{\varepsilon}{\rho_3}. \tag{8}$$

Наряду с системой (7) рассмотрим систему

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} = \frac{\partial \Omega_0}{\partial x}; \quad \ddot{y} + 2n\dot{x} = \frac{\partial \Omega_0}{\partial y}. \tag{9}$$

Предположим, что при $\varepsilon = 0$ S и I равномерно вращаются вокруг G с угловой скоростью n. Обозначим координаты S через x_1, y_1, координаты I — через x_2, y_2; тогда соответственно (см. фиг. 2)

$$x_1 = r_1, \qquad y_1 = 0;$$
$$x_2 = -r_2, \quad y_2 = 0.$$

Уравнения (7) обладают точкой равновесия (либрационная точка L_4)

$$\left. \begin{aligned} & x \equiv a = -\frac{1}{2}\frac{1-\mu}{1+\mu}, \quad && y \equiv b = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \\ & \dot{x} \equiv 0, && \dot{y} \equiv 0. \end{aligned} \right\} \tag{10}$$

Пусть теперь на астероид P, помещенный в начальный момент в «точку» L_4, т. е. удовлетворяющий условиям

$$\left. \begin{aligned} & x(0) = a, \quad y(0) = b, \\ & \dot{x}(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 0, \end{aligned} \right\} \tag{11}$$

действует еще кроме S и I третья планета «Сатурн» ♄ массы ε. Для упрощения задачи мы предположим, что «Сатурн» не оказывает никакого действия на S и I и движется по кругу радиуса R вокруг центра масс G с постоянной угловой скоростью n_0 (в осях ξ, η) и начальной фазой φ_0. Тогда

$$\left. \begin{aligned} x_3 &= R\cos[(n_0 - n)t + \varphi_0], \\ y_3 &= R\sin[(n_0 - n)t + \varphi_0]. \end{aligned} \right\} \tag{12}$$

Подставим (12) в (7):

$$\left. \begin{aligned} & \ddot{x} - 2n\dot{y} = \frac{\partial \Omega_0}{\partial x} + \\ & \quad + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{\{x - R\cos[(n_0 - n)t + \varphi_0]\}^2 + \{y - R\sin[(n_0 - n)t + \varphi_0]\}^2}}; \\ & \ddot{y} + 2n\dot{x} = \frac{\partial \Omega_0}{\partial y} + \\ & \quad + \varepsilon \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\sqrt{\{x - R\cos[(n_0 - n)t + \varphi_0]\}^2 + \{y - R\sin[(n_0 - n)t + \varphi_0]\}^2}}. \end{aligned} \right\} \tag{13}$$

Уравнения (13) при $\varepsilon = 0$ имеют решение (10). Исследуем осуществимость точки равновесия (10) по отношению к возмущениям «Сатурна». Положим

$$\left. \begin{aligned} & x = a + z_1, \quad y = b + z_2, \\ & \dot{x} = 0 + z_3, \quad \dot{y} = 0 + z_4, \end{aligned} \right\} \tag{14}$$

и составим уравнения возмущенного движения

$$\left. \begin{aligned} & \frac{dz_1}{dt} = z_3, \\ & \frac{dz_2}{dt} = z_4, \\ & \frac{dz_3}{dt} = 2nz_4 + \\ & + \frac{\partial \Omega_0}{\partial x}\bigg|_{a+z} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{\{x - R\cos[(n_0 - n)t + \varphi_0]\}^2 + \{y - R\sin[(n_0 - n)t + \varphi_0]\}^2}}\bigg|_{a+z}, \\ & \frac{dz_4}{dt} = -2nz_3 + \\ & + \frac{\partial \Omega_0}{\partial y}\bigg|_{a+z} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\sqrt{\{x - R\cos[(n_0 - n)t + \varphi_0]\}^2 + \{y - R\sin[(n_0 - n)t + \varphi_0]\}^2}}\bigg|_{a+z}. \end{aligned} \right\} \tag{15}$$

Выделим в (15) линейные члены относительно $z_1, \ldots, z_4$. Для этого предварительно находим

$$\left.\begin{aligned}\left.\frac{\partial\Omega_0}{\partial x}\right|_{a+z} &= \left.\frac{\partial^2\Omega_0}{\partial x^2}\right|_a \cdot z_1 + \left.\frac{\partial^2\Omega_0}{\partial x\,\partial y}\right|_a \cdot z_2 + \ldots \\ \left.\frac{\partial\Omega_0}{\partial y}\right|_{a+z} &= \left.\frac{\partial^2\Omega_0}{\partial x\,\partial y}\right|_a \cdot z_1 + \left.\frac{\partial^2\Omega_0}{\partial y^2}\right|_a \cdot z_2 + \ldots\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\left.\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\rho_3}\right|_{a+z} &= \left.\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\rho_3}\right|_a + \left.\frac{\partial^2\left(\frac{1}{\rho_3}\right)}{\partial x^2}\right|_a \cdot z_1 + \left.\frac{\partial^2\left(\frac{1}{\rho_3}\right)}{\partial x\,\partial y}\right|_a \cdot z_2 + \ldots \\ \left.\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\rho_3}\right|_{a+z} &= \left.\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\rho_3}\right|_a + \left.\frac{\partial^2\left(\frac{1}{\rho_3}\right)}{\partial x\,\partial y}\right|_a \cdot z_1 + \left.\frac{\partial^2\left(\frac{1}{\rho_3}\right)}{\partial y^2}\right|_a \cdot z_2 + \ldots\end{aligned}\right\}$$

Подставляя эти выражения в (15), получаем

$$\left.\begin{aligned}\frac{dz_1}{dt} &= z_3, \\ \frac{dz_2}{dt} &= z_4, \\ \frac{dz_3}{dt} &= 2nz_4 + \frac{\partial^2\Omega_0}{\partial a^2} z_1 + \frac{\partial^2\Omega_0}{\partial a\,\partial b} z_2 + \\ &\quad + \varepsilon\left\{\frac{\partial\left(\frac{1}{\rho_3}\right)}{\partial a} + \frac{\partial^2\left(\frac{1}{\rho_3}\right)}{\partial a^2} z_1 + \frac{\partial^2\left(\frac{1}{\rho_3}\right)}{\partial a\,\partial b} z_2\right\} + \ldots \\ \frac{dz_4}{dt} &= -2nz_3 + \frac{\partial^2\Omega_0}{\partial a\,\partial b} z_1 + \frac{\partial^2\Omega_0}{\partial b^2} z_2 + \\ &\quad + \varepsilon\left\{\frac{\partial\left(\frac{1}{\rho_3}\right)}{\partial b} + \frac{\partial^2\left(\frac{1}{\rho_3}\right)}{\partial a\,\partial b} z_1 + \frac{\partial^2\left(\frac{1}{\rho_3}\right)}{\partial b^2} z_2\right\} + \ldots\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Уравнения в вариациях, получаемые из (16) при $\varepsilon = 0$

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\bar{z}_1}{dt} &= \bar{z}_3, \\ \frac{d\bar{z}_2}{dt} &= \bar{z}_4, \\ \frac{d\bar{z}_3}{dt} &= 2n\bar{z}_4 + \frac{\partial^2\Omega_0}{\partial a^2}\bar{z}_1 + \frac{\partial^2\Omega_0}{\partial a\,\partial b}\bar{z}_2, \\ \frac{d\bar{z}_4}{dt} &= -2n\bar{z}_3 + \frac{\partial^2\Omega_0}{\partial a\,\partial b}\bar{z}_1 + \frac{\partial^2\Omega_0}{\partial b^2}\bar{z}_2\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

и при [5]

$$(1+\mu)^2 > 27\,\mu, \tag{18}$$

имеют две пары мнимых сопряженных характеристических показателей

$$\left.\begin{aligned}\sigma_1 &= i\omega_1, & \sigma_2 &= i\omega_2, \\ \sigma_3 &= -i\omega_1, & \sigma_4 &= -i\omega_2,\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

являющихся корнями биквадратного уравнения

$$4\sigma^4 + 4(1+\mu)\sigma^2 + 27\mu = 0. \tag{20}$$

Общее решение системы (17) имеет вид

$$\left.\begin{aligned}z_1 &= A_1e^{i\omega_1 t} + A_2e^{i\omega_2 t} + A_3e^{-i\omega_1 t} + A_4e^{-i\omega_2 t} \\ z_2 &= B_1e^{i\omega_1 t} + B_2e^{i\omega_2 t} + B_3e^{-i\omega_1 t} + B_4e^{-i\omega_2 t}\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

где A_1, A_2, A_3, A_4 — произвольные постоянные, а постоянные B_1, B_2, B_3, B_4 связаны с ними соотношениями

$$\left.\begin{aligned} B_1 &= -\frac{\Omega_{12} - 2ni\omega_1}{\omega_1^2 + \Omega_{22}} A_1, \quad B_2 = -\frac{\Omega_{12} - 2ni\omega_2}{\omega_2^2 + \Omega_{22}} A_2, \\ B_3 &= -\frac{\Omega_{12} + 2ni\omega_1}{\omega_1^2 + \Omega_{22}} A_3, \quad B_4 = -\frac{\Omega_{12} + 2ni\omega_2}{\omega_2^2 + \Omega_{22}} A_4, \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

где $\Omega_{11} = \frac{\partial^2 \Omega_0}{\partial a^2}$, $\Omega_{12} = \frac{\partial^2 \Omega_0}{\partial a\, \partial b}$, $\Omega_{22} = \frac{\partial^2 \Omega_0}{\partial b^2}$. Коэффициенты $\frac{\partial\left(\frac{1}{\rho_3}\right)}{\partial a}, \ldots, \frac{\partial^2\left(\frac{1}{\rho_3}\right)}{\partial b^2}$, входящие в уравнения (16), являются периодическими функциями времени t с периодом $T = \frac{2\pi}{n - n_0}$.

Согласно теореме § 1 вопрос об осуществимости точки L_4 сводится к исследованию характеристических показателей системы однородных линейных уравнений с периодическими коэффициентами

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\tilde z_1}{dt} &= \tilde z_3; \\ \frac{d\tilde z_2}{dt} &= \tilde z_4; \\ \frac{d\tilde z_3}{dt} &= \left[\Omega_{11} + \varepsilon \frac{\partial^2\left(\frac{1}{\rho_3}\right)}{\partial a^2}\right]\tilde z_1 + \left[\Omega_{12} + \varepsilon \frac{\partial^2\left(\frac{1}{\rho_3}\right)}{\partial a\,\partial b}\right]\tilde z_2 + 2n\tilde z_4; \\ \frac{d\tilde z_4}{dt} &= \left[\Omega_{12} + \varepsilon \frac{\partial^2\left(\frac{1}{\rho_3}\right)}{\partial a\,\partial b}\right]\tilde z_1 + \left[\Omega_{22} + \varepsilon \frac{\partial^2\left(\frac{1}{\rho_3}\right)}{\partial b^2}\right]\tilde z_2 - 2n\tilde z_3. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Заметим прежде всего, что система (23) легко может быть приведена к канонической форме путем линейного преобразования

$$\tilde z_1 = q_1; \quad \tilde z_2 = q_2; \quad \tilde z_3 = p_1 + nq_2; \quad \tilde z_4 = p_2 - nq_1. \tag{24}$$

Функция Гамильтона H будет иметь вид

$$H = \frac{1}{2}\left[(n^2 - B_{11})\, q_1^2 + (n^2 - B_{22})\, q_2^2 + p_1^2 + p_2^2\right] + (-B_{12} q_1 q_2 - n q_1 p_2 + n q_2 p_1),$$

где

$$B_{11} = \Omega_{11} + \varepsilon A_{11}; \quad B_{12} = \Omega_{12} + \varepsilon A_{12}; \quad B_{22} = \Omega_{22} + \varepsilon A_{22};$$

$$A_{11} = \frac{\partial^2\left(\frac{1}{\rho_3}\right)}{\partial a^2}; \quad A_{12} = \frac{\partial^2\left(\frac{1}{\rho_3}\right)}{\partial a\,\partial b}; \quad A_{22} = \frac{\partial^2\left(\frac{1}{\rho_3}\right)}{\partial b^2}.$$

Определитель преобразования (24) равен 1, следовательно преобразование (24) удовлетворяет всем условиям, указанным в § 10 диссертации Ляпунова ([4]). Поэтому к преобразованию (23), переводящему систему в каноническую, применимо замечание Ляпунова на стр. 226 его цитированной книги (последние строки). Можно утверждать на основании этого замечания, что характеристичное уравнение для системы (23) есть возвратное, т. е. оно имеет вид

$$\rho^4 + A_1\rho^3 + A_2\rho^2 + A_1\rho + 1 = 0. \tag{25}$$

Поэтому каждому корню ρ_k будет соответствовать корень $\frac{1}{\rho_k}$, так что корни уравнения (25) будут иметь вид

$$\rho_1, \ \frac{1}{\rho_1}, \ \rho_2, \ \frac{1}{\rho_2},$$

а следовательно характеристические показатели системы (23) будут $\tilde{\sigma}_1$, $\tilde{\sigma}_2$, $-\tilde{\sigma}_1$, $-\tilde{\sigma}_2$, или подробно

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\sigma}_1 &= \lambda_1(\varepsilon) + i\tilde{\omega}_1(\varepsilon), & \tilde{\sigma}_2 &= \lambda_2(\varepsilon) + i\tilde{\omega}_2(\varepsilon), \\ \tilde{\sigma}_3 &= -\lambda_1(\varepsilon) - i\tilde{\omega}_1(\varepsilon), & \tilde{\sigma}_4 &= -\lambda_2(\varepsilon) - i\tilde{\omega}_2(\varepsilon). \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Для решения вопроса об осуществимости точки L_4 нужно выяснить теперь только одно: будет ли при $0 < \varepsilon < \alpha$ одна из величин $\lambda_1(\varepsilon)$ или $\lambda_2(\varepsilon)$ отличной от нуля. Если, например, окажется, что $\lambda_1(\varepsilon) \neq 0$, то каков бы ни был знак $\lambda_1(\varepsilon)$, один из характеристических показателей (26) будет иметь положительную вещественную часть, а тогда по теореме § 1 либрационная точка L_4 будет положительно и отрицательно неосуществимой.

В следующем параграфе мы выясним, при каких условиях одна из величин $\lambda_1(\varepsilon)$ или $\lambda_2(\varepsilon)$ может оказаться отличной от нуля при $0 < \varepsilon < \alpha$. Самое вычисление λ_1 и λ_2 мы дадим в другой работе.

4

Пусть B — матрица интегральной подстановки системы (23) § 3, соответствующая периоду T. Обозначим ее характеристические числа через ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4. Они выражаются через характеристические показатели σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 следующим образом

$$\rho_k(\varepsilon) = e^{T\sigma_k(\varepsilon)}, \quad k = 1, 2, 3, 4. \tag{1}$$

В силу формулы (19) § 3, при $\varepsilon = 0$

$$\rho_1(0) = e^{i\omega_1 T}; \quad \rho_2(0) = e^{i\omega_2 T}; \quad \rho_3(0) = e^{-i\omega_1 T}; \quad \rho_4(0) = e^{-i\omega_2 T}. \tag{2}$$

Составим характеристическое уравнение матрицы B; в силу консервативности системы (23) это будет возвратное уравнение 4-й степени

$$\rho^4 + 2B_1\rho^3 + 2B_2\rho^2 + 2B_1\rho + 1 = 0. \tag{3}$$

В силу теоремы Ляпунова [см. ([4]), § 48] коэффициенты этого уравнения являются голоморфными функциями ε вблизи $\varepsilon = 0$ (в нашем случае даже целыми трансцендентными функциями ε). При $\varepsilon = 0$ в силу (2)

$$\left.\begin{aligned} B_1(0) &= -(\cos\omega_1 T + \cos\omega_2 T), \\ B_2(0) &= 1 + \cos(\omega_1 + \omega_2)T + \cos(\omega_1 - \omega_2)T. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Решение возвратного уравнения (3) сводится к решению квадратного уравнения

$$\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)^2 + 2B_1\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) + 2B_2 - 2 = 0 \tag{5}$$

и затем к решению квадратного уравнения

$$\rho^2 - 2\alpha\rho + 1 = 0, \tag{6}$$

где

$$\alpha = -B_1 \pm \sqrt{B_1^2 + 2 - 2B_2}. \tag{7}$$

Для того чтобы оба корня квадратного уравнения (6) обладали модулями равными единице, необходимо и достаточно, чтобы α было вещественным и

$$|\alpha| \leqslant 1. \tag{8}$$

Отсюда вытекает следующее: чтобы корни возвратного уравнения 4-й степени с вещественными коэффициентами обладали модулями равными единице, необходимо и достаточно, чтобы величины

$$\alpha_1 = -B_1 + \sqrt{B_1^2 + 2 - 2B_2}; \quad \alpha_2 = -B_1 - \sqrt{B_1^2 + 2 - 2B_2}$$

были вещественными и удовлетворяли неравенствам

$$|\alpha_1| \leqslant 1, \quad |\alpha_2| \leqslant 1. \tag{9}$$

Чтобы α_1 и α_2 были вещественными, необходимо и достаточно, чтобы

$$B_1^2 + 2 - 2B_2 \geqslant 0. \tag{10}$$

Вычислим теперь значения α_1 и α_2, соответствующие $\varepsilon = 0$. Из (4) и (7) находим

$$B_1^2(0) + 2 - 2B_2(0) = (\cos\omega_1 T - \cos\omega_2 T)^2, \tag{11}$$

$$\alpha_1(0) = \cos\omega_1 T, \quad \alpha_2(0) = \cos\omega_2 T. \tag{12}$$

Из (11) видим, что если

$$\cos\omega_1 T \neq \cos\omega_2 T, \tag{13}$$

то

$$B_1^2(0) + 2 - 2B_2(0) > 0, \tag{14}$$

а из (12) — что если

$$|\cos\omega_1 T| \neq 1, \quad |\cos\omega_2 T| \neq 1, \tag{15}$$

то

$$|\alpha_1(0)| < 1, \quad |\alpha_2(0)| < 1. \tag{16}$$

Допустим теперь, что неравенства (13) и (15) действительно соблюдаются. Тогда соблюдаются и неравенства (14), (16). В силу непрерывной зависимости коэффициентов $B_1(\varepsilon)$ и $B_2(\varepsilon)$ от ε, неравенства (14) и (16) будут соблюдаться и в некоторой окрестности точки $\varepsilon = 0$, т. е.

$$\left.\begin{array}{l} B_1^2(\varepsilon) + 2 - 2B_2(\varepsilon) > 0 \\ |\alpha_1(\varepsilon)| < 1, \quad |\alpha_2(\varepsilon)| < 1 \end{array}\right\} \text{при } |\varepsilon| < \delta. \tag{17}$$

А это значит, что при $|\varepsilon| < \delta$ линейная система (23) будет иметь характеристические показатели с вещественными частями равными нулю, т. е. *необходимое условие осуществимости* (10) § 2 *будет соблюдаться*.

Следовательно *неосуществимость движения может обнаружиться из исследования линейной системы* (23) *лишь тогда, когда уже при* $\varepsilon = 0$ *имеет место одно из равенств* (18), (19) *или* (20)

$$B_1^2(0) + 2 - 2B_2(0) = 0, \tag{18}$$

$$|\alpha_1(0)| = 1, \tag{19}$$

$$|\alpha_2(0)| = 1. \tag{20}$$

Равенства (18), (19) и (20) позволяют определить те критические значения отношения частот «Юпитера» и «Сатурна» $\frac{n}{n_0}$, вблизи которых может обнаружиться неосуществимость.

Вычислим в действительности эти критические частоты. Из уравнений (18) и (11) находим

$$\cos \omega_1 T = \cos \omega_2 T, \tag{21}$$

откуда

$$\omega_1 T \pm \omega_2 T = 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{22}$$

Величины ω_1 и ω_2 суть корни биквадратного уравнения

$$\lambda^4 + (1+\mu)\lambda^2 + \frac{27}{4}\mu = 0, \tag{23}$$

т. е.

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1+\mu-\sqrt{(1+\mu)^2 - 27\mu}}{2}}, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{1+\mu+\sqrt{(1+\mu)^2 - 27\mu}}{2}}. \tag{24}$$

Далее

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{1+\mu} - n_0}. \tag{25}$$

Как мы видели раньше, величина μ заключена в пределах *

$$0 < \mu < 0{,}0401, \tag{26}$$

иначе корни уравнения (23) имели бы вещественные части, отличные от нуля, и точка L_4 была бы просто неустойчивой по Ляпунову. Для случая солнечной системы масса Юпитера $\mu = \frac{1}{1047}$, т. е. она удовлетворяет неравенству (26).

Подставляя ω_1, ω_2 и T из (24) и (25) в (22), получаем

$$\frac{2\pi}{\sqrt{1+\mu} - n_0}\left\{\sqrt{\frac{1+\mu-\sqrt{(1+\mu)^2-27\mu}}{2}} \pm \right.$$
$$\left. \pm \sqrt{\frac{1+\mu+\sqrt{(1+\mu)^2-27\mu}}{2}}\right\} = 2k\pi. \tag{27}$$

Так как μ величина весьма малая по сравнению с единицей, то удобно ввести вместо нее новую величину ν

$$\nu = \frac{27\mu}{(1+\mu)^2}. \tag{28}$$

* То, что $\mu > 0$, вытекает из физического смысла задачи.

Принимая во внимание, что $\sqrt{1+\mu}=n$, можем представить уравнение (27) в виде

$$\frac{n}{n-n_0}\left\{\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\nu}}{2}}\pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-\nu}}{2}}\right\}=k. \tag{29}$$

Исследуем теперь уравнение (29). При $k=0$ оно дает $\nu=1$ или, что то же самое, $(1+\mu)^2=27\mu$, а этот случай несовместим с неравенством (26). Считая $k\neq 0$, представим уравнение (29) в следующем виде

$$\frac{n_0}{n}=1-\frac{1}{k}\left\{\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\nu}}{2}}\pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-\nu}}{2}}\right\}. \tag{30}$$

Полагая

$$\left.\begin{aligned}\Phi_1(\nu)&=\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\nu}}{2}}+\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-\nu}}{2}},\\ \Phi_2(\nu)&=\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\nu}}{2}}-\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-\nu}}{2}},\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

находим следующие приближенные выражения этих функций:

$$\left.\begin{aligned}\Phi_1(\nu)&\doteq 1+\frac{\sqrt{\nu}}{2}-\frac{1}{2\cdot 4}\nu+\frac{1}{4\cdot 4}\nu\sqrt{\nu}-\frac{5}{2\cdot 4\cdot 4\cdot 4}\nu^2,\\ \Phi_2(\nu)&\doteq -1+\frac{\sqrt{\nu}}{2}+\frac{1}{2\cdot 4}\nu+\frac{1}{4\cdot 4}\nu\sqrt{\nu}+\frac{5}{2\cdot 4\cdot 4\cdot 4}\nu^2.\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

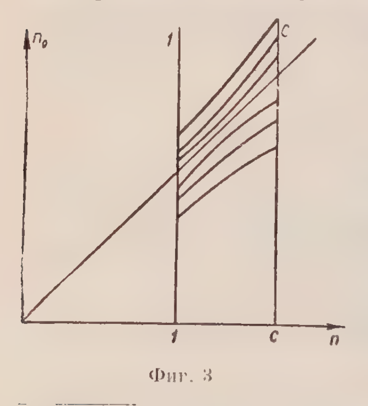
В случае Юпитера

$$\nu\doteq 0{,}0243, \tag{33}$$

поэтому из (30) и (32), полагая приближенно $\nu=0$, получаем следующие критические отношения частот *:

$$\left.\begin{aligned}&k=1,\quad \frac{n_0}{n}\doteq 0;\quad k=-1,\quad \frac{n_0}{n}\doteq 2;\quad k=2,\quad \frac{n_0}{n}\doteq\frac{1}{2};\\ &k=-2,\quad \frac{n_0}{n}\doteq\frac{3}{2},\ k=3,\quad \frac{n_0}{n}\doteq\frac{2}{3};\ \text{и т. д.}\end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Из уравнения (30) видим, что при очень больших значениях k, n_0 почти равно n. Рассмотрим плоскость n_0, n (фиг. 3). В силу неравенства (26) нас может интересовать лишь часть плоскости, заключенная между прямыми (1, 1) и (c, c). (Точка c на самом деле лежит весьма близко к 1, так как ее абсцисса равна 1,04; чертеж сделан без соблюдения масштаба.)



Фиг. 3

Задавая определенное значение n внутри промежутка (1; 1,04), мы получим для каждого значения n спектр критических значений n_0, соответствующих различным значениям k. Таким образом внутри полосы мы имеем бесчисленное множество кривых, соответствующих зна-

* Отрицательные значения k соответствуют случаю, когда «Сатурн» является внутренней планетой, а положительные — случаю, когда он является внешней планетой.

чениям $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ Отрезок прямой $n = n_0$ является кривой сгущения для этого множества кривых.

Критические частоты, которые мы до сих пор получили, вытекали из условия (18). Мы не использовали еще уравнений (19) и (20). Эти уравнения дают

$$|\cos \omega_1 T| = 1, \quad |\cos \omega_2 T| = 1,$$

или

$$\cos \omega_1 T = \pm 1, \quad \cos \omega_2 T = \pm 1. \tag{35}$$

Из (35) находим

$$\left. \begin{array}{ll} \omega_1 T = 2k\pi, & \omega_1 T = \pi + 2k\pi, \\ \omega_2 T = 2k\pi, & \omega_2 T = \pi + 2k\pi, \end{array} \right\} k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{36}$$

Подставляя в уравнения (36) вместо T, ω_1, ω_2 их значения, получаем

$$\left. \begin{array}{ll} \dfrac{n_0}{n} = 1 - \dfrac{1}{k} \sqrt{\dfrac{1 - \sqrt{1-\nu}}{2}}; & \dfrac{n_0}{n} = 1 - \dfrac{2}{2k+1} \sqrt{\dfrac{1 - \sqrt{1-\nu}}{2}}; \\ \dfrac{n_0}{n} = 1 - \dfrac{1}{k} \sqrt{\dfrac{1 + \sqrt{1-\nu}}{2}}; & \dfrac{n_0}{n} = 1 - \dfrac{2}{2k+1} \sqrt{\dfrac{1 + \sqrt{1-\nu}}{2}}. \end{array} \right\} \tag{37}$$

Подставляя в (37) приближенные значения функций $\Phi_1(\nu)$ и $\Phi_2(\nu)$ из (32), находим

$$\left. \begin{array}{l} \dfrac{n_0}{n} = 1 - \dfrac{1}{k} \left(\dfrac{\sqrt{\nu}}{2} + \dfrac{1}{4 \cdot 4} \nu \sqrt{\nu} + \ldots \right), \\ \dfrac{n_0}{n} = 1 - \dfrac{1}{k} \left(1 - \dfrac{1}{2 \cdot 4} \nu - \dfrac{5}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4} \nu^2 + \ldots \right), \\ \dfrac{n_0}{n} = 1 - \dfrac{2}{2k+1} \left(\dfrac{\sqrt{\nu}}{2} + \dfrac{1}{4 \cdot 4} \nu \sqrt{\nu} + \ldots \right), \\ \dfrac{n_0}{n} = 1 - \dfrac{2}{2k+1} \left(1 - \dfrac{1}{2 \cdot 4} \nu - \dfrac{5}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4} \nu^2 + \ldots \right). \end{array} \right\} \tag{38}$$

Первые три уравнения дают критические частоты, близкие * к прежним (34), последнее же уравнение дает другие критические частоты, именно:

$$k = 1, \quad \frac{n_0}{n} \doteq \frac{1}{3}; \quad k = 2, \quad \frac{n_0}{n} \doteq \frac{3}{5}; \quad \text{и т. д.} \tag{39}$$

Наше исследование показывает, что неосуществимость точки L_4 может появиться вследствие параметрического резонанса, т. е. изучаемый случай вполне аналогичен той картине, которая имеет место для уравнения Хилла или Матье **. Подобно тому как в уравнении Матье

$$\ddot{x} + (\lambda^2 + \varepsilon \cos 2t)\, x = 0$$

области неосуществимости появляются на плоскости λ, ε вблизи критических частот $\lambda = 1, 2, 3, \ldots$, также и в этой задаче, можно думать, области неосуществимости появятся вблизи критических частот (34). Это исследо-

* Если принять приближенно $\nu = 0$, то они совпадают с прежними.

** См., например [6].

вание мы дадим в следующей работе. Заметим, что в случае критического значения частоты точка $\varepsilon = 0$ является точкой разветвления корней характеристического уравнения (3), рассматриваемых как функции от ε. Поэтому для вычисления характеристических показателей надо применять либо метод Ляпунова, либо соответствующим образом видоизмененный метод Линштедта. Вопрос о том, какие заключения можно сделать из наших рассуждений для конкретного случая солнечной системы, мы исследуем в следующей работе.

5

Наблюдения над движениями астероидов показывают, что если вычислить оскулирующие элементы * n, e, γ, $\bar{\omega}$ орбит всех известных астероидов, отнесенные к одной какой-либо эпохе, и расположить их в таблицу ** по среднему суточному движению n и по числу астероидов N, то распределение астероидов оказывается неравномерным. Именно, соответствующая эмпирическая кривая имеет два резко выраженных минимума и два резко выраженных максимума. Минимумы находятся вблизи соизмеримости 1 : 2, 1 : 3 среднего суточного движения Юпитера ($n \approx 300''$) с средним суточным движением астероидов ($600''$ и $900''$). Максимумы находятся вблизи $640''$ и $780''$. Само собой напрашивается предположение, что эти пустоты или «люки» в кольце астероидов есть результат влияния Юпитера. Было бы действительно довольно странным, если бы факт существования люков именно вблизи соизмеримости 1 : 2 и 1 : 3 объяснялся случайной игрой чисел.

Строго доказать, исходя из уравнений движения (или может быть опровергнуть), что эти пустоты есть результат возмущающего действия Юпитера (своеобразный «резонанс»), и составляет математическую проблему распределения астероидов. Исследования, проведенные разными авторами ***, как будто подтверждают это предположение. Однако строгого и полного решения этой задачи до настоящего времени не существует, вследствие чего она представляет большой интерес как для небесной механики, так и для математики ****.

Мне представляются два возможных пути исследования этой задачи. Первый путь состоит в исследовании осуществимости круговых и эллиптических орбит по отношению к возмущениям Юпитера.

---

* n—среднее суточное движение астероида, e—эксцентриситет, γ—долгота перигелия, $\bar{\omega}$—долгота планеты в орбите. Для упрощения мы говорим о плоской задаче.

** Таблица приведена в книге Тиссерана ([7]). Там же можно найти и другие сведения относительно этой задачи. Из новой литературы см. Клозе ([8]).

*** См. ([8, 9]) и др.

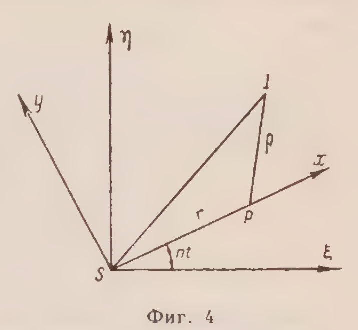
**** Строгое исследование необходимых условий устойчивости для круговых орбит было дано Цайпелем ([10]). Он получил те же критические частоты, которые и я получаю в этой работе, однако весьма сложным путем. Это наилучшим образом подтверждает целесообразность исследования осуществимости.

Второй путь состоит в изучении плотности распределения элементов орбит в фазовом пространстве.

Здесь мы ограничимся пока исследованием осуществимости круговых орбит относительно возмущающего действия Юпитера.

Составим уравнения движения астероида P с нулевой массой, находящегося под действием тяготения «Солнца» S и «Юпитера» I. Примем массу «Солнца» за единицу, массу «Юпитера» обозначим μ. Начало координат ξ, η поместим в S (фиг. 4). Единицу времени выберем так, чтобы постоянная тяготения равнялась 1. Обозначим расстояния $PS = r$, $PI = \rho$. Уравнения движения астероида, отнесенные к неподвижным осям ξ, η, имеют вид

$$\ddot{\xi} = \frac{\partial U}{\partial \xi}, \qquad \ddot{\eta} = \frac{\partial U}{\partial \eta} \tag{1}$$



Фиг. 4

где

$$U = \frac{1}{r} + \frac{\mu}{\rho}. \tag{2}$$

Составим теперь уравнения движения астероида P в полярных координатах, вращающихся с постоянной угловой скоростью n в направлении движения астероида P. Напишем для этого уравнения движения астероида P относительно вращающихся прямоугольных координат x, y:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2 x &= \frac{\partial U}{\partial x}, \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2 y &= \frac{\partial U}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Положим

$$\left.\begin{aligned} \xi^2 + \eta^2 = x^2 + y^2 = r^2, \\ \Omega = \frac{n^2}{2}(x^2 + y^2) + U = \frac{n^2}{2} r^2 + U. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Тогда уравнения (3) примут вид

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} = \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \qquad \ddot{y} + 2n\dot{x} = \frac{\partial \Omega}{\partial y}. \tag{5}$$

Введем обозначения

$$U_0 = \frac{1}{r}, \qquad \Omega_0 = \frac{n^2}{2} r^2 + U_0;$$

тогда

$$U = U_0 + \frac{\mu}{\rho}, \qquad \Omega = \Omega_0 + \frac{\mu}{\rho}. \tag{6}$$

Возьмем теперь полярную систему координат, ось которой совпадает с осью Sx. Уравнения (5) в полярных координатах имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 - 2nr\dot{\varphi} &= \frac{\partial \Omega}{\partial r}, \\ r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} + 2n\dot{r} &= \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi}\,\frac{1}{r}, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

где

$$\Omega = \frac{n^2}{2}r^2 + \frac{1}{r} + \frac{\mu}{\sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1\cos(\varphi - \varphi_1)}}. \tag{8}$$

Уравнения (7) можно написать в виде

$$\left.\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 - 2nr\dot{\varphi} - n^2 r + \frac{1}{r^2} &= \mu\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\rho}\right), \\ r^2\ddot{\varphi} + 2r\dot{r}\dot{\varphi} + 2nr\dot{r} &= \mu\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{\rho}\right). \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Предположим теперь, что при $\mu = 0$ астероид P равномерно вращается вокруг S с угловой скоростью n; угол φ примем равным нулю. Таким образом при $\mu = 0$ астероид P находится все время на оси x на расстоянии $r = R = \mathrm{const}$ от S. Подставляя в (9) $r = R$, $\varphi = 0$, находим

$$n = \frac{1}{R^{3/2}}. \tag{10}$$

Пусть теперь на астероид P с начального момента $t = 0$ действует еще «Юпитер». Исследуем осуществимость круговой орбиты $r = R$, $\varphi = 0$ по отношению к возмущениям «Юпитера».

Если круговая орбита о с у щ е с т в и м а, то она должна лежать в сколь угодно узком кольце, образованном концентрическими окружностями $R - \varepsilon$, $R + \varepsilon$ при μ достаточно малом. Это значит, что величина $|r(t) - R|$ при всех $t \geqslant 0$ будет оставаться сколь угодно малой, при μ достаточно малом.

Составляем уравнения возмущенного движения, полагая

$$r = R + u, \qquad \varphi = 0 + \psi. \tag{11}$$

Уравнения возмущенного движения имеют вид

$$\left.\begin{aligned} & u - 2n^{1/3}\dot{\psi} - 3n^2 u + \ldots = \\ & \quad = \mu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\rho}\right)\Big|_{0}^{R} + \frac{\partial^2\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\partial r^2}\Big|_{0}^{R} u + \frac{\partial^2\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\partial r\,\partial\varphi}\Big|_{0}^{R}\psi + \ldots\right], \\ & \psi + 2n^{5/3}\dot{u} + \ldots = \\ & \quad = \mu n^{4/3}\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\rho}\right)\Big|_{0}^{R} + \frac{\partial^2\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\partial r\,\partial\varphi}\Big|_{0}^{R} u + \frac{\partial^2\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\partial\varphi^2}\Big|_{0}^{R}\psi + \ldots\right]. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Здесь выписаны лишь линейные члены, а R выражено через n. Уравнения в вариациях, получаемые из (12), при $\mu=0$ будут

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2\bar{u}}{dt^2} - 2n^{1/3}\frac{d\bar{\psi}}{dt} - 3n^2\bar{u} = 0,\\ &\frac{d^2\bar{\psi}}{dt^2} + 2n^{5/3}\frac{d\bar{u}}{dt} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Предположим теперь, что «Юпитер» совершает круговое движение вокруг S с постоянной угловой скоростью n_0 (в осях ξ, η) и начальной фазой φ_1^0. Примем за единицу расстояние SI. Имеем

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_1 = (n_0 - n)\,t + \varphi_1^0, \quad r_1 = 1,\\ &\rho = \sqrt{1 + r^2 - 2r\cos[\varphi + (n - n_0)\,t - \varphi_1^0]}, \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

т. е. ρ есть периодическая функция t периода $T = \frac{2\pi}{n - n_0}$.

Согласно теореме § 1, вопрос об осуществимости «точки равновесия» $r = R$, $\varphi = 0$, $\dot{r} = 0$, $\dot{\varphi} = 0$ сводится к исследованию характеристических показателей системы однородных линейных уравнений с периодическими коэффициентами

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2\tilde{u}}{dt^2} - 2n^{\frac{1}{3}}\frac{d\tilde{\psi}}{dt} - [3n^2 + \mu A_{11}(t)]\,u - \mu A_{12}(t)\,\tilde{\psi} = 0,\\ &\frac{d^2\tilde{\psi}}{dt^2} + 2n^{\frac{5}{3}}\frac{d\tilde{u}}{dt} - \mu n^{\frac{4}{3}} A_{12}(t)\,\tilde{u} - \mu n^{\frac{4}{3}} A_{22}(t)\,\tilde{\psi} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Общее решение системы (13) имеет вид *

$$\left.\begin{aligned} &\bar{u} = C_1 \cdot 2n^{-\frac{5}{3}} + C_2 e^{nit} + C_3 e^{-nit} + C_4 \cdot 0,\\ &\bar{\psi} = C_1 \cdot (-3t) + C_2 \cdot 2in^{\frac{2}{3}} e^{nit} - C_3 \cdot 2in^{\frac{2}{3}} e^{-nit} + C_4 \cdot 1. \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Напишем систему (15) в нормальной форме

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\tilde{u}}{dt} = \dot{\tilde{u}}, \quad \frac{d\tilde{\psi}}{dt} = \dot{\tilde{\psi}},\\ &\frac{d\dot{\tilde{u}}}{dt} = (3n^2 + \mu A_{11})\,\tilde{u} + \mu A_{12}\tilde{\psi} + 2n^{\frac{1}{3}}\dot{\tilde{\varphi}},\\ &\frac{d\dot{\tilde{\psi}}}{dt} = \mu n^{\frac{4}{3}} A_{12}\tilde{u} + \mu n^{\frac{4}{3}} A_{22}\tilde{\psi} - 2n^{\frac{5}{3}}\dot{\tilde{u}}. \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

---

* Величина $|\tilde{u}|$ при малых $|C_1|$, $|C_2|$, $|C_3|$ останется малой при всех t. Это понятно, если вспомнить, что круговое движение устойчиво в смысле Ляпунова по отношению к величине радиуса-вектора (см. замечание Ляпунова в его диссертации ([4]), стр. 13).

Матрица фундаментальной системы решений (16) в каноническом виде будет иметь вид

$$\left\| \begin{matrix} e^{nit}, & 2in^{\frac{2}{3}}e^{nit}, & nie^{nit}, & -2n^{\frac{5}{3}}e^{nit} \\ e^{-nit}, & 2in^{\frac{2}{3}}e^{-nit}, & -nie^{-nit}, & -2n^{\frac{5}{3}}e^{-nit} \\ e^{0\cdot t}\cdot 0, & e^{0\cdot t}\cdot 1, & e^{0\cdot t}\cdot 0, & e^{0\cdot t}\cdot 0 \\ e^{0\cdot t}\cdot 2n^{-\frac{5}{3}}, & e^{0\cdot t}\cdot(-3t), & e^{0\cdot t}\cdot 0, & e^{0\cdot t}\cdot(-3) \end{matrix} \right\| \qquad (18)$$

6

Вычислим теперь критические частоты для случая круговых орбит. Пусть В — матрица интегральной подстановки системы (17) § 5, соответствующая периоду T. Характеристические числа матрицы В, при $\mu = 0$, равны

$$\rho_1(0) = e^{inT}, \quad \rho_2(0) = e^{-inT}, \quad \rho_3(0) = 1, \quad \rho_4(0) = 1. \qquad (1)$$

Вычисляем коэффициенты B_1 и B_2 характеристического уравнения

$$B_1(0) = -(1 + \cos nT), \quad B_2(0) = 1 + 2\cos nT. \qquad (2)$$

Уравнения

$$B_1^2(0) + 2 - 2B_2(0) = 0, \ |\alpha_1(0)| = 1, |\alpha_2(0)| = 1,$$

в данном случае будут

$$(1 - \cos nT)^2 = 0, \qquad (3)$$

$$|\alpha_1(0)| \equiv |1| = 1, \quad |\alpha_2(0)| \equiv |\cos nT| = 1. \qquad (4)$$

Уравнение (3) и второе уравнение (4) дают

$$\cos nT = 1, \quad \cos nT = -1, \qquad (5)$$

откуда

$$nT = 2k\pi, \quad nT = \pi + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (6)$$

Подставляя в (6) вместо T его значение, находим

$$\frac{2\pi n}{n - n_0} = 2k\pi, \qquad \frac{2\pi n}{n - n_0} = \pi + 2k\pi,$$

откуда

$$\frac{n_0}{n} = 1 - \frac{1}{k}, \quad \frac{n_0}{n} = \frac{2k-1}{2k+1}. \qquad (7)$$

Из (7) получаем критические отношения частот:

$$\left. \begin{matrix} k = -1, & \frac{n}{n_0} = \frac{1}{2}, & \frac{n}{n_0} = \frac{1}{3}, \\ k = 2, & \frac{n}{n_0} = 2, & \frac{n}{n_0} = \frac{5}{3}, \\ k = -2, & \frac{n}{n_0} = \frac{2}{3}, & \frac{n}{n_0} = \frac{3}{5}, \\ k = 3, & \frac{n}{n_0} = \frac{3}{2}, & \frac{n}{n_0} = \frac{7}{5}. \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix} \right\} \qquad (8)$$

Первое из уравнений (4) показывает, что *при любых значениях частот* один из корней характеристического уравнения, при $\mu > 0$, может дать характеристический показатель с вещественной частью

отличной от нуля. В этом нет ничего удивительного, если вспомнить, что круговое движение, даже в обычном смысле Ляпунова, неустойчиво по отношению к полярному углу φ.

Исследование областей неосуществимости, а также и вопроса о том, в какой мере применима эта теория к конкретному случаю солнечной системы, мы дадим в следующей работе.

В заключение считаю своим долгом выразить глубокую благодарность В. В. Степанову, сделавшему ряд ценных указаний.

Научно-исслед. институт математики и механики Ленингр. гос. университета

Поступило 3 XII 1940

ЛИТЕРАТУРА

[1] Артемьев Н. А., Осуществимые движения, Известия Ак. Наук СССР, серия матем., № 3 (1939), 351—366.
[2] Артемьев Н. А., Осуществимые траектории, ibid., № 4 (1939), 429—446.
[3] Artemieff N., Stabilité au sens de Liapounoff et nombre de solutions périodiques, Compositio Mathem., v. 6, f. 1 (1938), 78—92 [неравенство (39′) на стр. 86].
[4] Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения (диссертация и статьи), Л.—М., ОНТИ, 1935.
[5] Charlier K. L., Die Mechanik des Himmels, B. 2, Leipzig, 1907 [Abschn. IX, § 4].
[6] Мандельштам Л. и Папалекси Н., О параметрическом возбуждении электрических колебаний, Журн. техн. физики, IV, вып. 1 (1934), 5.
[7] Tisserand F., Traité de mécanique céléste, Paris, Gautier-Villars, v. IV, 1896 [ch. XXV].
[8] Klose A., Über die Kommensurabilitätslücken im System der kleinen Planeten, Astr. Nachr., B. 218, No. 5231—32 (1923).
[9] Schütte K., Über die säkularen Störungen der kleinen Planeten in der Nachbarschaft der periodischen Lösungen niedrigzahliger Kommensurabilität, Astr. Nachr., B. 233, No. 5580 (1928).
[10] Zeipel H. v., Sur la stabilité des solutions périodiques de la première sorte dans le problème des petits planètes, Ark. f. Mat., Astr. och Fysik, B. 10, H. 4 (1915).

N. ARTEMIEFF. DIE BESTIMMUNG DER REALISIERBARKEIT DER PERIODISCHEN BEWEGUNGEN

ZUSAMMENFASSUNG

In der vorhergehenden Arbeit [1, 2] habe ich den Begriff der «realisierbaren» Bewegungen und der «realisierbaren» Trajektorien eingeführt und für eine Klasse periodischer Bewegungen ein hinreichendes Kriterium der Realisierbarkeit angegeben. In der vorliegenden Arbeit beweise ich ein hinreichendes Kriterium der Realisierbarkeit der Trajektorien für eine andere Klasse von periodischen Bewegungen.

In einem beschränkten Gebiet $\overline{G}_n$ des n-dimensionalen Raumes $x_1, \ldots, x_n$ und für alle $t \geqslant 0$, sei ein System von Differentialgleichungen

$$\frac{dx_j}{dt} = X_j(t, x_1, \ldots, x_n), \quad j = 1, \ldots, n \tag{1}$$

gegeben. Die Funktionen X_j mögen den folgenden Bedingungen genügen:

I. X_j, $\frac{\partial X_j}{\partial x_k}$, $j, k = 1, \ldots, n$, sind reell, eindeutig und stetig in dem abgeschlossenen Gebiet

$$\bar{G}_{1,n} \left\{ \begin{array}{l} 0 \leqslant t, \\ \{x\} \in \bar{G}_n. \end{array} \right.$$

II. Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial X_j}{\partial x_k}$, $j, k = 1, \ldots, n$, genügen in $\bar{G}_{1,n}$ der Lipschitzbedingung

$$\left| \frac{\partial X_j}{\partial x_k}\bigg|_{x'} - \frac{\partial X_j}{\partial x_k}\bigg|_{x} \right| \leqslant L \sum_{k=1}^{n} | x'_k - x_k |,$$

wo L eine Konstante bedeutet.

Betrachten wir zur Zeit $t = 0$ irgendein Punkt $\in G_n$. Infolge der gemachten Voraussetzungen wird diesen Anfangsbedingungen eine gewisse Lösung des Systems (1)

$$\{x\} = \{\varphi(t)\} \tag{2}$$

entsprechen. Wir setzen voraus, dass die Lösung (2) für alle $t \geqslant 0$ existiert und für diese Werte von t dem Gebiet G_n angehört.

Wir veranschauligen die Lösung (2) in dem $(n+1)$-dimensionalen Raum mit den Koordinaten $t, x_1, \ldots, x_n$. Diesen Lösung wird eine $(n+1)$-dimensionale Integralkurve entsprechen. Die η-Umgebung dieser Integralkurve, die den nicht-negativen t-Werten entspricht, bezeichnen wir mit $U_\eta(\{\varphi(t)\}^+)$. Die η-Umgebung der positiven Halbtrajektorie K^+ dieser Bewegung bezeichnen wir mit $U_\eta(K^+)$.

Gleichzeitig mit dem System (1) betrachten wir nun das variierte System

$$\frac{dy_j}{dt} = X_j(y_1, \ldots, y_n) + \varepsilon Y_j(t, y_1, \ldots, y_n), \quad j = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

in welchem die Funktionen Y_j den folgenden Bedingungen genügen:

$Y_j(t, y_1, \ldots, y_n)$ sind reell, eindeutig und stetig für $t \geqslant 0$, $\{y\} \in \bar{G}_n$ und in diesem Gebiet

$$| Y_j(t, y_1, \ldots, y_n) | \leqslant 1. \tag{4}$$

Ausserdem sollen die Funktionen Y_j in demselben Gebiet der Lipschitzbedingung

$$| Y_j(t, y'_1, \ldots, y'_n) - Y_j(t, y_1, \ldots, y_n) | \leqslant l \sum_{k=1}^{n} | y'_k - y_k | \tag{5}$$

genügen, wo l eine Konstante bedeutet.

Definition. Die Bewegung $\{\varphi(t)\}$ des Systems (1) ist positiv realisierbar, wenn für jedes noch so kleines $\delta > 0$ eine Zahl $\varepsilon(\delta) > 0$ gefunden werden kann, derart, dass die Bewegung $\{\psi(t)\}$ des variierten Systems (3), die den Anfangsbedingungen $\{\psi(0)\} = \{\varphi(0)\} + \{a\}$, wo $|a_j| < \varepsilon$, $j = 1, \ldots, n$, ist, genügt, für alle $t \geqslant 0$ existiert und den Ungleichungen

$$|\psi_j(t) - \varphi_j(t)| \leqslant \delta, \quad j = 1, \ldots, n,$$

genügt.

Definition. Die Halbtrajektorie K^+ der Bewegung $\{\varphi(t)\}$ ist positiv realisierbar, wenn für jedes noch so kleines $\delta > 0$ eine Zahl $\varepsilon(\delta) > 0$ gefunden werden kann, derart, dass die Halbtrajektorie L^+ der Bewegung $\{\psi(t)\}$ des variierten Systems der Umgebung $U_\delta(K^+)$ angehört.

In der vorliegenden Arbeit gebe ich ein hinreichendes Kriterium der Nichtrealisierbarkeit für eine Klasse von periodischen Bewegungen. Dieses Kriterium wird auf zwei Aufgaben der Himmelsmechanik angewendet:

1. Wir zeigen, dass die Librationspunkte L_4, L_5 in dem beschränkten Dreikörperproblem bezüglich der Störungen des vierten Körpers «Saturn» nichtrealisierbar sind, falls in der mittleren Tagesbewegung von «Jupiter» und «Saturn» Kommensurabilitäten vorhanden sind.

2. Wir beweisen, dass Kreisbahnen in dem Zweikörperproblem nichtrealisierbar sind, falls in der mittleren Tagesbewegung des Asteroids und Jupiters Kommensurabilitäten vorhanden sind.

Die erste Aufgabe ist eng mit der Aufgabe über die Bewegung der Trojaner verbunden. Die zweite Aufgabe ist eng mit der Aufgabe der Verteilung der Asteroiden verbunden. In beiden Fällen ist die Nichtrealisierbarkeit der Bewegungen durch das Vorhandensein der parametrischen Resonanz erklärt ([6]).

Es sei das System (1) von gerader Ordnung $n = 2m$. Es seien die Funktionen X_j, Y_j periodische Funktionen von t mit der Periode 2π, die den Bedingungen I, II genügen. Wir haben den folgenden Satz:

SATZ. *Es sei* $\{f(t)\}$ *eine periodische Lösung des Systems* (1) *von Periode* 2π. *Es seien die charakteristischen Exponente* (15) (§ 1) *des Systems* (7) *bei* $\varepsilon = 0$ (§ 1) *rein imaginär und paarweise konjugiert, d. h. den Bedingungen* (16) § 1 *genügend. Wenn dann die Funktionen* Y_j *derart sind, dass wenigstens eine von den Grössen* $\lambda_k(\varepsilon)$, $k = 1, 2, \ldots, 2m$, *oder einige von ihnen für* $0 < \varepsilon < \alpha$ *positiv sind, so ist die periodische Bewegung* $\{f(t)\}$ *des Systems* (1) § 1 *positiv nichtrealisierbar bezüglich der Störungen* Y_j.

In § 2 wird dieser Satz zum Studium der Nichtrealisierbarkeit des Gleichgewichtspunktes eines konservativen Systems bezüglich der Störungen periodischen Charakters angewendet.

Es sei n die mittlere Tagesbewegung von «Jupiter» und n_0 die mittlere Tagesbewegung von «Saturn». Die parametrische Resonanz ist in der Nähe der kritischen Werte von $\frac{n_0}{n}$, die durch die Formeln (34) und (39)

des § 4 bestimmt werden, möglich. Diese Formel kann leicht aus der Untersuchung der Verzweigungspunkte der Wurzeln der reziproken Gleichung (3) § 4 erhalten werden.

In der Aufgabe der Realisierbarkeit von Kreisbahnen werden die kritischen Kreisbahnen durch die Formel (8) § 6 bestimmt; in dieser Formel bedeutet n die mittlere Tagesbewegung des Asteroids und n_0 die mittlere Tagesbewegung des Jupiters.

Die Untersuchung der Bereiche der Nichtrealisierbarkeit wird in der folgenden Arbeit gegeben.

Somit erklärt die Theorie der realisierbaren Bewegungen mittels einer strengen und sehr elementaren Methode, wenigstens zum Teil, den physikalischen Sinn der berühmten Leeren in dem Asteroidenring, sowie die Frage über die Bewegung der Trojaner.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADEMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 5 (1941), 159—164 Série mathématique

А. Я. БОЯРСКИЙ

О ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ КОРРЕЛЯЦИИ

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

В работе изучаются соотношения, характеризующие режим связи для случая стационарного стохастического процесса на плоскости. Решается задача выделения одного класса таких процессов, аналогичных цепям Маркова, в которых связь между двумя точками исчезает, если становятся известными значения величин на замкнутом контуре, содержащем внутри себя одну из точек.

1. Геометрической корреляцией будем называть корреляцию между значениями переменной u в случайно выбранной точке (или ее средней величиной по области, на контуре и т. п.) и в другой точке, находящейся на определенном расстоянии от первой или на конце определенного вектора, начинающегося в первой точке (или средней величиной по области, расположенной относительно этой точки определенным образом, и т. п.)

Простейшим случаем геометрической корреляции является корреляция между двумя точками линии, по существу рассматриваемая в теории стационарных процессов. Математическое ожидание u мы, как и там, будем в дальнейшем считать равным нулю, а дисперсию равной 1.

Если вместо линии задана плоскость, то каждая точка определяется не одной, а двумя координатами x_1 и x_2. Значение u будет тогда представлять собой функцию двух переменных

$$f(x_1, x_2).$$

Коэффициент геометрической корреляции между «точкой», случайно взятой на данной плоскости (т. е. значением в ней u), и другой точкой, имеющей определенные координаты в отношении первой, может теперь зависеть не только от расстояния между этими точками. Если обозначить через X_1 и X_2 координаты второй точки в отношении первой (выбранной случайно), то коэффициентом корреляции между ними будет среднее значение

$$f(x_1, x_2) \cdot f(x_1 + X_1, x_2 + X_2).$$

Отсюда видно, что он представляет собой функцию двух переменных X_1 и X_2, т. е. некоторую функцию $r(X_1, X_2)$.

Из определения ясно, что

$$r(X_1, X_2) = r(-X_1, -X_2).$$

Вообще говоря, коэффициент корреляции может быть зависящим не только от расстояния между парой точек, но и от направления соединяющего их вектора. Но мы будем его в дальнейшем считать зависящим только от расстояния между точками Δ, и притом некоторой непрерывной функцией $r(\Delta)$, причем $r(0)=1$.

Установим следующие определения и обозначения:

r — коэффициент корреляции между двумя точками;

$\bar{r}_K$ — средняя величина коэффициентов между всеми парами точек контура или области K;

$\bar{r}_{AK}$ — средняя величина коэффициента точки A и всех точек K;

$\bar{r}_{KK'}$ — средняя величина коэффициента между всеми точками двух контуров K и K';

$\bar{R}_{AK}$ — коэффициент корреляции значения u в точке A и среднего значения u на K;

$\bar{R}_{KK'}$ — коэффициент корреляции между средними значениями u на двух контурах K и K';

R_{AK} — совокупный коэффициент корреляции значения u в точке A по значениям во всех точках контура (или области) K (предел совокупного коэффициента корреляции по n значениям в n точках, взятых на каждой из n частей, на которые разбит K, при $n \to \infty$);

α_K^2 — дисперсия среднего значения на K.

Легко устанавливаются следующие основные соотношения (u_A ниже есть значение u в точке A; $u_1, u_2, \ldots, u_n$ — значения u в n точках контура K; r_{Ai} — коэффициенты корреляции между ними и точкой A, и U — среднее значение u на контуре K):

$$\bar{r}_{AK} = \lim_{n\to\infty} \frac{\Sigma r_{Ai}}{n} = \lim \frac{\Sigma E u_A u_i}{n} = \lim E \frac{\Sigma u_A u_i}{n} = \\ = \lim E\left(u_A \frac{\Sigma u_i}{n}\right) = E u_A U = \bar{R}_{AK}\,\alpha_K. \tag{1}$$

Далее, отличая штрихом величины, относящиеся ко второму контуру K', от таких же величин первого, имеем:

$$\bar{R}_{KK'} = \lim_{n\to\infty} \frac{E\frac{\Sigma u_i}{n}\cdot\frac{\Sigma u'_j}{n'}}{\sqrt{E\left(\frac{Eu_i}{n}\right)^2\cdot E\left(\frac{\Sigma u_j}{n}\right)^2}} = \frac{\lim \frac{\Sigma E u_i u'_j}{nn'}}{\alpha_K \alpha_{K'}} = \frac{\bar{r}_{KK'}}{\alpha_K \alpha_{K'}}. \tag{2}$$

И наконец

$$\alpha_K^2 = \lim_{n\to\infty} E\left(\frac{\Sigma u_i}{n}\right)^2 = \lim \frac{\Sigma E u_i u_j}{n^2} = \bar{r}_K. \tag{3}$$

2. С помощью этих основных соотношений можно например найти следующие величины для окружности K радиуса a и ее центра A (что для нас представляет интерес не только как пример, но и в виду дальнейших целей):

$$\alpha_K^2 = \bar{r}_K = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi r\left(2a\sin\frac{\theta}{2}\right)d\theta. \tag{4}$$

Здесь интегрирование достаточно вести до π, так как при прохождении второй половины окружности те же коэффициенты будут повторяться в обратном порядке;

$$\bar{r}_{AK} = r(a) \tag{5}$$

в виду равноудаленности точек K от центра;

$$\bar{R}_{AK} = \frac{\bar{r}_{AK}}{\alpha_K} = \frac{r(a)}{\alpha_K}. \tag{6}$$

Если возьмем $2n$ точек в вершинах вписанного правильного $2n$-угольника, то в уравнении регрессии u_A по $u_1, u_2, \ldots, u_{2n}$

$$\bar{u}_A = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \ldots + c_{2n} u_{2n} \tag{*}$$

все $c_i = c$ в силу симметрии. Поэтому

$$\bar{u}_A = c \sum u_i = c\ 2n \frac{\Sigma u_i}{2n}$$

есть в то же время уравнение регрессии u_A по средней $\frac{\Sigma u_i}{2n}$, так как если коэффициент регрессии в таком уравнении должен быть некоторое $b \neq 2nc$, то заменив в (*) все c_i на $\frac{b}{2n}$, мы получили бы исправленное уравнение, лучше удовлетворяющее условию способа наименьших квадратов. А по заданию (*) уже есть уравнение регрессии.

Но если уравнение регрессии по $u_1, \ldots, u_{2n}$ совпадает с уравнением регрессии по их средней, то совпадают и соответствующие коэффициенты корреляции. Переходя к пределу при $n \to \infty$ и принимая во внимание (6) и (4), имеем для окружности и центра

$$R_{AK}^2 = \bar{R}_{AK}^2 = \frac{r^2(a)\pi}{\int\limits_0^\pi r\left(2a \sin\frac{\theta}{2}\right) d\theta}. \tag{7}$$

Эта формула подтверждается и непосредственным расчетом. Коэффициент корреляции между u_i и u_j в случае окружности зависит (при данном n) только от абсолютной величины $|j-i| = s$. Обозначив его r_s, имеем для совокупного коэффициента R_{2n} корреляции u_A по $u_1, \ldots, u_{2n}$:

$$R_{2n}^2 = \frac{-\begin{vmatrix} 1 & r_1 & r_2 & \ldots & r_n & r_{n-1} & \ldots & r_1 & r(a) \\ r_1 & 1 & r_1 & \ldots & r_{n-1} & r_n & \ldots & r_2 & r(a) \\ r_2 & r_1 & 1 & \ldots & r_{n-2} & r_{n-1} & \ldots & r_3 & r(a) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_1 & r_2 & r_3 & \ldots & r_{n-1} & r_{n-2} & \ldots & 1 & r(a) \\ r(a) & r(a) & r(a) & \ldots & r(a) & r(a) & \ldots & r(a) & 0 \end{vmatrix}}{M_{2n}}$$

где M_{2n} — минор последнего элемента определителя, стоящего в числителе.

Благодаря особенностям взятого случая, мы в знаменателе имеем циркулянту. Это позволяет вычислить без особого труда, что

$$R_{2n}^2 = \frac{r^2(a)}{\sum\limits_{s=0}^{n-1} r_s + \sum\limits_{s=1}^{n} r_s / 2n},$$

где $r_s = r\left(2a\sin\frac{s\pi}{2n}\right)$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем уже приведенную выше формулу (7).

3. Добавим теперь вторую окружность K', концентрическую первой, радиуса $ma > a$. Пусть $u'_1, \ldots, u'_{2n}$ суть значения u в точках K' на продолжении тех же $2n$ радиусов. В уравнении регрессии

$$u_A \text{ по } u_1, \ldots, u_{2n}, u'_1, \ldots, u'_{2n}$$
$$\bar{u}_A = c_1u_1 + \ldots + c_{2n}u_{2n} + c'_1u'_1 + \ldots + c'_{2n}u'_{2n}$$

все $c_i = c$ и все $c'_j = c'$ по соображениям той же симметрии. Следовательно оно превращается в

$$\bar{u}_A = c\sum u_i + c'\sum u'_j = 2nc\frac{\sum u_i}{2n} + 2nc'\frac{\sum u'_j}{2n},$$

т. е. в уравнение регрессии по двум средним $\frac{\sum u_i}{2n}$ и $\frac{\sum u'_j}{2n}$. Следовательно совокупный коэффициент u_A по $u_1, \ldots, u_{2n}, u'_1, \ldots, u'_{2n}$ равен совокупному коэффициенту u_A по этим двум средним. Переходя к пределу при $n \to \infty$, имеем

$$R_{A(KK')} = \bar{R}_{A(K,K')}, \tag{8}$$

где $\bar{R}_{A(K,K')}$ обозначает совокупный коэффициент u_A по двум средним величинам U_K и $U'_{K'}$.

4. В виду практических целей, а именно, различных расчетов, с которыми мы встречаемся при отборе проб на площади и т. п., представляет интерес исследование характера функции $r(\Delta)$ при некоторых ограничительных условиях. Если вместо плоскости имеем линию (каковой можно представить себе ось времени, что целиком приводит всю проблему к стационарному процессу), то условие равенства нулю частного коэффициента корреляции между любыми двумя точками (отделенными расстоянием Δ) при исключенной некоторой промежуточной точке легко приводит к

$$r(\Delta) = \lambda^{\Delta} \quad (\lambda \leq 1). \tag{9}$$

Отсюда для двух отрезков линии величиной s с расстоянием $\rho > 0$ между их ближними концами имеем

$\bar{R}_{KK'} = \frac{(\lambda^s - 1)^2}{2(\lambda^s - 1 - s\ln\lambda)} \cdot \lambda^{\rho}$, а для девиаты средней на таком отрезке

$$\alpha_s^2 = \frac{2}{s^2\ln^2\lambda}(\lambda^s - 1 - s\ln\lambda).$$

Эти формулы позволяют сделать ряд практических выводов о количестве, размере и расположении проб, дающих лучшие результаты.

То же условие поглощения связи на плоскости означает необходимость равенства нулю частного коэффициента корреляции между двумя точками при исключенных значениях во всех точках разделяющего их замкнутого контура. Если этот контур — окружность радиуса a с центром в одной из точек (A), а вторая точка лежит на концентрической окружности радиуса $ma > a$, то это условие эквивалентно условию

равенства нулю частного коэффициента корреляции между центром и всеми точками внешней окружности при исключении всех точек внутренней. В самом деле, при исключении всех точек внутренней окружности должны превратиться в нуль коэффициенты корреляции между центром и каждой отдельной точкой внешней окружности. Но тогда будет равен нулю и совокупный коэффициент центра по всем этим точкам вместе. В силу предыдущих соображений [(7) и (8)] можно совокупные коэффициенты по точкам одной или обеих окружностей заменить коэффициентом со средней на внутренней окружности и совокупным коэффициентом по средним на обеих окружностях.

Наше условие следовательно сводится к

$$\overline{R}_{AK} = \overline{R}_{A(K, K')} \tag{10a}$$

или $\overline{R}_{AK'(K)} = 0$, т. е. к равенству нулю частного коэффициента между u_A и $U'_{K'}$ при исключенном U_K. Но это приводит к $\overline{R}_{AK'} = \overline{R}_{AK} \cdot \overline{R}_{KK'}$, или если воспользоваться (6) и (2), к

$$\frac{r(ma)}{\alpha_{K'}} = \frac{r(a)}{\alpha_K} \cdot \frac{\bar{r}_{KK'}}{\alpha_K \cdot \alpha_{K'}},$$

т. е. к

$$r(ma)\,\alpha_K^2 = r(a)\,\bar{r}_{KK'}; \tag{10b}$$

α_K^2 имеем по формуле (4), а $\bar{r}_{KK'}$ находим непосредственно интегрированием:

$$\bar{r}_{KK'} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} r\left(a\sqrt{1-2m\cos\theta+m^2}\right)d\theta.$$

Подставив это в (10b) и приняв во внимание (4), получим после простых преобразований условие

$$r(ma)\int_0^{\pi/2} r(2a\sin\delta)\,d\delta = r(a)\int_0^{\pi/2} r\left(a\sqrt{(m-1)^2+4m\sin^2\delta}\right)d\delta. \tag{11}$$

Положив здесь $r(x) = f(x^2)$, $a^2 = z$, дифференцируя обе части по m, сократив на $2z$, положив $m = 1$, приведем наше условие к виду

$$f'(z)\,\varphi(z) = f(z)\,\frac{\varphi'(z)}{2}, \tag{12}$$

где

$$\varphi(z) = \int_0^{\pi/2} f(4z\sin^2\delta)\,d\delta; \tag{13}$$

(12) и (13) вместе с условием $f(0) = r(0) = 1$ приводят к

$$\int_0^{\pi/2} f(4z\sin^2\delta)\,d\delta = \frac{\pi}{2}\,[f(z)]^2. \tag{14}$$

Будем искать решение уравнения (14) в виде степенного ряда

$$f(y) = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \ldots$$

Подстановка этой суммы (при соответствующей замене y) в обе части (14), интегрирование и сравнение коэффициентов при одинаковых степеня х z позволяет методом полной индукции доказать, что $a_i = \frac{p^n}{n!n!}$, т. е.

$$f(y) = 1 + \frac{py}{1 \cdot 1} + \frac{p^2y^2}{2!2!} + \ldots,$$

и (положив $p = -h^2$, чтобы было $f'(0) < 0$)

$$r(x) = f(x^2) = 1 - \frac{h^2x^2}{1 \cdot 1} + \frac{h^4x^4}{2!2!} - \ldots = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos(2hx\cos t)\,dt. \qquad (15)$$

Вообще следовало бы проверить, дает ли это решение уравнения (11), так как в наших преобразованиях мы заменили его вытекающим из него следствием. Но уже полученный результат показывает, что в рамках положительных коэффициентов корреляции, т. е. при условии, что $r(x)$ убывая остается больше нуля, задача неразрешима. Чтобы в этом убедиться, достаточно подставить в (15) значение $x = \frac{\sqrt{2}}{h}$, для которого сумма членов ряда меньше нуля. Нам кажется, что вне рамок положительных r задача имеет меньше практического интереса. Вопрос же о возможности или невозможности решения задачи при любых r, как положительных, так и отрицательных, остается открытым.

Институт народнохозяйственного учета

Поступило
7 I 1941

A. BOJARSKI. SUR LA CORRELATION GÉOMÉTRIQUE

RÉSUMÉ

L'auteur donne le nom de «correlation géométrique» à la correlation des valeurs d'une variable prises en deux points choisis par hasard sur le plan et dont la distance est donnée, ou bien des valeurs moyennes de la variable sur deux contours ayant une forme et une grandeur donnée et situés d'une manière fixe l'un par rapport à l'autre. Si au lieu du plan on n'a qu'une ligne, et si le coefficient de correlation partiale de deux points (c'est-à-dire des valeurs correspondantes de la variable) à distance Δ, un point intermédiaire quelconque étant exclu, est nul, alors la correlation de ces points est $\lambda^{-\Delta}$ (où $\lambda > 1$). Pour le cas du plan, des conditions analogues signifieraient que le coefficient de correlation partiale de deux points est nul quand on exclut tous les points d'un certain contour fermé tel que l'un des points considérés est à l'intérieur et l'autre en dehors de ce contour.

L'auteur prouve qu'il est impossible à satisfaire ces conditions si quels que soient deux points du plan, le coefficient est positif et si le coefficient est une fonction continue de la distance, égale à 1 quand la distance est nulle et qui décroit en restant toujours positive. Ainsi le problème qui dans le cas d'une ligne ne présente aucune difficulté devient insoluble quand on passe à une espace à deux dimensions dans les conditions qui viennent d'être indiquées.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADEMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 5 (1941), 165—172 Série mathématique

А. В. ГРОШЕВ

ОБЛАСТЬ ПРИТЯЖЕНИЯ ЗАКОНА ПУАССОНА

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

В статье дается необходимое и достаточное условие для того, чтобы функция распределения случайной величины принадлежала области частичного притяжения закона Пуассона. Отдельно рассмотрен случай безгранично делимой случайной величины.

§ 1

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ — последовательность взаимно независимых случайных величин с одной и той же функцией распределения $F(x)$. Говорят, что закон распределения $F(x)$ принадлежит области полного притяжения закона $\Phi(x)$, если можно подобрать постоянные A_n и $B_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ так, чтобы законы распределения сумм

$$S_n = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{B_n} - A_n$$

при $n \to \infty$ сходились к $\Phi(x)$ (при этом необходимо $B_n \to \infty$).

В настоящее время известны все законы, обладающие областями полного притяжения; это — устойчивые законы [см. например ([6]), стр. 90]. Известны ([2]) также и области полного притяжения устойчивых законов.

Некоторые функции распределения, не входящие в область полного притяжения ни одного устойчивого закона, обладают однако тем свойством, что если индекс n пробегает не все целые значения, а лишь определенную подпоследовательность $k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$ ($k_n \to \infty$ при $n \to \infty$), то законы распределения сумм

$$S_{k_n} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{k_n}}{B_n} - A_n \qquad (1)$$

сходятся к некоторому предельному закону $\Phi(x)$, отличному от единичного. В таких случаях говорят, что $F(x)$ принадлежит области частичного притяжения закона $\Phi(x)$. Известно [см. ([6]), стр. 105], что все безгранично делимые законы распределения и только они имеют области частичного притяжения, но области частичного притяжения изучены мало.

В настоящей статье мы определяем область частичного притяжения закона Пуассона

$$P(x = \alpha m + \beta) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} \quad (m = 1, 2, \ldots), \qquad (2)$$

который, как известно, не является устойчивым и следовательно области полного притяжения не имеет. В формуле (2) будем считать $\alpha > 0$.

ТЕОРЕМА 1. *Для того чтобы закон распределения $F(x)$ принадлежал области частичного притяжения закона Пуассона, необходимо и достаточно, чтобы при любом положительном $\varepsilon < 1$*

$$\varliminf_{C\to\infty} \frac{\int\limits_{|x-1|>\varepsilon} \frac{x^2}{1+x^2} dF(Cx)}{\int\limits_{|x-1|<\varepsilon} dF(Cx)} = 0. \qquad (3)$$

Замечание. Если во (2) $\alpha < 0$, то в (3) величину $|x-1|$ нужно заменить на $|x+1|$.

Доказательство теоремы основано на следующей лемме.

ЛЕММА. *Дана последовательность постоянных $B_n \to \infty$. Для существования постоянных A_n, при которых законы распределения сумм (1) сходятся к предельному, необходимо и достаточно существование такого безгранично делимого закона с характеристической функцией $\varphi(t)$ и с каноническим представлением по формуле П. Леви*

$$\log \varphi(t) = i\gamma t - \frac{a^2}{2} t^2 + \int\limits_{-\infty}^{-0} \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\right) dM(u) +$$

$$+ \int\limits_{+0}^{+\infty} \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\right) dN(u), \qquad (4)$$

чтобы при $n \to \infty$

$$k_n \int\limits_{-\infty}^{u} dF(B_n x) \to M(u), \quad u < 0,$$

$$k_n \int\limits_{u}^{+\infty} dF(B_n x) \to -N(u), \quad u > 0,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varlimsup_{n\to\infty} k_n \left\{ \int\limits_{|x|<\varepsilon} x^2 dF(B_n x) - \left[\int\limits_{|x|<\varepsilon} x\, dF(B_n x) \right]^2 \right\} = a^2.$$

Закон (4) и есть при этих условиях предельный для сумм (1).

Эта лемма является частным случаем одной теоремы Б. В. Гнеденко (см. ([1]), теорема 8).

Доказательство теоремы 1. Представив закон Пуассона (2) в виде (4), мы найдем, что при сходимости законов распределения сумм (1), в силу леммы, при любом положительном $\varepsilon < 1$ и $C_n = \alpha B_n$ необходимо выполняются условия

$$k_n \int\limits_{R_\varepsilon} dF(C_n x) \to 0, \quad k_n \int\limits_{|x-1|<\varepsilon} dF(C_n x) \to \lambda \quad (n\to\infty), \qquad (5)$$

где R_ε — область, полученная из вещественной прямой выбрасыванием интервалов $|x| < \varepsilon$ и $|x-1| < \varepsilon$, и

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varliminf_{n\to\infty}\frac{k_n}{C_n^2}\left\{\int\limits_{|x|<\varepsilon C_n} x^2\,dF(x) - \left[\int\limits_{|x|<\varepsilon C_n} x\,dF(x)\right]^2\right\} = 0. \tag{6}$$

Докажем, что (6) эквивалентно условию

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varliminf_{n\to\infty}\frac{k_n}{C_n^2}\int\limits_{|x|<\varepsilon C_n} x^2\,dF(x) = 0. \tag{7}$$

Действительно, если $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2\,dF(x) = +\infty$, то можно обнаружить, что при $C_n \to \infty$

$$\left[\int\limits_{|x|<\varepsilon C_n} x\,dF(x)\right]^2 = o\left[\int\limits_{|x|<\varepsilon C_n} x^2\,dF(x)\right]$$

[см. например стр. 8—9 работы А. Я. Хинчина (5)], откуда и получается наше утверждение. При $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2\,dF(x) < +\infty$ оно получается элементарно из того факта, что $F(x)$ отличен от единичного закона и следовательно имеет положительную дисперсию.

Покажем теперь, что при условиях (5) и (7) при любом $\varepsilon < 1$

$$\varliminf_{n\to\infty} k_n \int\limits_{|x|<\varepsilon} x^2\,dF(C_n x) = 0. \tag{8}$$

При любом $\varepsilon' < \varepsilon$

$$\frac{k_n}{C_n^2}\int\limits_{|x|<\varepsilon C_n} x^2\,dF(x) = k_n\int\limits_{|x|<\varepsilon} x^2\,dF(C_n x) = k_n\int\limits_{|x|<\varepsilon'} x^2\,dF(C_n x) + k_n\int\limits_{\varepsilon'\leqslant|x|<\varepsilon} x^2\,dF(C_n x).$$

Но

$$k_n\int\limits_{\varepsilon'\leqslant|x|<\varepsilon} x^2\,dF(C_n x) \leqslant \varepsilon^2 k_n \int\limits_{\varepsilon'\leqslant|x|<\varepsilon} dF(C_n x).$$

Последняя часть неравенства в силу (5) при $n\to\infty$ бесконечно мала, следовательно левая часть (8) не зависит от ε, что и доказывает наше утверждение.

Из (5) и (8) при любом положительном $\varepsilon < 1$ получаем

$$\varliminf_{C\to\infty}\frac{\int\limits_{R_\varepsilon} dF(Cx) + \int\limits_{|x|<\varepsilon} x^2\,dF(Cx)}{\int\limits_{|x-1|<\varepsilon} dF(Cx)} = 0, \tag{9}$$

так как интегралы (5) и (8) не отрицательны. Это отношение является также и достаточным условием для того, чтобы $F(x)$ принадлежал

области частичного притяжения закона Пуассона. Чтобы доказать это, возьмем последовательность положительность убывающих чисел $\varepsilon_n \to \infty$. Из (9) следует, что для каждого ε_n найдется такая последовательность положительных чисел $C_m^{(n)} \to \infty$ $(m = 1, 2, \ldots)$, что

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\int\limits_{R_{\varepsilon_n}} dF(C_m^{(n)}x) + \int\limits_{|x|<\varepsilon_n} x^2\, dF(C_m^{(n)}x)}{\int\limits_{|x-1|<\varepsilon_n} dF(C_m^{(n)}x)} = 0.$$

Отсюда видно, что если взять достаточно быстро возрастающую последовательность индексов m_n и положить $C_{m_n}^{(n)} = C_n$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int\limits_{R_{\varepsilon_n}} dF(C_n x) + \int\limits_{|x|<\varepsilon_n} x^2\, dF(C_n x)}{\int\limits_{|x-1|<\varepsilon_n} dF(C_n x)} = 0. \qquad (10)$$

Так как в силу существования этого предела $\int\limits_{|x-1|<\varepsilon_n} dF(C_n x) > 0$ и так как только что выписанный интеграл при $n \to \infty$ очевидно стремится к нулю, то можно подобрать такую последовательность натуральных чисел k_n, что

$$k_n \int\limits_{|x-1|<\varepsilon_n} dF(C_n x) \to \lambda > 0. \qquad (11)$$

Отсюда и из (10) следует

$$k_n \int\limits_{R_{\varepsilon_n}} dF(C_n x) \to 0, \qquad (12)$$

$$I_n = k_n \int\limits_{|x|<\varepsilon_n} x^2\, dF(C_n x) \to 0.$$

Из (11) и (12) вытекают соотношения (5). Так как кроме того

$$k_n \int\limits_{|x|<\varepsilon} x^2\, dF(C_n x) = I_n + k_n \int\limits_{\varepsilon_n \leqslant |x| < \varepsilon} x^2\, dF(C_n x),$$

то в силу сделанной при доказательстве (8) оценки последнего интеграла

$$k_n \int\limits_{|x|<\varepsilon} x^2\, dF(C_n x) \to 0.$$

Таким образом условие (8) выполняется, а следовательно выполняется и (7). Но (5) и (7) достаточны для того, чтобы $F(x)$ принадлежал области притяжения закона Пуассона. Достаточность (9) теперь доказана.

Эквивалентность (9) и (3) вытекает из следующих очевидных неравенств:

$$\int_{R_\varepsilon} dF(Cx) + \int_{|x|<\varepsilon} x^2\, dF(Cx) \geqslant \int_{R_\varepsilon} \frac{x^2}{1+x^2}\, dF(Cx) + $$
$$+ \int_{|x|<\varepsilon} \frac{x^2}{1+x^2}\, dF(Cx) = \int_{|x-1|>\varepsilon} \frac{x^2}{1+x^2},$$
$$\int_{|x-1|>\varepsilon} \frac{x^2}{1+x^2}\, dF(Cx) \geqslant \frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2} \int_{R_\varepsilon} dF(Cx) + \frac{1}{1+\varepsilon^2} \int_{|x|<\varepsilon} x^2\, dF(Cx) >$$
$$> \frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2} \left\{ \int_{R_\varepsilon} dF(Cx) + \int_{|x|<\varepsilon} x^2\, dF(Cx) \right\}.$$

Теорема 1 доказана.

Рассмотрим теперь безгранично делимые законы распределения, которые, как известно, имеют каноническое представление в форме Леви — Хинчина

$$\log \varphi(t) = i\gamma t + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2} \right) \frac{1+u^2}{u^2}\, dG(u), \tag{13}$$

где $\varphi(t)$ — характеристическая функция представляемого закона, γ — вещественная постоянная и $G(u)$ — неубывающая ограниченная функция.

Условие, при котором закон распределения (13) принадлежит области частичного притяжения закона Пуассона, можно написать, введя в рассмотрение лишь функцию $G(u)$.

ТЕОРЕМА 2. *Для того чтобы безгранично делимый закон распределения* (13) *принадлежал области частичного притяжения закона Пуассона, необходимо и достаточно, чтобы при любом положительном* $\varepsilon < 1$

$$\lim_{C\to\infty} \frac{\displaystyle\int_{|u-1|>\varepsilon} \frac{u^2}{1+u^2}\, dG(Cu)}{\displaystyle\int_{|u-1|<\varepsilon} dG(Cu} = 0. \tag{14}$$

Замечание. Условие (14) имеет место при $\alpha > 0$ в (2); при $\alpha < 0$ нужно $|u-1|$ заменить через $|u+1|$.

Доказательство. Пользуясь теоремой Б. В. Гнеденко об условиях сходимости последовательности безгранично делимых законов распределения [см. ([1]), теорема (2)], легко показать, что для сходимости законов распределения сумм (1) к закону (2) в нашем случае необходимы и достаточны условия

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k_n}{B_n^2} \int_{-\infty}^{v} \frac{1+u^2B_n^2}{1+u^2}\, dG(B_n u) = 0, \qquad v < \alpha,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k_n}{B_n^2} \int_{-\infty}^{v} \frac{1+u^2B_n^2}{1+u^2}\, dG(B_n u) = \frac{\lambda^2\alpha^2}{1+\alpha^2}; \quad v > \alpha,$$

$$\lim \frac{k_n}{B_n^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+u^2B_n^2}{1+u^2}\, dG(B_n u) = \frac{\lambda\alpha^2}{1+\alpha^2}.$$

Из этих условий методами, примененными при доказательстве теоремы 1, нетрудно получить такой характеристический признак законов (13), принадлежащих области частичного притяжения закона Пуассона:

$$\lim_{C\to\infty}\frac{\int\limits_{|u-1|>\varepsilon}\frac{1+C^2u^2}{1+u^2}\,dG(Cu)}{\int\limits_{|u-1|<\varepsilon}\frac{1+C^2u^2}{1+u^2}\,dG(Cu)}=0. \tag{15}$$

Преобразуем условие (15). Начнем с числителя:

$$\int\limits_{|u-1|>\varepsilon}\frac{1+C^2u^2}{1+u^2}\,dG(Cu)=\int\limits_{|u-1|>\varepsilon}dG(Cu)+(C^2-1)\int\limits_{|u-1|>\varepsilon}\frac{u^2}{1+u^2}\,dG(Cu)=$$
$$=C^2\int\limits_{|u|<\varepsilon}\frac{u^2}{1+u^2}\,dG(Cu)+C^2\int\limits_{R_\varepsilon}\frac{u^2}{1+u^2}\,dG(Cu)+\Bigg\{\int\limits_{|u|<\varepsilon}dG(Cu)+$$
$$+\int\limits_{R_\varepsilon}dG(Cu)-\int\limits_{|u|<\varepsilon}\frac{u^2}{1+u^2}\,dG(Cu)-\int\limits_{R_\varepsilon}\frac{u^2}{1+u^2}\,dG(Cu)\Bigg\}. \tag{16}$$

Так как $C\to\infty$, то очевидно последние два члена в фигурных скобках не влияют на величину левой части (15), и их можно опустить. Покажем, что и первые два члена в фигурных скобках можно опустить. Очевидно, что

$$\int\limits_{R_\varepsilon}\frac{u^2}{1+u^2}\,dG(Cu)\leqslant\int\limits_{R_\varepsilon}dG(Cu)\leqslant\frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^2}\int\limits_{R_\varepsilon}\frac{u^2}{1+u^2}\,dG(Cu),$$

и следовательно, не нарушая характеристического признака, можно опустить второй член в фигурных скобках. Далее, при $C\to\infty$

$$\int\limits_{|u|<\varepsilon}dG(Cu)=\int\limits_{|u|<C\varepsilon}dG(u)\to\{G(+\infty)-G(-\infty)\}<+\infty,$$

$$C^2\int\limits_{|u|<\varepsilon}u^2\,dG(Cu)=\int\limits_{|u|<C\varepsilon}u^2\,dG(u)\to\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u^2\,dG(u)=+\infty,$$

так как $G(u)$ невозрастающая ограниченная функция. Последний интеграл должен быть расходящимся, так как иначе закон будет принадлежать области полного притяжения закона Гаусса [см. ([2]), теорема 17].

Из только что установленных соотношений и очевидных неравенств

$$\frac{1}{1+\varepsilon^2}\int\limits_{|u|<\varepsilon}u^2\,dG(Cu)\leqslant\int\limits_{|u|<\varepsilon}\frac{u^2}{1+u^2}\,dG(Cu)\leqslant\int\limits_{|u|<\varepsilon}u^2\,dG(Cu)$$

заключаем, что первый член в фигурных скобках (16) также можно опустить. Итак, числитель левой части (15) можно заменить суммой двух первых членов последней части (16), т. е. величиной

$$C^2\int\limits_{|u-1|>\varepsilon}\frac{u^2}{1+u^2}\,dG(Cu).$$

Легко показать, что знаменатель левой части (15) можно заменить интегралом

$$C^2 \int\limits_{|u-1|<\varepsilon} dG(Cu)$$

и тем самым закончить доказательство признака (14).

§ 2

Как было указано выше, области частичного притяжения изучены очень мало. П. Леви [см. ([4]), стр. 113] дал без доказательства характеристический признак законов распределения $F(x)$, принадлежащих области частичного притяжения закона Гаусса:

$$\lim_{C\to\infty} \frac{C^2 \int\limits_{|x|>C} dF(x)}{\int\limits_{|x|<C} x^2\, dF(x)} = 0. \tag{17}$$

Применяя те же приемы, что в доказательстве теоремы 1, легко получить этот признак. Рассуждения, аналогичные примененным в доказательстве теоремы 2, дают характеристический признак безгранично делимых законов (13), принадлежащих области частичного притяжения закона Гаусса:

$$\lim_{C\to\infty} \frac{C^2 \int\limits_{|u|>C} dG(u)}{\int\limits_{|u|<C} (1+u^2)\, dG(u)} = 0. \tag{18}$$

Интересно отметить следующий аналитический факт. Как показал Б. В. Гнеденко [см. ([3]), стр. 68], всякий закон распределения, принадлежащий области частичного притяжения закона Пуассона, принадлежит также области частичного притяжения закона Гаусса. Следовательно, если функция распределения $F(x)$ удовлетворяет условию (3), то она удовлетворяет также условию (17), и если ограниченная неубывающая функция $G(u)$ удовлетворяет условию (14), то она также удовлетворяет (18).

Московский станкоинструментальный институт им. Сталина

Поступило 19 XII 1940

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гнеденко Б. В., К теории предельных теорем для сумм независимых случайных величин, Изв. Ак. Наук СССР, серия матем. (1939), 181—232.

[2] Гнеденко Б. В., К теории областей притяжения устойчивых законов, Ученые записки МГУ, математика, вып. XXX, кн. 3 (1939), 61—82.

[3] Гнеденко Б. В., Несколько теорем о степенях функций распределения, Ученые записки МГУ, математика, вып. XLV (1940), 61—71.

[4] Lévy P., Théorie de l'addition des variables aléatoires, Paris 1937.

[5] Khintchine A., Sul dominio di attrazione della legge di Gauss, Giorn. d. Istituto ital. d. attuari, v. 6 (1935), 378—393.

[6] Хинчин А. Я., Предельные законы для сумм независимых случайных величин, ОНТИ, 1938.

A. GROSHEV. SUR LE DOMAINE D'ATTRACTION DE LA LOI DE POISSON

RÉSUMÉ

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ une suite de variables aléatoires indépendantes ayant une même fonction de répartition $F(x)$. Si l'on peut choisir des constantes A_n et B_n $(n=1, 2, \ldots)$ et une suite d'entiers positifs k_n de telle façon que les lois de distribution des sommes (1) convergent vers une loi $\Phi(x)$, nous dirons que $F(x)$ appartient au domaine d'attraction partielle de la loi $\Phi(x)$.

Dans cet article nous avons démontré que (3) est une condition nécessaire et suffisante pour qu'une loi $F(x)$ appartienne au domaine d'attraction partielle de la loi de Poisson (2), et que (14) est un critère nécessaire et suffisant pour qu'une loi de distribution indéfiniment divisible (13) appartienne au domaine d'attraction partielle de la même loi (2).

La condition (18) donne un critère caractéristique pour les lois (13) qui appartiennent au domaine de l'attraction partielle de la loi de Gauss.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 5 (1941). 173—186 Série mathématique

ВСЕСОЮЗНОЕ СОВЕЩАНИЕ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

12—15 ноября 1940 г.

12—15 ноября 1940 г. Отделением физико-математических наук Академии Наук СССР совместно с Математическим институтом им. В. А. Стеклова проведено совещание по вопросам математической статистики.

В совещании принимали участие академики и научные работники Академии Наук СССР, Академии Наук УССР, Академии Наук БССР, Московского государственного университета, Ленинградского государственного университета, Средне-Азиатского государственного университета, Центрального управления народнохозяйственного учета при Госплане СССР, Московской плановой академии, Научно-исследовательского института связи, Института народнохозяйственного учета, Московского государственного педагогического института им. К. Либкнехта, Куйбышевского планового института, Московского текстильного института и других учебных заведений гор. Москвы, а также инженерно-технические работники организаций по проектированию гидротехнических сооружений и представители сельскохозяйственных и других научных учреждений. Всего на совещании присутствовало 70 человек.

Совещание было подготовлено Организационным комитетом, в состав которого входили: С. Н. Бернштейн, А. Н. Колмогоров (председатель), В. С. Немчинов, В. И. Романовский, А. Я. Боярский, Е. Е. Слуцкий и П. А. Козуляев (секретарь).

На семи заседаниях совещания было заслушано и обсуждено 22 научных и информационных доклада. Ниже печатаются названия и краткие резюме этих докладов, а также постановления совещания.

ЗАСЕДАНИЕ ПЕРВОЕ (12 ноября, вечер)

Председатель С. Н. Бернштейн

О. А. Вольберг (*Ленинград*). **Современное состояние математической разработки задач об ожидании в теории вероятностей.** Задача об ожидании при неограниченной совокупности обслуживаемых клиентов может быть названа одномерной, если у каждого прибора устанавливается своя очередь, причем клиенты распределяются по этим очередям в порядке прибытия. Если же клиенты занимают приборы в порядке общей очереди, задачу можно назвать многомерной.

Одномерная задача эквивалентна задаче о блуждании точки по оси абсцисс с неупругой преградой в начале координат или классической задаче о разорении игрока, партнер которого обладает бесконечным капиталом. Предельный случай одномерной задачи об ожидании, когда число приборов безгранично растет, а нагрузка на каждый прибор не изменяется, эквивалентен упомянутой задаче о блуждании (практически при любом законе распределения скачков блуждающей точки) или задаче о разорении игрока (при практически любом законе распределения выигрышей и проигрышей).

Многомерная задача об ожидании эквивалентна некоторой задаче о многомерном блуждании.

Приведено несколько способов решения задач об ожидании.

Е. Н. Бухман (*Москва*) и **В. К. Лезерсон** (*Москва*): **Проблемы «скученности» в телефонии.** Проблемы «скученности» возникают в тех случаях, когда спрос на фиксированное количество «обслуживателей» предъявляют достаточно многочисленные и независимые между собой потребители. С вопросами «скученности» можно встретиться во многих областях народнохозяйственной жизни, например городской транспорт, потребление воды и электроэнергии, кассы в магазинах, автоматы для продажи билетов и т. п. Однако наибольшего развития разработка проблем «скученности» достигла в области телефонии. Причина этого заключается в большом экономическом и техническом значении этих проблем, так как с ними связана проектировка телефонных станций.

В настоящее время одна из основных проблем теории «скученности» в телефонии—расчет вероятности отказов вследствие занятости всех линий полнодоступного пучка—может считаться в основном решенной. В отношении второй основной проблемы—определения среднего времени ожидания ответа станции и закона распределения вероятностей ожидания свыше заданного срока—в настоящее время также имеются законченные решения.

Весьма сложные проблемы возникают при определении вероятности отказов (потерь) при ступенчатом включении, когда часть линий пучка доступна только отдельным группам абонентов, а остальные линии доступны ряду этих групп совместно. Имеющиеся попытки решения этой задачи (Erlang, Pollaczek, Costen, Palm) приводят в общем виде к очень сложным, не приспособленным для практического использования формулам.

Не менее сложны проблемы определения вероятности блокировки части линий, ведущих к определенной группе, вследствие занятости всех выходов из этой группы. В настоящее время имеются только достаточно грубые приближенные решения данной задачи.

Весьма своеобразной проблемой является определение вероятности потерь при включении в одну линию нескольких аппаратов. Приближенное решение этой задачи с достаточной для практических целей точностью дал А. Я. Хинчин для случая двух аппаратов на одной линии.

Несмотря на наличие большого числа высококачественных разработок проблем «скученности» в телефонии, далеко не все они находят практическое применение или далеко не всегда правильно используются практиками. Совершенно недостаточен объем экспериментальных проверок основных предложений и выводов. Наряду с ценными теоретическими разработками в практике нередко имеют хождение квазинаучные теории.

Ярким образцом неправильного использования теории Erlang'а о вероятности потерь вызовов является общераспространенная подмена в его формуле поступившего графика исполненным. Разграничение понятий поступившего и исполненного графиков, связанных весьма простой зависимостью, позволяет распространить выводы Erlang'а на область потерь любой величины и опровергнуть мнение, что они теряют силу при больших потерях (см. Прикл. матем. и мех., III, № 4, 1939).

Пример недостаточности экспериментальной базы в отношении проверки предпосылок математической теории показывает опыт использования на практике формулы А. Я. Хинчина для времени ожидания в ручной телефонии.

Ближайшие задачи в области разработки проблем «скученности»: а) организация в достаточно широких масштабах экспериментальных проверок как исходных предпосылок, так и основных результатов теоретических разработок в отношении важнейших для практики задач — проверок, почти отсутствовавших до сего времени; б) систематизация и критический просмотр накопившихся в этой области материалов с тем, чтобы дать в результате сводную разработку, облегчающую практикам использование всех ценных результатов этой теории.

Из конкретных задач в области телефонии, подлежащих первоочередной разработке, могут быть указаны: а) исследование зависимости, существующей между клиентскими обращениями, усиливающей колеблемость графика, и отражение в расчет-

ных формулах этой зависимости: б) для системы «с ожиданием»—разработка расчетных графиков и таблиц, позволяющих при любом законе распределения времени обслуживания легко рассчитать объем пучка линий по графику и по заданной вероятности ожидания свыше заданного срока (в связи с этим стоит разработка норм проектирования по указанному показателю качества обслуживания); в) для той же системы—разработка метода расчета при ограниченном числе абонентов для малых пучков путей связи: г) для системы «с явными потерями»—исследование изменения вероятности вызова в зависимости от потерь и отражение влияния этого изменения в расчете; д) для ручной телефонии—отражение в расчете влияния взаимопомощи телефонисток и их способности ускорять работу при усилении нагрузки; е) для ступенчатого пучка—разработка методов расчета по времени ожидания и разработка методов обоснования теоретическим расчетом выбора наивыгоднейшей системы включения.

Б. В. Гнеденко (*Москва*). **К теории счетчиков Гейгер—Мюллера.** В ряде областей современной физики применяются счетчики Гейгер—Мюллера. Для определения интенсивности источника по показаниям счетчика приходится вводить поправки на разрешающую способность счетчика. Разряд, вызванный попавшей в счетчик частицей, длится некоторое время τ, в течение которого счетчик остается нечувствительным к излучению, и следовательно частицы, попавшие в счетчик, в течение этого промежутка времени остаются несосчитанными.

В докладе изложена теория поправок, исходящая из следующих предположений: 1) вероятность того, что в счетчик за время от t_0 до t_0+t попадет k частиц, не зависит от того, сколько частиц уже попало в счетчик до момента t_0; 2) вероятность того, что за промежуток времени от t_0 до t_0+t в счетчик попала одна частица, равна $a(t_0)t+o(t)$, а две или более частиц — равна $o(t)$; 3) длительность разряда, вызываемого попавшей в счетчик частицей, есть постоянная величина τ.

ЗАСЕДАНИЕ ВТОРОЕ (13 ноября, утро)

Председатель В. И. Романовский

А. Н. Колмогоров (*Москва*). **Спектральная теория стационарных временных рядов.** Содержание доклада изложено в статьях, печатающихся в Бюллетене Московского государственного университета, т. II, в. 6, и «Известиях Академии Наук СССР» серия матем., т. 5, № 1.

Н. А. Козуляев (*Москва*). **Интерполирование и экстраполирование стационарных рядов, полученных скользящим суммированием.** Содержание доклада изложено в статье, печатающейся в Докладах Академии Наук СССР, т. XXX.

А. Я. Боярский (*Москва*). **О геометрической корреляции.** При отборе проб на некоторой площади (например метровок в измерении урожайности) вопрос о размере проб, их количестве и распределении связан с величиной корреляции между ними и внутри их. В конечном счете вопрос сводится к коэффициенту корреляции между значениями данной переменной в двух точках, из которых одна выбрана случайно, а другая—на определенном расстоянии от нее. Все такие коэффициенты и могущие быть полученными на их базе совокупные коэффициенты, коэффициенты между средними и т. д. и понимаются под «геометрической корреляцией». Как известно, если считать, что вся связь между двумя точками линии, отделенными расстоянием Δ, поглощается в любой промежуточной точке так, что равен нулю частный коэффициент между любыми точками при исключенном значении переменной в любой промежуточной точке, то коэффициент корреляции $r(\Delta)=\lambda^{\Delta}$. В этом случае коэффициент корреляции между средними на двух отрезках с увеличением расстояния между ними также убывает в геометрической прогрессии. На плоскости аналогичное условие означает равенство нулю частного коэффициента корреляции между двумя точками при исключенных значениях на разделяющем их замкнутом контуре.

В докладе доказывается, что если коэффициент корреляции зависит только от расстояния между точками Δ и не зависит от направления, являясь непрерывной функцией Δ, равной 1 при $\Delta = 0$, и далее, убывая, остающейся положительной, то выполнение указанного условия невозможно. Однако практически удовлетворительные результаты может в некоторых случаях дать простое распространение на плоскость формулы убывания коэффициента корреляции, полученной для линии, что подтверждается коэффициентами корреляции, полученными на материале урожайности каждого метра, измеренной на 0,25 га в 1935 г.

ЗАСЕДАНИЕ ТРЕТЬЕ (13 ноября, вечер)

Председатель М. В. Птуха

Н. В. Смирнов (*Москва*). **Об оценке максимального члена в ряду наблюдений.** Предполагая распределение изучаемой случайной величины X нормальным, докладчик рассматривает максимальный по величине член «вариационного ряда» $x_1 < x_2 < \ldots$ $\ldots < x_n$, полученного по n независимым наблюдениям. Уклонение $\xi_n = \frac{x_n - \bar{x}}{s_n}$ этого члена от среднего арифметического $\bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{n}$, нормированное эмпирическим стандартным уклонением $s = \sqrt{\frac{\Sigma (x_i - \bar{x})^2}{n}}$, подчиняется закону распределения $\Phi_n(x)$, не зависящему от параметров $a = E(\xi)$ и $\sigma^2 = E(\xi - a)^2$ генеральной совокупности. Применяя методы многомерной геометрии, автор получает следующее соотношение, рекуррентно определяющее законы $\Phi_n(x)$ $(n > 2)$:

$$\Phi_n(x) = 0 \quad \text{для} \quad x < \frac{1}{\sqrt{n-1}}; \quad \Phi_n(x) = 1 \quad \text{при} \quad x \geqslant \sqrt{n-1};$$

$$\frac{d\Phi_n(x)}{dx} = \frac{n\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\sqrt{\pi(n-1)}\,\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)} \Phi_{n-1}\left(\frac{x\sqrt{\frac{n}{n-1}}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{n-1}}}\right)\left(1 - \frac{x^2}{n-1}\right)^{\frac{n-4}{2}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{n-1}} < x < \sqrt{n-1}.$$

Вычисленные таблицы для $\Phi_n(x)$ обнаруживают несостоятельность известного правила Chauvenet для браковки аномальных уклонений. Критерий, предлагаемый автором, является уточнением приема, предложенного для оценки максимального члена W. Thompson'ом (Ann. of Mathem. Statistics, VI, No. 4 (1935)). Содержание доклада будет опубликовано в Докладах Академии Наук СССР.

С. И. Крицкий (*Москва*) **и М. Ф. Менкель** (*Москва*). **Применение теории вероятностей к расчету режима водохранилищ.** Математическая статистика получила за последние годы широкое распространение в области технических наук, связанной с изучением режима речных систем и с проектированием мероприятий, имеющих целью использование речного стока.

Проявления закономерности в ходе речного стока прослеживаются в форме: 1) последовательности смены гидрологических фаз годового цикла, 2) законов распределения вероятностей фазово-однородных значений стока, 3) стохастической зависимости между величинами стока за смежные промежутки времени (закономерность сохранения аномалий). В первом приближении перечисленные закономерности могут приниматься не изменяющимися с течением времени.

Если стать на путь математического выражения указанных явлений, то закономерности колебаний стока оказывается возможным облечь в форму: а) кривых распределения вероятностей фазово-однородных значений стока, устанавливающих зависимость

между величиной и вероятностью стока, и б) корреляционных связей между стоком за смежные промежутки времени.

Идея обобщенного водохозяйственного расчета возникла свыше 20 лет назад в США. Первоначально формы математического расчета были методически весьма несовершенны, а возможности применения ограничены некоторыми простейшими водохозяйственными схемами. Работами советских инженеров первоначальная идея математического расчета водохозяйственных систем была облечена в более совершенные методические формы и получила широкое распространение в практике союзного гидротехнического проектирования.

Основная задача, разрешаемая при посредстве указанных приемов,—статистический расчет регулирования стока, учитывающий вероятности анализируемых событий,—может основываться на следующих принципах.

Наполнение водохранилища в какой-либо момент времени определяется (при заданном водопотреблении): а) наполнением водохранилища в некоторый предшествующий момент времени и б) стоком за отрезок времени, разделяющий оба момента. Соответственно, знание вероятностей наполнения водохранилища, относящихся к некоторому моменту, и знание вероятностей стока за некоторый интервал времени дают возможность вычисления вероятностей наполнений, относящихся к концу указанного интервала. Это обстоятельство позволяет полностью разрешить задачу исследования вероятностей наполнений водохранилища на любой момент времени, если известно некоторое начальное распределение этих вероятностей.

Математический аппарат, при посредстве которого разрешается поставленная задача, заключается в приближенном построении кривых обеспеченности (вероятности превышения) сумм по заданным кривым обеспеченности слагаемых, при произвольном виде названных кривых.

Первый прием расчета, опирающийся на указанные положения, был предложен авторами доклада в 1935 г. (Гидротехн. строит., № 11, 1935). Этот прием, используя факт существования пределов емкости водохранилища, выделяет две группы величин стока: 1) значения стока, при которых превышение заданного наполнения водохранилища б е з у с л о в н о н е в о з м о ж н о, даже если в начальный момент водохранилище было полно, и 2) значения стока, при которых превышение заданного наполнения водохранилища б е з у с л о в н о д о с т о в е р н о, даже если в начальный момент водохранилище было пусто. Значения стока, расположенные между границами указанных интервалов, находятся с точки зрения исследуемого наполнения в неопределенном положении. Выяснение последнего может быть достигнуто путем анализа лет рассматриваемой промежуточной группы совместно с предшествующими годами, опять-таки с выделением двух отмеченных выше безусловных групп. С прибавлением каждого последующего года численность невыясненной группы сокращается. В результате все годы оказываются рассортированными по двум безусловным группам, вероятности которых, дополняющие друг друга до единицы, и являются предметом исследования.

Опубликованная в 1940 г. работа А. Д. Саваренского (Гидротехн. строит., № 2, 1940) дает второе решение задачи регулирования стока. А. Д. Саваренский задает в явном виде начальное распределение вероятностей наполнения, относя его к предшествующему моменту времени, весьма отдаленному от расчетного. При этом начальное распределение вероятностей может быть принято произвольным, поскольку влияние начального наполнения заметно сказывается на режиме водохранилища лишь в течение нескольких первых лет. Имея в виду быстрое затухание этого влияния, удается на практике ограничиться расчетом по сравнительно небольшому числу последовательно анализируемых лет.

Почти одновременно с работой А. Д. Саваренского появилась в печати работа С. И. Рыбкина (Бюллетень Секции водохоз. проблем Ак. Наук СССР, № 3—4, 1940), дающая другое решение той же проблемы построения кривой обеспеченности наполнений водохранилища. С. И. Рыбкиным была обобщена на любые наполнения рассмотрен-

ная выше идея выделения интервалов стока, соответствующих безусловной достоверности 1) превышения и 2) недостижения заданного наполнения.

С появлением перечисленных работ проблему математического расчета регулирования стока на постоянную отдачу можно было бы считать в основном разрешенной. Дальнейшее направление исследования связано с распространением метода на следующие задачи: а) строгий учет сезонных колебаний стока; б) учет влияния, оказываемого на условия регулирования стока стохастическими связями, проявляющимися между смежными во времени величинами стока; в) распространение метода на любой вид водоиспользования (гибкий график водопотребления, водно-энергетическое использование водотока и т. п.).

Попытке подобного рода решений посвящены недавно опубликованные работы авторов доклада (Гидротехн. строит., № 2, 1940; Бюллетень Секции водохоз. проблем Ак. Наук СССР, № 3—4, 1940).

В результате работ советских авторов система математического расчета регулирования стока достигла к настоящему времени такого развития, которое обеспечивает практическую применимость метода к решению большинства водохозяйственных задач, выдвигаемых практикой.

Б. С. Ястремский (*Москва*). **Применение теории дисперсии и теории корреляции к анализу детской смертности.** Статистика детской смертности обнаруживает ее изменяемость и во времени (например от года к году) и в пространстве (например, от города к городу). Докладчик рассматривает случай, когда данные достаточно детально представлены в пространстве, но очень ограниченно во времени (2—3 года). Тогда суждение о характере изменяемости может быть составлено на основе следующей схемы анализа дисперсии:

1. Сначала принимается рабочая гипотеза о существовании единого в пространстве и времени уровня смертности, отклонения от которого носят исключительно стохастический характер.

2. Отклонения смертности от единого общего уровня приводятся в сопоставимый вид путем их нормирования по известной из теории вероятностей формуле $t_i = (w_i - \overline{w}) : \sqrt{\dfrac{\overline{w}(1-\overline{w})}{s_i}}$, где $\overline{w}$—общий уровень смертности, w_i—показатель смертности i-го города, s_i—число родившихся i-го города.

3. О степени правильности принятой рабочей гипотезы судят: а) по величине коэффициента корреляции (r) между значениями t' каждого данного года и значениями t'' другого смежного с ним года, и b) по величине среднего квадрата (σ^2) разностей $t' - t''$.

4. Указанная в п. b величина σ^2, определенная по фактическим данным, покажет, насколько фактическая случайная вариация отличается от принятой в основу указанной выше рабочей гипотезы. Далее, коэффициент корреляции r покажет, насколько существенны отклонения уровней смертности отдельных городов от общего уровня. Если средний квадрат этих последних отклонений характеризуется величиной δ^2, то конкретный числовой его размер определится, как показывает расчет, из соотношения $r = \dfrac{\delta^2}{\delta^2 + \frac{1}{2}\sigma^2}$.

Предлагаемый метод анализа проиллюстрирован докладчиком на ряде примеров.

ЗАСЕДАНИЕ ЧЕТВЕРТОЕ (14 ноября, утро)

Председатель Н. В. Смирнов

А. А. Конюс (*Москва*). **Средние величины и статистические распределения в их взаимоотношении.** В теории ошибок измерения доказывается, исходя из предпосылки независимости измерений и равновозможности положительных и отрицательных оши-

бок, что наиболее вероятной величиной измеряемого объекта является медиана. Приняв медиану в качестве основной числовой характеристики однородной совокупности независимых между собою вариант и потребовав, чтобы она совпадала со средней типа

$$M = f^{-1}\left[\frac{f(x_1) + \ldots + f(x_n)}{n}\right], \tag{1}$$

нетрудно установить на основе результатов, полученных В. Л. Гончаровым («Теория вероятностей», 1937, стр. 374), что единственной формой функции распределения такой совокупности является

$$P_x = \Phi\left[\frac{f(x) - f(\overline{M})}{c_f}\right],$$

где Φ—интеграл нормального распределения, взятый от $-\infty$ до x.

Пусть n_x и n_y—будут порядковые номера коррелятивно связанных между собою вариант x и y, расположенных в порядке их возрастания. Тогда $P_x = \frac{n_x - \varepsilon_x}{n}$ и $P_y = \frac{n_y - \varepsilon_y}{n}$, где ε—правильные положительные дроби, точным определением которых можно пренебречь при большом n. Если данная поверхность распределения обращается в нормальную путем замены переменных x и y какими бы то ни было функциями $f_x(x)$ и $f_y(y)$, то коэффициент корреляции r_f, как параметр уравнения этой поверхности при достаточно большом n, определится по формуле

$$r_f = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \Phi^{-1}\left(\frac{n_x - \varepsilon_x}{n}\right)\Phi^{-1}\left(\frac{n_y - \varepsilon_y}{n}\right)}{n}.$$

Соответственно, регрессия y по x будет характеризоваться уравнением

$$n_y = \Phi\left[r_f \Phi^{-1}\left(\frac{n_x - \varepsilon_x}{n}\right)\right] + \varepsilon_y.$$

Если потребовать, чтобы функция (1) не меняла своей формы при изменении единицы счета, то она окажется так называемой «степенной средней»:

$$M = \left(\frac{x_1^k + \ldots + x_n^k}{n}\right)^{\frac{1}{k}} \tag{2}$$

Для степенных средних (при $0 < k < 1 + \alpha$, где α—некоторая правильная положительная дробь) справедлива теорема Чебышева о средних величинах, а также, в условиях теоремы Ляпунова о предельном законе распределения, справедливо соотношение

$$P\left[\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right)^{\frac{1}{k}} < x\right] \approx \Phi\left(\frac{x^k - \overline{M}^k}{c^k}\right). \tag{3}$$

Необходимые условия, налагаемые на случайные величины $x_1, \ldots, x_n$ для того, чтобы выполнялись указанные теоремы, должны быть тем менее стеснительными, чем ближе к нулю оказывается k. Как показал опыт, применение формулы (3) при обработке кривых и поверхностей распределения, взятых из различных областей возникновения массовых явлений, дает удовлетворительные результаты.

Если представить степенную среднюю (2) в виде суммы $\sum \frac{x_i}{n}\left(\frac{x_1}{M}\right)^{k-1}$, то обнаружится, в отличие от средней арифметической, что величины $\frac{x_i}{n}$ входят в эту сумму с «переменными весами» $\left(\frac{x_1}{M}\right)^{k-1}$, пропорциональными частным производ-

ным функции средней по соответствующим аргументам. Случайная величина, складывающаяся в результате объединения большого числа таких незначительных величин $\frac{x_i}{n}$, каждая из которых обладает переменным весом, распределяется асимметрично.

К. В. Бродовицкий (*Ташкент*). **Обобщение якобиана и условные вероятности.** Надо изучать математические работы К. Маркса. Надо на страницах специальных математических журналов трактовку узловых проблем проводить на базе марксистской философии. Как шаг в этом направлении докладчик выдвигает критерий объективности решения.

Далее, рассматривается задача: дано поле вероятности плотности P, зависящей от координат x_i $(i = \overline{1, n})$, и разрез S поля с внутренними координатами u_r $(r = \overline{1, m})$ в параметрической форме $x_i = x_i(u_1, \ldots, u_m)$; требуется однозначно вывести отсюда поле вероятности на S с искомой плотностью $F(u_1, \ldots, u_m)$, рассматривая только непрерывные и дифференцируемые функции и группы преобразований, для которых якобиан существует (группа M_1 для x_i и M_2 для u_r, выбор элементов которых субъективен).

Практикуется определять F по принципу равенства весов: $F/P=\text{const}$ на S. Реализуя этот принцип с точки зрения наблюдателя, могущего находиться в любой системе отсчета из M_1, мы получаем для F или же для обобщенного якобиана, определяемого отношением F/P, в некоторой фиксированной системе группы разные решения, множество которых тоже обозначим через M_1. Некоторые решения будут эквивалентны (одинаковы), но не все, а потому критерий объективности не удовлетворен.

Полагая, что в M_1 есть по крайней мере одна система, для которой принцип равенства весов приводит к правильному решению, ставим задачу определить ее объективно. Вводим постулат однородности: веса равны, если область применения их однородна. Он реализуется в два этапа. На первом выделяется объективно из M_1 подгруппа M решений таких, что в соответственных им системах отсчета плотность P кажется постоянной в пределах заданного поля. Если объективно фиксировать любой элемент M, то соответствующий ему по равенству весов обобщенный якобиан ведет себя относительно преобразований координат x_i или u_r аналогично обыкновенному якобиану и вырождается в последний при $m=n$.

Задача однозначного определения обобщенного якобиана сводится к объективно однозначному выделению из M привиллегированной подгруппы M_0, содержащей только эквивалентные решения. На втором этапе удается сузить M до подгруппы M_+ приложением принципа равенства весов только к таким системам отсчета, в которых не только $P=\text{const}$, но и разрез S—плоский. Если задача имеет объективное решение и верен постулат однородности, то правильное решение содержится в M_+. Однако $M_+ \supset M_0$ и содержит также континуум неправильных решений. Проблема дальнейшего сужения M_+ остается открытой.

Докладчик надеется, что удастся выделить из M_+ привиллегированную подгруппу M_0: тогда задача получит свое окончательное решение. Если же привиллегированной M_0 в M_+ нет, то условия задачи недостаточны для объективно однозначного определения F, последнюю же на практике часто ищут. В этом случае докладчик усматривает значение проделанной работы в том, что будет доказана несостоятельность постулата однородности и незаконность пользования принципом равенства весов в подобных случаях. Тогда теория вероятностей входит в этой части в кризис, выход из которого лежит на пути пересмотра ее основ в свете марксистской философии.

В заключение показано, что однозначное определение обобщенного якобиана дало бы возможность распространить на остальные случаи объективный метод оценки по выборочным данным неизвестных значений параметров, найденный докладчиком пока лишь для одного класса непрерывных генеральных совокупностей.

ЗАСЕДАНИЕ ПЯТОЕ (14 ноября, вечер)

Председатель Е. Е. Слуцкий

В. И. Романовский (*Ташкент*). **Об индуктивных выводах в статистике.** Доклад обзорного характера и посвящен проблеме оценки неизвестных параметров генеральной совокупности по результатам повторной выборки из нее и некоторым исследованиям докладчика по этой проблеме.

В первой части доклада были изложены основные результаты Р. Фишера и Дуба по теории оценок, Р. Фишера, Бартлета и Вилкса—по теории фидуциальных распределений и Неймана—по теории доверительных интервалов,.

Во второй части были приведены некоторые результаты докладчика, относящиеся к обращению закона больших чисел, к определению неизвестных статистических характеристик генеральной совокупности и к теореме о вероятностях и результатах будущих испытаний, определяемых по результатам уже произведенных опытов и свободных от априорных вероятностей.

Последняя часть доклада будет опубликована в Известиях Академии Наук, а весь доклад предполагается развить в монографию об индуктивных методах математической статистики.

А. Н. Колмогоров (*Москва*). **Статистическая оценка гипотез и теория вероятностей.** В докладе рассматривается задача построения статистических правил, имеющих своей целью выделение из некоторого множества гипотез H тех гипотез, которые следует считать совместимыми с результатами наблюдения x. Статистическое правило должно быть: 1) достаточно надежным, т. е. при систематическом употреблении лишь в очень редких случаях давать ошибочный результат; 2) возможно более эффективным, т. е. после учета результата наблюдений суживать возможно сильнее множество допустимых гипотез.

Мерой надежности статистического правила является его коэффициент доверия (термин I. Neyman'a), определяемый как нижняя грань вероятности того, что предписываемый правилом вывод будет верен.

Способы оценки эффективности статистических правил более разнообразны и только начинают разрабатываться [см. например статью A. Wald'a в Annals of Math. Statistics, 10 (1939), 299—326]. Докладчик считает, что оценка эффективности статистического правила неотделима (за исключением редких случаев «равномерно наиболее эффективных правил») от точного представления о цели данного статистического исследования. Общие положения иллюстрируются в докладе рядом примеров.

ЗАСЕДАНИЕ ШЕСТОЕ (15 ноября, утро)

Председатель А. К. Митропольский

В. Н. Перегудов (*Москва*). **Проблемы дисперсионного анализа.** Дисперсионный анализ основывается на теореме сложения χ^2, согласно которой величина $\chi^2 = \chi_1^2 + \chi_2^2$, если χ_1^2 и χ_2^2 определяются независимыми между собою случайными выборками и имеют n_1 и n_2 степеней свободы, распределена по закону распределения χ^2 с $n = n_1 + n_2$ степенями свободы. Основываясь на этом свойстве распределения χ^2, можно произвести разложение:

$$\chi^2 = \frac{\sum (x - x_0)^2}{c_0^2} = \frac{A_1}{c_0^2} + \frac{A_2}{c_0^2} + \ldots + \frac{A_k}{c_0^2} \qquad (k \leqslant n),$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_k$—некоторые квадратичные формы x $(x_0 = E(x),\ c_0^2 = E(x - x_n)^2)$. Число степеней свободы n параллельно этому разлагается на части $n = n_1 + n_2 + \ldots$ $\ldots + n_k$, где n_i—ранг квадратичной формы. Условием, необходимым и достаточным для того, чтобы величины $\chi_i^2 = A_i/c_0^2$ имели независимые распределения, подчи-

ненные закону распределения χ^2 с n_i степенями свободы, и чтобы было осуществимо приведенное выше разложение, является возможность представить квадратичные формы A_i в виде суммы квадратов $\sum_j l_{i,j}^2 \, (j=\overline{1, n_i})$, где l — некоторые линейные функции x, так, чтобы величины $l_{i,j}$ были линейно независимы друг от друга.

Практическое применение дисперсионного анализа начинается с введения «нулевой гипотезы», согласно которой все величины x принадлежат к одной нормальной совокупности и являются элементами случайной выборки из нее. Эта гипотеза позволяет произвести приведенное выше разложение χ^2. Основываясь на распределении $F = n_i\chi_i^2/n_i\chi_k^2$ (с n_i и n_k степенями свободы), можно на определенном уровне доверия принять или отвергнуть испытываемую нулевую гипотезу. Строго говоря, достаточно опровергнуть эту гипотезу сравнением хотя бы одной пары величин χ_i^2, чтобы все остальные сравнения теряли свой смысл и законность. Однако на практике одной из величин $\sigma_i^2 = \chi_i^2/n_i$ обычно приписывается способность независимо от других репрезентировать дисперсию генеральной совокупности σ_0^2. В этом случае все сравнения производятся именно с этой дисперсией σ_i^2.

Из большого числа разложений $\sum (x - x_0)^2 = A_1 + A_2 + \ldots + A_k$ выбирается то, которое в данном случае соответствует задачам исследования. Например в случае анализа результатов многофакторного опыта, положим, при схеме сельскохозяйственного опыта *O*, N, P, NP (N—азот, P—фосфор, *O* — отсутствие того и другого, NP—совместное внесение N и P) разложение сводится к выделению следующих трех линейных функций:

средний эффект азота	$l_1 = (\mathrm{NP} + \mathrm{N}) - (\mathrm{P} + O)$
» » фосфора	$l_2 = (\mathrm{NP} + \mathrm{P}) - (\mathrm{N} + O)$,
эффект взаимодействия N и P	$l_3 = (\mathrm{NP} + O) - (\mathrm{N} + \mathrm{P})$.

В случае оценки последовательного развертывания уравнения регрессии: $X = a_1 z_1$, $X = a_2 z_1 + b_2 z_2$, $X = a_3 z_1 + b_3 z_2 + c_3 z_3$ и т. д., соответствующие линейные функции l_i будут $l_1 = a_1^2/c_{11}$, $l_2 = b_2^2/c_{22}$ и т. д.

Иногда нулевая гипотеза относится не ко всей совокупности квадратичных форм A, а только к некоторым из них, остальные же просто исключаются. Так поступают, например, при обработке результатов полевого опыта, где сравнения производятся внутри части поля (повторения), а различие между повторениями исключают. Развитие этого положения и дальнейшее сокращение территории, внутри которой производятся сравнения, привело к методу, известному под названием «смешивания» (confounding). Этот метод позволяет без дополнительных затрат значительно уточнить опыт. Так, в случае многофакторной схемы $2 \times 2 \times 2$ при независимости факторов друг от друга методом смешивания можно увеличить эффективность опыта в 3 раза, т. е. втрое увеличить точность результатов опыта без дополнительных затрат.

Н. Ф. Деревицкий (*Рамонь, Воронежск. обл.*). **Очередные вопросы статистической обработки данных полевого опыта.** Статистическая обработка данных полевого опыта сводится обычно к определению квадратической ошибки и достоверности разностей между средними. Эта обработка имеет большое значение при методических исследованиях, но роль ее при трактовке результатов рядовых опытов невелика, так как у исследователя имеются обычно свои «биологические критерии достоверности».

Большее значение имеет применение статистических методов, позволяющих внести поправки в величины средних и сделать их более точными. Из этих методов в первую очередь должен быть назван анализ коварпации Фишера, широкому применению которого в полевом опыте мешает только слабое знакомство с ним агрономов-опытников.

Как поправки в средних, способствующие уточнению результатов опыта, следует рассматривать и «браковку подозрительных дат», отклонение которых превышает ε более чем в определенное число раз w. Если мы имеем опыт с m вариантами повторений, разбросанных в n, то ошибка опыта определяется по $v=(m-1)(n-1)$ степеням свободы, и величина w может быть приближенно определена по равенству

$$w=\sqrt{\frac{t^2v^3}{t^2Nv+N^2(v-1)}},$$

где $N=mn$ и t берется из таблицы Фишера для числа степеней свободы $v-1$ и определенной доверительной вероятности (например 0,01).

При разбросанном расположении повторений опыта степень неоднородности почвы площадок, занимаемых повторениями, может быть весьма неодинакова. В связи с этим система отклонений z, по сумме квадратов которых определяется квадратичная ошибка опыта, может быть неоднородна. Неоднородность может быть определена по критерию χ^2. Наиболее точные показатели урожайности для различных вариантов при этом получаются как взвешенные средние. При этом веса повторений берутся обратно пропорциональными Σz^2, а сумма весов равна n. Этим путем в отдельных случаях можно сильно исправить опытные данные.

Совершенно не разработанным до сего времени является вопрос о вычислении наиболее точных показателей урожайности, а равно ошибки опыта при сплошном расположении опыта и систематическом расположении данных вариантов внутри повторений.

Е. Е. Слуцкий (*Москва*). **О таблицах «закона χ^2» (неполная Г-функция).** «Закон χ^2» имеет, как известно, выражение

$$P(\chi^2,n)=\frac{1}{2^{\frac{n-2}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int\limits_{\chi}^{\infty}\chi^{n-1}e^{-\frac{1}{2}\chi^2}d\chi$$

и представляет собой функцию, имеющую многочисленные важные приложения. В частности, к нему же приводится и «закон Пуассона». Первоначально опубликованные К. Пирсоном таблицы (1914) неполны и несовершенны, таблицы Р. Фишера обратной функции (1938) неоценимы для практики, но задачи не решают; единственными же полноценными таблицами в настоящее время являются только семизначные таблицы К. Пирсона неполной Г-функции (1934), из которых $P(\chi^2, n)$ легко получается некоторым простым преобразованием аргументов. Однако и эти таблицы обладают существенным недостатком. Во-первых, они не идут по n дальше $n=102$, а для многих приложений, даже практических, этого мало; во-вторых, интерполяция в них, особенно по обоим аргументам сразу, весьма неудобна, так как требуется итти до четырех центральных разностей.

Мы вычисляем в настоящее время пятизначные таблицы, устраняющие эти недостатки *. В основу положено преобразование к аргументам:

$$t=\sqrt{2\chi^2}-\sqrt{2n},\qquad x=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}n}}.$$

До $n=32$ ($x=0,25$) мы располагаем таблицы по t и по n, а дальше по t и по x. При $x=0$ ($n=\infty$) «закон χ^2» переходит в «нормальный закон». От него мы идем через интервалы в 0,02, потом несколько шагов через 0,01, и при очень умеренном объеме таблиц обеспе-

* Совещанию были представлены пятизначные таблицы названной функции для $n>102$ ($t=-4,0; -3,9;\ldots;+4,0$).

чиваем линейную интерполяцию по x. До $n=102$ мы могли воспользоваться интерполяцией в таблицах неполной Г-функции, но для больших n, т. е. начиная с $x=0,14$, пришлось найти иные средства.

Следующее разложение оказалось пригодным, давая ошибку, уже при $x=0,14$ не превышающую, как мы думаем, $2 \cdot 10^{-7}$:

$$\tau = \frac{g + \frac{1}{108} g^3 - \frac{1}{405} g^4 + \frac{5}{7776} g^5 - \left(\frac{4}{405} g^2 - \frac{17}{3888} g^3\right) x^2}{x + \frac{1}{36} x^3 - \frac{5}{864} x^5}.$$

Здесь τ—аргумент интеграла Лапласа, из таблиц которого мы и находим искомую вероятность, а

$$g = 3\left(1 + \frac{1}{2} tx\right)^{\frac{2}{3}} - 3 + \frac{1}{3} x^2 + \frac{7}{405} x^4.$$

Вывод этой приближенной формулы, в которой в настоящее время (январь 1941) мы имеем уже члены еще одного порядка, равно как более подробные сведения относительно таблиц будут опубликованы.

Н. В. Смирнов (*Москва*). **Об определении неизвестного закона распределения по эмпирическим данным.** В докладе дан сжатый обзор исследований, связанных с проблемой приближения непрерывного закона распределения $F(x)$ изучаемой случайной величины ξ по данным наблюдениям, и приведен ряд результатов, найденных автором в последнее время. Если через $s_n(x)$ обозначить эмпирическую кривую распределения и положить $D_n^+ = \sup\limits_{-\infty<x<\infty} \{ s_n(x) - F(x) \}$, то каков бы ни был закон распределения $F(x)$ величины ξ при $\lambda = o(n^{\frac{1}{6}})$,

$$\Phi_n(\lambda) = P\left(D_n^+ \leqslant \frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right) = 1 - e^{-2\lambda^2}\left(1 - \frac{2}{3}\frac{\lambda}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{\lambda^2}{n}\right)\right).$$

Это соотношение позволяет уже при сравнительно небольших n $(n > 50)$ достаточно точно оценивать степень приближения $s_n(x)$ к функции распределения $F(x)$.

Детальное изложение затронутых в докладе вопросов будет дано в статье автора в Успехах математических наук (вып. X).

ЗАСЕДАНИЕ СЕДЬМОЕ (15 ноября, вечер)

Председатель А. Н. Колмогоров

Е. Е. Слуцкий (*Москва*) и **В. И. Романовский** (*Ташкент*). **О работе по составлению и изданию таблиц для статистиков.**

В. И. Романовский (*Ташкент*) и **Б. С. Ястремский** (*Москва*). **О преподавании математической статистики в высших учебных заведениях.**

Н. Ф. Деревицкий (*Рамонь*). **О состоянии учебной литературы по математической статистике.**

В. С. Немчинов (*Москва*). **О работе сектора статистики Института экономики Академии Наук СССР.**

В. С. Немчинов (*Москва*). **О статистическом журнале.**

ПОСТАНОВЛЕНИЯ СОВЕЩАНИЯ

1. О созыве дальнейших совещаний по математической статистике

Считать желательным периодический созыв при Академии Наук СССР всесоюзных совещаний по теории вероятностей и математической статистике для взаимной информации, обмена опытом и рационального направления усилий советских ученых на дальнейшую разработку теоретических основ математической статистики и разрешение задач, выдвигаемых перед нею практикой социалистического строительства.

2. О работе по проблемам «скученности» в Научно-исследовательском институте связи

а) Считать необходимым привлечение Математического института Академии Наук СССР к разработке вопросов, выдвигаемых Научно-исследовательским институтом связи.

б) Считать желательным проведение силами работников связи достаточно многочисленных экспериментов для проверки исходных предпосылок и конечных выводов математических теорий, относящихся к проблемам «скученности».

3. О работе по составлению таблиц

а) Признать необходимым расширение и ускорение начатых Математическим институтом Академии Наук СССР работ по вычислению и изданию оригинальных советских академических таблиц неполной Г-функции, неполной В-функции, таблиц распределения Стюдента, а также таблиц, необходимых для применения разработанных Н. В. Смирновым методов оценки неизвестных функций распределения и максимальных уклонений.

б) Считать целесообразным составление в Узбекском филиале Академии Наук СССР таблиц для применения θ-критерия В. И. Романовского. Просить работников Узбекского филиала Академии Наук СССР при очередном приезде в Москву представить план издания этих таблиц и обсудить его на совещании при Математическом институте Академии Наук СССР.

в) Считать желательным печатание в журнале «Известия Академии Наук СССР» информаций о ходе работ по составлению таблиц в различных организациях и учреждениях.

4. О преподавании математической статистики и теории вероятностей

а) Признать необходимым усиление преподавания теории вероятностей и особенно математической статистики на физико-математических факультетах университетов.

б) Одобрить крайне ценную инициативу кафедры Средне-Азиатского университета по организации специальности математической статистики на физико-математическом факультете Средне-Азиатского университета.

в) Считать желательным, чтобы университеты и Академия Наук СССР усилили работу по повышению квалификации в области математической статистики практических работников смежных специальностей путем организации специальных курсов, семинаров, аспирантуры. Просить сектор статистики Института экономики Академии Наук СССР подготовить более детальные предложения по этим вопросам.

г) Считать необходимым ввести, хотя бы в рамках самого общего ознакомления, преподавание теории вероятностей с применениями математической статистики и обработки наблюдений в технических вузах.

д) Считать необходимым в экономических вузах для специалистов по экономической статистике введение курса теории вероятностей и основанного на нем курса математической статистики и обработки наблюдений.

5. Об издании статистического журнала и литературы по статистике

а) Считать первоочередной и вполне назревшей мерой по подъему статистической культуры и развитию работы в области статистики, в частности математической, издание статистического журнала.

б) Считать крайне необходимым перевод и издание книги Фишера (R. A. Fisher, Statistical methods for research workers), а также создание элементарного учебника по математической статистике, содержащего достаточное количество примеров из народнохозяйственной практики.

в) Просить сектор статистики Института экономики Академии Наук СССР и актив статистиков при Доме ученых Академии Наук СССР организовать общественный просмотр наиболее распространенных учебников по статистике.

6. Об организации обсуждения методологических вопросов математической статистики.

Просить Институты философии, экономики и математики Академии Наук СССР организовать с широким привлечением статистического актива обсуждение принципиальных философских вопросов, относящихся к обоснованию теории вероятностей, обсуждение современных направлений в математической статистике и проблемы применения теории вероятностей и математической статистики в экономических науках.

7. О работе сектора статистики Института экономики Академии Наук СССР.

Считать необходимым расширение работы сектора статистики Института экономики Академии Наук СССР, имея в виду создание в будущем Статистического института.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADEMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 5 (1941), 187—192 Série mathématique

КРИТИКА и БИБЛИОГРАФИЯ

Л. Я. ОКУНЕВ, Высшая алгебра, издание второе, исправленное и дополненное, ГТТИ, М.—Л., 1940, 332 стр.

Рецензируемый учебник по своему содержанию и плану в общем соответствует действующей в настоящее время программе университетского курса высшей алгебры. Он состоит из следующих одиннадцати глав: I. Теория определителей.—II. Линейные уравнения.—III. Линейные преобразования и матрицы. Группа, кольцо и поле.—IV. Квадратичные формы.—V. Число и общая теория многочленов.—VI. Кольцо многочленов в поле рациональных чисел.—VII. Кольцо многочленов в поле действительных чисел.—VIII. Комплексные числа и основная теорема алгебры.—IX. Алгебраическое решение уравнений.—X. Теория исключения.—XI. Построения с помощью циркуля и линейки.

Как известно, первое издание этой книги вызвало ряд возражений. Во втором издании автор исправил некоторые неточности в доказательствах (в теореме о существовании корня) и, главное, в значительной мере устранил основной недостаток первого издания—нечеткость и приблизительность формулировок теорем и определений. Этот учебник, написанный весьма живо и с несомненным педагогическим тактом (автор хорошо чувствует, как правило, места, трудные для понимания студента, и удачно приходит ему на помощь), теперь вполне стал пригодным для использования, наряду с другими учебниками, в качестве руководства по основному курсу высшей алгебры в университетах и педагогических институтах.

Изложение материала является вполне оригинальным лишь в гл. XI, лежащей, впрочем, вне рамок университетской программы. Тем не менее автор во многих случаях отступает от обычных для учебной литературы канонов и этим придает книге несомненную свежесть. Особенно существенным новшеством является отказ от обычного для учебников доказательства теоремы о существовании корня, основанного на лемме Даламбера, и замена его хорошо известным (см. Ван-дер-Варден, Современная алгебра, гл. 10), но для учебников необычным доказательством, восходящим ко второму доказательству Гаусса и использующим теорию симметрических функций и теорему о существовании алгебраических расширений коммутативного поля, а от непрерывности—лишь существование действительного корня у многочлена нечетной степени с действительными коэффициентами. Это новшество следует считать вполне законным экспериментом. Трудно предполагать однако, что такой метод доказательства, более тонкий и громоздкий, станет общеупотребительным, и автор поступил бы осторожнее, включив в книгу также и доказательство с леммой Даламбера, тем более, что необходимый для этого подготовительный материал в книге содержится; сама же теорема о существовании корня ни при одном из этих доказательств не освобождается от использования непрерывности, т. е. не делается теоремой алгебраической, и автор напрасно сохраняет ее старое название—«основная теорема алгебры».

Указанное новшество оказало существенное влияние на содержание всей второй части книги; оно натолкнуло автора, в частности, на изложение в гл. V обоснования теории целых и рациональных чисел. Это неожиданное появление элементов теоретической арифметики в середине книги, после того как в первой половине книги читатель все время работал с целыми, рациональными и действительными числами, не может

не вызывать возражений. Оно и на самом деле является лишним и привлечено автором лишь ради метода пар (об этом ниже) и для демонстрации параллелизма теории делимости для целых чисел и для многочленов; автор не упоминает, к сожалению, что корни этого параллелизма вполне вскрыты современной теорией колец.

Вообще, хотя автор и поставил себе целью изложить материал обычного курса высшей алгебры на основе идей и методов современной алгебры, однако его книга во многом находится в противоречии с духом современной алгебры. Для того чтобы сделать курс алгебры современным, недостаточно ввести в него понятия кольца, поля, гиперкомплексной системы,—необходимо ввести их, сохраняя их роль и место в современной науке. Так, автор определяет понятие изоморфизма колец и полей, однако это характернейшее для современной алгебры понятие остается в книге без всякого употребления. Больше того, хотя автор обнаруживает в § 22 поле комплексных чисел в кольце матриц 2-го порядка над полем действительных чисел, однако лишь построение комплексного поля при помощи пар (§ 43) он считает законным и лишь пары назывaет комплексными числами. Это предпочтение, систематически оказываемое автором при построении новых алгебраических систем методу пар, как единственно «строгому» и «научному», оказывается возможным лишь благодаря игнорированию понятия изоморфизма; оно находится в полном противоречии с идеями современной алгебры и возвращает читателя к давно пройденным страницам истории математики. Противоречит современным воззрениям и данное автором толкование понятия алгебраического расширения (§ 46). Теория полей, говоря об алгебраическом расширении, исходит из задачи построения поля, в котором существовали бы корни для рассматриваемого многочлена, и не считает возможным говорить о корне без указания того поля, в котором он лежит, тогда как при изложении автора сперва строится нечто, называемое алгебраическим расширением и содержащее корень заданного многочлена, и лишь затем это нечто случайно оказывается полем.

Особенно не повезло понятию числа. На стр. 119 автор говорит о широте этого понятия и невозможности указать для него границы. Действительно, эта, на самом деле мнимая, неопределенность понятия числа не может не возникнуть в представлении читателя рецензируемой книги. Из неоднократных высказываний автора (см. например стр. 241, 258, 264) можно заключить, что числом следует называть элемент любого кольца, на чем, вероятно, автор не стал бы настаивать. Во всяком случае, автор сознательно употребляет термин «гиперкомплексное число» для элементов любой гиперкомплексной системы (алгебры), хотя эта терминология в настоящее время уже не употребляется. Понятие числового поля, систематически используемое автором, оставлено без определения, хотя и противопоставляется на стр. 119 общему понятию поля. Метод доказательства теоремы о существовании корня, избранный автором, не позволил ему ограничиться подполями поля комплексных чисел, однако ничто не мешало автору ввести вполне доступное для студентов понятие характеристики поля и говорить о полях характеристики нуль, а не оперировать с таинственным понятием числового поля.

Все эти замечания не противоречат высказанному выше утверждению о пригодности рецензируемой книги в качестве учебника для высшей школы. Они показывают однако, что задача создания курса высшей алгебры, стоящего на современном научном уровне, пока остается открытой.

А. Курош

G. H. HARDY and **E. M. WRIGHT. An introduction to the theory of numbers,** Oxford, at the Clarendon press, 1938, XVI+403 p.

Рецензируемая книга охватывает почти все отделы теории чисел. Авторам удалось дать в ней ясное представление об основных проблемах, результатах и методах теории чисел, не вдаваясь в подробное изложение весьма громоздких и тонких аппаратов современной теории чисел. Книга разбита на 24 главы.

I глава содержит изложение свойств чисел натурального ряда (без доказательств), основных, принятых в анализе и теории чисел обозначений и некоторых свойств простейших аналитических функций, постоянно встречающихся в числовых исследованиях.

Во II главе более подробно рассмотрен вопрос о распределении простых чисел в натуральном ряду и арифметических прогрессиях, причем дано доказательство бесконечности числа простых чисел и простейшие, очень грубые оценки их числа. Теорема Дирихле относительно простых чисел в прогрессиях доказана для некоторых простых случаев. Кроме того, в этой главе рассмотрены числа Эйлера и Мерсенна. В этой же главе изложена теория делимости целых чисел.

Глава III посвящена дробям Фарея и простейшим свойствам плоских числовых решеток. Здесь доказана теорема Минковского относительно точек решеток в выпуклых центрально симметрических телах и дана связь между дробями Фарея и приближениями иррациональных чисел рациональными.

В главе IV дана классификация и основные свойства иррациональных чисел, например доказана иррациональность чисел e и e^2.

Глава V содержит простейшие свойства сравнений и приложения этих свойств к исследованию сумм Гаусса, Рамануджана и других тригонометрических сумм. В этой главе выяснены также основные свойства числовой функции Эйлера и кроме того подробно рассмотрен решенный Гауссом вопрос о построении правильного 17-угольника.

В главе VI рассмотрена малая теорема Ферма и целый ряд элементарных следствий из нее, как например теорема, что среди чисел f_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$

$$f_n = \sum_{r=1}^{m} \left(\sum_{s=1}^{q_r} c_{r,s} n^s \right) a_r^n$$

при $c_{r,s}$ целых рациональных будет бесчисленное множество составных. В этой же главе вводится понятие квадратичного вычета и доказываются все свойства символа Лежандра, включая закон взаимности. Здесь же доказана теорема Вильсона вместе с некоторыми ее обобщениями, введено понятие первообразного корня и, наконец, рассмотрены некоторые, следующие из малой теоремы Ферма свойства чисел Мерсенна.

В главе VII изложена общая теория алгебраических сравнений по простому модулю и в качестве применений этой теории доказаны теоремы Ферма, Вильсона, Вольтенсхольма и теорема Штаудта относительно Бернуллиевых чисел.

В главе VIII рассмотрены свойства сравнений по составному модулю, в частности по модулю, равному степени простого числа. В качестве приложений этих общих свойств здесь доказаны теоремы Бауэра и Лейдесдорфа относительно делимости числителя чисел $s_m = \sum_{t(m)} \frac{1}{t}$, где $t(m)$—совокупность всех чисел меньших m и взаимно простых с m, на m^2, и наконец теоремы относительно вычетов чисел 2^p и $(p-1)!$ по модулю p^2, где p—простое число.

Глава IX посвящена вопросу о представлении действительных чисел десятичными дробями и дробями, расположенными по степеням любого целого числа. Здесь введено понятие множества меры нуль и доказаны некоторые метрические теоремы. В этой же главе рассмотрена задача Баше о представлении каждого числа суммой различных степеней двойки и в виде суммы различных степеней тройки с положительными и отрицательными знаками. Здесь же даны простейшие признаки делимости.

В главе X рассмотрены общие свойства непрерывных дробей. Здесь доказана теорема Лагранжа о квадратичных иррациональностях, рассмотрен ряд свойств чисел Фибоначчи и Люка и доказаны некоторые общие теоремы о приближении действительных чисел рациональными дробями с помощью алгоритма непрерывных дробей.

Глава XI посвящена более подробному исследованию вопроса о приближении действительных чисел рациональными дробями. Здесь прежде всего доказана с помощью принципа Дирихле общая теорема о приближении всякого иррационального числа с точностью до единицы, деленной на квадрат знаменателя приближающей дроби; дан признак Лиувилля трансцендентности числа, доказаны теоремы о трансцендент-

ности всех чисел, за исключением счетного множества, и трансцендентности чисел e и π. Теорема Линдемана и другие более поздние теоремы о трансцендентности различных классов чисел приведены без доказательства. Кроме того в этой главе приведен, в большинстве случаев без доказательства, ряд метрических теорем относительно характера приближения почти всех чисел рациональными дробями.

В главе XII изучаются общие законы арифметики в теле рациональных чисел $k(1)$, гауссовом теле $k(i)$ и теле $k(\rho)$, где $\rho = e^{4/3\pi i}$. Здесь рассмотрен алгоритм Эвклида в этих телах и доказаны основные теоремы о единственности представления каждого числа в виде произведения простых чисел тела.

Глава XIII посвящена диофантовым уравнениям. Здесь подробно рассмотрено уравнение Ферма $x^n + y^n = z^n$ для случаев $n = 2, 3, 4$, уравнение $x^3 + y^3 = 3z^3$, проблема о представлении всякого рационального числа в виде суммы трех кубов неотрицательных рациональных чисел и, в связи с этой последней задачей, уравнение $t^3 = x^3 + y^3 + z^3$.

В главах XIV и XV более подробно рассмотрена арифметика квадратичных полей— существование алгоритма Эвклида, вопрос о том, в каких полях все идеалы будут главными, примеры полей, имеющих не главные идеалы. Кроме того на целом ряде примеров разобраны вопросы о единицах поля, идеалах и малой теореме Ферма в этих полях.

В главе XVI рассмотрены элементарные свойства и аналитические выражения следующих арифметических функций: функции Эйлера $\varphi(n)$, функции Мебиуса $\mu(n)$, числа делителей числа n $d(n)$, суммы k-ых степеней делителей числа n, $\sigma_k(n)$ и числа представлений данного числа n в виде суммы двух квадратов, $r(n)$. Вид этой последней числовой функции $r(n)$ устанавливается с помощью введения характера по модулю 4. В этой же главе дан вид четных совершенных чисел.

Глава XVII посвящена рассмотрению аналитических функций, служащих функциями-женератриссами для числовых функций предыдущей главы. Здесь рассмотрены некоторые простейшие свойства $\zeta(s)$ Римана и других связанных с $\zeta(s)$ рядов Дирихле, а также ряды Ламберта, для которых получены соотношения с помощью ранее доказанных, арифметическими методами, теорем относительно числовых функций.

В главе XVIII рассмотрены верхние и нижние границы роста числовых функций $d(n)$, $\varphi(n)$, $\sigma(n)$, $r(n)$ и даны также асимптотические формулы для

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi(k), \quad \sum_{k=1}^{n} d(k), \quad \sum_{k=1}^{n} \sigma(k), \quad \sum_{k=1}^{n} r(n).$$

Кроме того дано асимптотическое выражение для числа целых чисел, не делящихся на квадрат.

В главе XIX рассмотрен вопрос о числе представлений целого числа в виде суммы положительных слагаемых, произвольных или различных и, в общем случае, принадлежащих к той или иной арифметической прогрессии. Доказательства всех теорем этой главы основаны на ряде функциональных тождеств, именно: тождествах Эйлера

$$\prod_{k=0}^{\infty} (1 + x^{2k+1}) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{\prod\limits_{k=1}^{n} (1 - x^{2k})}, \quad \prod_{k=1}^{\infty} (1 + x^{2k}) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2+n}}{\prod\limits_{k=1}^{n} (1 - x^{2k})},$$

тождестве Якоби из теории эллиптических функций

$$\prod_{n=1}^{\infty} \{(1 - x^{2n})(1 + x^{2n-1}z^2)(1 + x^{2n-1}z^{-2})\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^{n^2} z^{2n},$$

тождествах Роджера—Рамануджана, например

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n^2}}{\prod_{k=1}^{n}(1-x^k)}=\prod_{k=0}^{\infty}(1-x^{5k+1})^{-1}(1-x^{5k+4})^{-1}.$$

и некоторых других. Все эти тождества снабжены полными доказательствами.

В главе XX рассмотрен вопрос о представлении всякого целого положительного числа в виде суммы четырех квадратов целых чисел и дано три доказательства теоремы Лагранжа. Первое доказательство опирается только на алгебраическое тождество Эйлера и элементарный минимальный принцип (доказательство Ландау); во втором доказательстве для представления простого числа суммой четырех квадратов используются некоторые предложения из арифметики кватернионов, а третье доказательство основано на тождествах для θ-функций, полностью доказанных с помощью вспомогательных тождеств, полученных в предыдущих главах (доказательство Якоби). Это последнее доказательство позволяет установить также число представлений числа суммой четырех квадратов.

В XXI главе изложены некоторые результаты, относящиеся к общей проблеме Варинга, и даны границы для $g(n)$ и $G(n)$. Границы чисел $g(3)$, $g(4)$ и $g(6)$ сверху и границы чисел $g(n)$ снизу приведены с доказательствами, в остальных случаях даны формулировки результатов. В этой главе рассмотрена также проблема представления целого числа в виде суммы степеней целых чисел с положительными и отрицательными знаками, проблема Тарри и одно обобщение великой теоремы Ферма.

В главе XXII доказаны все те предложения относительно распределения простых чисел, которые не требуют для своего доказательства применения комплексного переменного и исследования расположения нулей $\zeta(s)$. В частности здесь доказано тождество Чебышева и даны постоянные границы для числа $\frac{\pi(x)\ln x}{x}$. Кроме того здесь рассмотрено поведение двух числовых функций: числа различных простых делителей и числа всех простых делителей числа n.

В главе XXIII подробно рассмотрена теорема Кронекера о том, что если иррациональные числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ линейно независимы в рациональном теле, то дробные доли чисел $n\alpha_1, n\alpha_2, \ldots, n\alpha_p$, где n пробегает натуральный ряд, всюду плотно распределены в p-мерном единичном кубе. Здесь приведены различные формы, интерпретации и доказательства этой теоремы, в частности известное доказательство Г. Бора. В этой же главе дана постановка проблемы о равномерном распределении чисел в данном интервале и доказана теорема о том, что дробные доли $n\alpha$ для иррационального α распределены равномерно на интервале $(0,1)$.

Глава XXIV посвящена известной теореме Минковского относительно системы n линейных форм от n целочисленных переменных. Здесь даны различные как арифметические, так и геометрические доказательства и самой теоремы Минковского и ряда ее обобщений и модификаций.

Рецензируемая книга написана очень ясным языком и составлена с большим математическим вкусом. Она является прекрасным введением в теорию чисел и представляет большой интерес для студентов старших курсов физматов университетов и преподавателей средних школ.

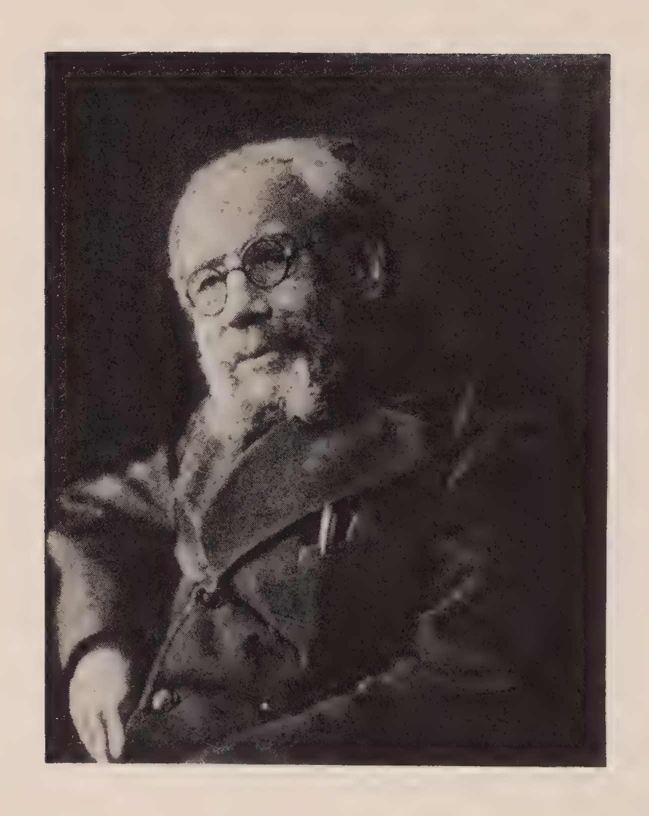
К числу недостатков книги, с моей точки зрения, следует отнести, прежде всего, отсутствие систематического изложения теории первообразных корней и индексов, а в связи с этим и двучленных сравнений высших степеней. Кроме того в книге можно было бы изложить вполне элементарную теорию уравнения Пелля и на частных примерах дать представление о теории квадратичных форм. Было бы естественным также изложить в этой книге очень изящные теоремы И. Виноградова о распределении квадратичных вычетов и первообразных корней. Наконец очень жаль, что в книге отсутствуют элементарные методы в аддитивной теории чисел, принадлежащие В. Бруну

и Л. Шнирельману. Наличие этих последних методов позволило бы осветить в книге, с одной стороны, проблемы, связанные с плотностями последовательностей, а с другой стороны, проблемы Гольдбаха.

Но сделанные мной замечания, естественно, не снижают очень большой ценности этой книги, и я считаю, что перевод ее следовало бы издать у нас в СССР для того, чтобы сделать книгу доступной советскому читателю.

А. Гельфонд





ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 5 (1941), 193—202 Série mathématique

НИКОЛАЙ МАКСИМОВИЧ ГЮНТЕР

1871—1941

4 мая 1941 г. в Ленинграде, на 70-м году жизни, скончался один из виднейших математиков нашей страны, заслуженный деятель науки, член-корреспондент Академии Наук СССР, профессор Ленинградского университета Николай Максимович Гюнтер.

Н. М. Гюнтер родился в 1871 г. По окончании Петербургского университета, он был оставлен при нем в 1894 г. А. А. Марковым, и с тех пор все свои силы посвятил непрерывной творческой научной работе. Николай Максимович любил говорить, что настоящий ученый работает все время, с утра и до вечера, а не только тогда, когда он сидит за своим рабочим столом. Эти слова применимы прежде всего к нему самому.

Когда Н. М. Гюнтер обучался в Петербургском университете и начинал свою деятельность, там были свежи традиции П. Л. Чебышева. Непосредственными учителями Николая Максимовича были такие представители знаменитой петербургской школы, как А. А. Марков и А. Н. Коркин; в его работах мы имеем блестящее продолжение и развитие славных математических традиций этой школы. Более поздние его работы по математической физике связаны с трудами А. М. Ляпунова и В. А. Стеклова.

Первые работы Н. М. Гюнтера относятся к общей теории дифференциальных уравнений—как обыкновенных, так и в частных производных. Сюда входят прежде всего две его диссертации: магистерская «О приложениях теории алгебраических форм к интегрированию линейных дифференциальных уравнений» (1904 г.) и докторская «К теории характеристик систем уравнений в частных производных» (1915 г.).

Общая теория обыкновенных линейных дифференциальных уравнений и, в частности, вопросы приложения алгебраических форм к этой теории и разыскание тех случаев, когда уравнение интегрируется в алгебраических функциях, занимали большое место в математике второй половины XIX века. В магистерской диссертации Николая Максимовича среди других вопросов исследована задача интегрирования линейного уравнения с рациональными коэффициентами, если известна в функции независимой переменной некоторая форма с постоянными коэффициентами, составленная из неизвестных частных решений. Здесь даны достаточные условия того, что общий интеграл уравнения—алгебраическая функция, и рассмотрены некоторые случаи, когда эти условия не выполняются. На указанной основе построена теория уравнений второго порядка с общим алгебраическим интегралом. В этом же направлении рассматривается и теория уравнений третьего порядка. Кроме конкретных новых результатов, в диссертации приведены общие соображения, из которых непосредственно вытекают известные результаты Фукса, Шварца, Клейна, Альфена и др.

Работы Николая Максимовича по общей теории уравнений в частных производных посвящены трем различным вопросам. К первому из них относятся работы, связанные с теорией исключения и общими условиями интегрируемости систем уравнений. Ко второму следует отнести докторскую диссертацию Николая Максимовича, в которой он дает аналитическую теорию систем уравнений в частных производных весьма общего вида, так называемых систем Рикье. Наконец, третий вопрос рассматривается в работе «Об аналитических решениях уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)».$$

опубликованной в 1924 г. Здесь разбирается задача Гурса об определении решения по его значениям на двух непересекающихся кривых. Во всех указанных направлениях Николай Максимович получил весьма важные результаты.

Разнообразными по содержанию и богатыми новыми идеями являются работы Николая Максимовича по вопросам математической физики, публикация которых началась в 1923 г. и продолжалась до последнего времени. Первый большой цикл образуют работы, посвященные одной из основных нелинейных проблем математической физики, а именно, задаче Коши и смешанной задаче для уравнений гидродинамики. Основным результатом в случае задачи Коши является установление существования и единственности решения уравнений гидродинамики идеальной несжимаемой жидкости, при наличии внешней силы, имеющей потенциал. При этом предполагается, что жидкость заполняет все пространство и задано начальное поле скоростей.

Задача приводится к системе нелинейных интегродифференциальных уравнений, которые решаются по методу последовательных приближений. Все вычисления проводятся на основе поля скоростей, причем у составляющих вектора скорости не предполагается существования производных второго порядка. Большое место в работе занимает исследование вторых производных ньютонова потенциала при малых предположениях относительно его плотности.

Совершенно по-иному строится метод последовательных приближений для случая ограниченной задачи, т. е. для случая жидкости, заполняющей некоторый сосуд, который может перемещаться заданным образом с течением времени. Здесь, кроме начальных условий, мы имеем и предельное условие на поверхности сосуда. В данном случае метод последовательных приближений построен не на поле скоростей, а на поле вихрей, и в качестве начального условия берется поле вихрей в начальный момент времени. Существенным моментом исследования является выведенная Николаем Максимовичем формула, дающая поле скоростей по заданному полю вихрей в случае ограниченной области.

Основная проблема гидродинамики, рассмотренная в работах Николая Максимовича, математически родственна другой нелинейной проблеме гидродинамики, исторически связанной с Петербургским университетом. Около семидесяти лет тому назад П. Л. Чебышев предложил своему молодому ученику А. М. Ляпунову в качестве темы вопрос о фигурах равновесия жидкой вращающейся массы, частицы которой взаимодействуют по закону Ньютона. Одновременно с А. М. Ляпуновым этой же задачей занимался Пуанкаре. Встретив на пути строгого решения этой задачи большие трудности, Пуанкаре ограничился приближенным ее решением и заявил, что подобная задача, имеющая наглядный физический смысл, не требует строго математического решения. В одной из своих работ А. М. Ляпунов возражает против такого мнения Пуанкаре и говорит, что, после того как

задача поставлена математически, она должна решаться со всей необходимой математической строгостью. В своих фундаментальных работах по гидродинамике Николай Максимович оставался верным мнению А. М. Ляпунова.

В связи со своими гидродинамическими работами Николай Максимович провел ряд исследований по классической теории потенциала. Им были выяснены некоторые свойства потенциалов при незначительных ограничениях на плотность и, в частности, была впервые строго доказана возможность применения известных формул Грина к потенциалам простого слоя при предположении непрерывности их плотности. В 1934 г. в коллекции Бореля была опубликована монография Николая Максимовича «La théorie du potentiel et ses applications aux problèmes fondamentaux de la physique mathématique». В ней впервые дано строгое и систематическое изложение современного состояния теории потенциала. Она содержит ряд результатов, принадлежащих самому автору. В частности, дано полное исследование предельных задач для случая ограниченных и неограниченных тел, граница которых состоит из нескольких поверхностей.

Перейдем теперь к большому циклу работ Николая Максимовича, который начался с применения метода сглаживания к операциям над функциями, не имеющими производных, и который затем привел автора к новым постановкам задач математической физики и к систематическому применению понятия функций от областей и интегралов Стильтьеса к решению упомянутых задач в их новой постановке.

Работы Николая Максимовича по гидродинамике неоднократно приводили его к необходимости оперировать с функциями, которые не имеют достаточного числа производных для того, чтобы к ним можно было применять обычные для рассматриваемого вопроса методы рассуждения. В ряде работ он применял к такого рода вопросам анализа метод сглаживания. Этот метод, неоднократно применявшийся в работах В. А. Стеклова, состоит в замене функции интегралом от нее по малому переменному промежутку $(x,\ x+h)$, деленному на длину h этого промежутка. Этот прием может применяться и в случае нескольких переменных. Полученную таким образом функцию Николай Максимович называл функцией Стеклова.

Метод сглаживания естественно привел Николая Максимовича к общему понятию аддитивной функции от области. Вместо этого понятия он пользовался понятием средней функции. Это есть частное от деления функции от области на меру области. Существенным моментом теории является определение совокупности тех областей или множеств, для которых определена функция. Этот момент играет в дальнейшем роль и при построении понятия интеграла от средней функции. Впервые понятие средней функции было применено Николаем Максимовичем в задаче разложения заданной функции по универсальным функциям Корна. В 1932 г. он опубликовал большую работу «Sur les intégrales de Stieltjes et leurs applications aux problèmes de la physique mathématique». Первые две главы этой работы содержат систематическое изложение теории средних функций и интегрального исчисления для них. В третьей главе на этой основе строится теория интегральных уравнений. Эти исследования Николая Максимовича соприкасаются с исследованиями Радона и Рисса.

В последнее время Николай Максимович в ряде мемуаров вернулся к общей теории интегральных уравнений в интегралах Стильтьеса и, пользуясь представлением резольвенты в звезде Миттаг-Леффлера, построил спектральную функцию для широкого класса таких уравнений. Эти работы имеют много точек соприкосновения с работами Вейля и Карлемана

по теории сингулярных интегральных уравнений. В одной из своих заметок Николай Максимович показал, что частным случаем построенной им теории интегральных уравнений является теория нагруженных интегральных уравнений (belastete Integralgleichungen), развитая в работах Кнезера и Лихтенштейна. В ряде работ он дал исчерпывающее исследование ядер специального типа, а именно, ядер Фурье, и интегральных уравнений с такими ядрами.

Большое принципиальное значение имеют приложения понятия средней функции и интегралов Стильтьеса к задачам математической физики. В работах Николая Максимовича на указанной основе даются новые постановки основных задач математической физики и проводится полное решение этих задач в новой постановке. Характерным при этом является приближение математической постановки задачи к реальной действительности явления. Этого удается достигнуть в результате замены понятия функции точки понятием средней функции. Благодаря этому удается избегнуть таких абстрактных понятий, как плотность в данной точке, ускорение в данный момент времени и т. д. В упомянутой выше работе 1932 г. Николай Максимович подробно проводит новую точку зрения в теории потенциала и для предельных задач, связанных с уравнением Лапласа. На основе теории средних функций доказывается между прочим обобщенная формула Пуассона, имеющая важное значение в математической физике. Далее на основе обобщенного понятия потока Николай Максимович рассмотрел в новой постановке основную задачу теплопроводности.

В недавних работах Николай Максимович приложил свои общие идеи к рассмотрению задачи о малых колебаниях струны. Основным является формула, выражающая отклонение струны в виде интеграла от произведения функции Грина на сумму внешней силы и силы инерции. Заменяя ускорение средним изменением скорости и переходя к средним функциям во внешней нагрузке и искомом отклонении, Николай Максимович получил интегродифференциальное уравнение. Это уравнение решено им при предположениях, которые вполне оправдываются физическим смыслом задачи.

В результате проникновения в математическую физику идей и методов современной теории функций вещественной переменной и функционального анализа коренным образом меняются наши представления о постановке задач математической физики, о методах их решения и о самом понятии решения задачи. Эта перестройка математической физики находится в связи и с теми глубокими новыми идеями, которые теперь возникают в теоретической физике. В той новой математической физике, которая теперь строится, работы Николая Максимовича займут почетное место. Для них характерной является следующая мысль, которую он высказал в одном из своих последних мемуаров. Он говорит, что при применения метода сглаживания «задача, имеющая целью разобрать явление внешнего мира, отчасти освобождается от стеснительных условий, наложенных на нее по необходимости, вследствие ограниченности наших средств, и природа, освобожденная от этих стеснений, начинает открывать свои тайны».

Исключительно широкой и разнообразной была педагогическая деятельность Н. М. Гюнтера. Сорок семь лет он работал в Ленинградском университете, больше тридцати лет он вел преподавание в Ленинградском Институте инженеров путей сообщения, больше двадцати лет преподавал в Педагогическом институте. В течение ряда лет он работал на Высших женских (Бестужевских) курсах, в Ленинградском политехническом институте и других учебных заведениях. Он не оставлял этой работы до последнего времени и вел как общие, так и специальные курсы на кафедре

дифференциальных и интегральных уравнений в Ленинградском университете, которой он заведывал. Целый ряд разделов математики впервые был освещен в Ленинградском университете в специальных курсах Николая Максимовича. Первый специальный курс «Теория алгебраических форм» был им проведен в 1904 г. Огромная любовь к преподаванию своей науки красной нитью проходит через всю деятельность Николая Максимовича. Он преподавал всегда творчески. Продумывая какой-либо новый курс, общий или специальный, он всегда вносил в него новые мысли, находил новые подходы к изложению материала. Лекции Николая Максимовича воспитывали особую культуру математической точности и строгости и привычку к ясному выражению мыслей.

Целый ряд математиков нашей страны прошли через непосредственное руководство Николая Максимовича и помнят то внимание и ту необыкновенную отзывчивость, с которыми он относился к каждой работе молодого ученого. Сурово критикуя работу, он умел подбодрить человека, вдохнуть в него уверенность, что затруднения преодолимы, и заставить его работать творчески самостоятельно.

Одна из характерных черт всей деятельности Николая Максимовича — это высокое чувство общественного долга, которое проявлялось во всей его деятельности как преподавателя и организатора научной работы. Целый ряд лет Николай Максимович состоял председателем Ленинградского математического общества, и при нем деятельность Общества, до того вялая и незаметная, резко оживилась. Возник и стал регулярно выходить журнал Общества. Не менее интенсивной была деятельность Николая Максимовича в Университете. Неутомимый организатор студенческих научных кружков, семинаров, он отдавал этому делу свою огромную кипучую энергию. Всюду вносил он высокую принципиальность, высокую организованность и энтузиазм. Многое он сделал для расцвета математики в нашей стране не только своими научными работами, но и как глава большой научной школы и неутомимый организатор многих ценных начинаний.

Выдающаяся деятельность Николая Максимовича была высоко оценена в нашей стране, и ему было присвоено звание заслуженного деятеля науки РСФСР.

Советская наука потеряла в лице Николая Максимовича Гюнтера одного из выдающихся своих представителей.

В. И. Смирнов и С. Л. Соболев

СПИСОК ТРУДОВ Н. М. ГЮНТЕРА*

1895

1. О нахождении дробных рациональных интегралов линейных дифференциальных уравнений (*Матем. сборник*, т. XVII, стр. 680—701).

1899

2. Геометрия (Прилож. к «Малому энциклопедическому словарю», СПб, 31 стр. + +2 л. черт.).
3. О линейных уравнениях с правильными интегралами, интегрируемых в гипергеометрических функциях (*Сборник Инст. инж. путей сообщ.*, вып. L, стр. 305—342).

1903

4. Аналитическая геометрия. Лекции, читанные в 1902/3 акад. году (Изд. Инст. инж. путей сообщ., СПб, 650 + 2 ненум. стр., литограф.).

* Список составлен сотрудниками библиотеки Ленинградского гос. университета З. П. Кок, С. И. Рагозиной и Е. А. Шахматовой.

5. О приложениях теории алгебраических форм к интегрированию линейных дифференциальных уравнений (СПб, тип. Ю. Н. Эрлиха, 219 стр.).
6. Введение в анализ (Изд. Женских педагог. курсов, СПб, стр. 1—319, литограф.).

1904

7. Аналитическая геометрия. Лекции, читанные в 1902/3 и 1903/4 гг. (Изд. Инст. инж. путей сообщ., СПб, 403 стр., 177 черт.; то же в *Сборнике Инст. инж. путей сообщ.*, вып. LXIII, стр. 1—403).
8. Введение в анализ. Лекции, читанные в 1903/4 г. (Изд. Высш. женск. курсов, СПб, 271 стр., литограф.).

1906

9. Введение в анализ. Часть I (Изд Высш. женск. курсов, СПб, 151 + IV стр., литограф.).

1907

10. Введение в анализ. Часть II (Изд. Высш. женск. курсов, СПб, 171 + IV стр., литограф.).
11. Исчисление конечных разностей (Изд. Издат. комитета при физ.-мат. фак., СПб, 229 стр., литограф.).

1908

12. Аналитическая геометрия. Лекции, читанные в Инст. инж. путей сообщ., изд. 2-е, доп. (СПб, тип. Ю. Н. Эрлиха, 469 + 2 ненум. стр.).

1909

13. Введение в анализ. Вып. I. Лекции, читанные на СПб. Высш. женск. курсах (СПб, тип. Ю. Н. Эрлиха, 246 стр.).
14. Исчисление конечных разностей (Изд. Издат. комитета при физ.-мат. фак., СПб, 166 + 2 ненум. стр., литограф.).

1910

15. Введение в анализ. Дополнительные статьи (Изд. Высш. женск. курсов, СПб, 26 стр., литограф.).
16. Интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений. Курс лекций, прочитанных в 1909/10 г. (Изд. Высш. женск. курсов, СПб, 266 + 2 ненум. стр., литограф.).
17. К теории характеристик систем уравнений в частных производных с одной неизвестной функцией от m независимых переменных (*Дневник XII съезда русских естествоиспытателей и врачей*, № 8, М., стр. 315—316).

1911

18. Высшая алгебра. Лекции, читанные в Инст. инж. путей сообщ. (Изд. студ. библ. Инст. инж. путей сообщ., СПб, 102 стр., литограф.).
19. Замечания по поводу мемуара E. Delassus под заглавием: «Extension du théorème de Cauchy aux systèmes les plus généraux d'équations aux dérivées partielles» (*Сборник Инст. инж. путей сообщ.*, вып. LXXX, стр. 1—2 отд. паг.).
20. Интегральное исчисление. Лекции, читанные в Инст. инж. путей сообщ. (Изд. студ. библ. Инст. инж. путей сообщ., СПб, 77 стр., литограф.).
21. К вопросу о характеристиках системы уравнений в частных производных со многими неизвестными функциями (*Сборник Инст. инж. путей сообщ.*, вып. LXXX, стр. 1—24 отд. паг.).

1912

22. Дифференциальное исчисление. Лекции (Изд. Издат. комитета при физ.-мат. фак. Высш. женск. курсов, СПб, 311 стр., литограф.).
23. Дифференциальное исчисление. Лекции. I семестр. Изд. 2-е (Изд. студ. библ. Инст. инж. путей сообщ., СПб, литограф.).
24. Интегральное исчисление. Лекции (Изд. Издат. комитета при физ.-мат. фак. Высш. женск. курсов, СПб, 90 стр., литограф.).
25. Сборник задач по высшей математике (Совместно с А. А. Адамовым, А. П. Вилижаниным, А. Н. Захаровым и др.) (Изд. Инст. инж. путей сообщ., СПб, 250 стр.).

1913

26. Введение в анализ. По лекциям проф. Н. М. Гюнтера (Изд. Издат. комитета при физ.-мат. фак. СПб. унив., СПб, 497 стр., литограф.).
27. К теории характеристик систем уравнений в частных производных (СПб, тип. А. Э. Коллинс, 378 стр.).

28. О зависимостях, связывающих данные однородные функции (*Сборник Инст. инж. путей сообщ.*, вып. LXXXIV, стр. 1—20 отд. паг.).
29. О канонической форме систем однородных уравнений (*Сборник Инст. инж. путей сообщ.*, вып. LXXXIV, стр. 1—22 отд. паг.).
30. Об одном неравенстве из теории целых рациональных функций (*Сборник Инст. инж. путей сообщ.*, вып. LXXXIV, стр. 1—18 отд. паг.).
31. Теория рядов. Лекции (Изд. Издат. комитета при физ.-мат. фак. Высш. женск. курсов, СПб, 51 стр., литограф.).
32. Sur les caractéristiques des systèmes d'équations aux dérivées partielles (*Comptes rendus*, Paris, т. 156, p. 1147—1150).
33. Sur la forme canonique des équations algébriques (*Comptes rendus*, Paris, t. 157, p. 577—580).

1914

34. Введение в анализ. По лекциям проф. Н. М. Гюнтера. Изд. 2-е. (Изд. Издат. комитета при физ.-мат. фак. СПб. унив., СПб, 497 стр., литограф.).
35. Высшая математика. Отд. I и II (Изд. студ. библ. Инст. инж. путей сообщ. Пгр., 454 стр.).
36. Об исключении (*Сборник Инст. инж. путей сообщ.*, т. LXXXV, стр. 1—10).
37. Теория рядов. Лекции (Изд. Издат. комит. при физ.-мат. фак. Высш. женск. курсов, СПб, 51 стр., литограф.).
38. Sur la théorie générale des systèmes d'équations aux dérivées partielles (I) (*Comptes rendus*, Paris, t. 158, p. 853—856).
39. Sur la théorie générale des systèmes d'équations aux dérivées partielles (II) (*Comptes rendus*, Paris, t. 158, p. 1108—1111).

1915

40. Аналитическая геометрия. Лекции, читанные в Инст. инж. путей сообщ., изд. 3-е (Изд. Инст. инж. путей сообщ., Пгр., 479 стр.; то же в *Сборнике Инст. инж. путей сообщ.*, вып. LXXXVIII).
41. Введение в анализ. По лекциям проф. Н. М. Гюнтера. Изд. 3-е (Изд. Издат. комит. при физ.-мат. фак. Петрогр. унив., Пгр., 398 стр.).
42. Высшая математика. I—Теория пределов. II—Дифференциальное исчисление. III—Интегральное исчисление. IV—Высшая алгебра (Изд. студ. библ. Инст. инж. путей сообщ., Пгр., 431 стр., литограф.).
43. Дифференциальное исчисление. Лекции (Изд. Издат. комит. при физ.-мат фак. Высш. женск. курсов, Пгр., 281 стр., литограф.).
44. Сборник задач по высшей математике. Изд. 2-е (Совместно с А. А. Адамовым, А. П. Вилижаниным, А. Н. Захаровым и др.) (Изд. Инст. инж. путей сообщ., Пгр., 290 + 1 ненум. стр.).

1916

45. О системах линейных уравнений первого порядка в частных производных с двумя переменными независимыми (Изд. Инст. инж. путей сообщ., Пгр., 30 стр.).

1918

46. Высшая математика (Изд. студ. библ. Инст. инж. путей сообщ., Пгр., 304 стр., литограф.).

1923

47. Краткий курс тригонометрии («Сеятель», Пгр., 108 + 1 ненум. стр.).
48. О педагогической деятельности А. А. Маркова (*Известия Акад. Наук СССР*, VI сер., т. XVII, стр. 35—44).
49. Об одной вспомогательной теореме (*Известия Акад. Наук СССР*, VI сер., т. XVII, стр. 53—64).
50. Sur un théorème auxiliaire (*Comptes rendus*, Paris, t. 176, p. 1115—1117).
51. Sur un problème d'hydrodynamique (*Comptes rendus*, Paris, t. 177, p. 865—867).

1924

52. О действиях над функциями, не имеющими производных. I (*Известия Акад. Наук СССР*, VI сер., т. XVIII, стр. 353—372).
53. Об аналитических решениях уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

Матем. сборник, т. XXXII, стр. 26—42).

54. Сборник задач по высшей математике. Изд. 3-е, сокращ. Под редакц. Н.М. Гюнтера, Я. Д. Тамаркина, Я. В. Успенского и А. А. Фридмана (Гос. изд., Л., 226 стр.)
55. Sur la résolution des équations Rot. $X=A$, Grad. $X=A$ (*Proceed. of the Intern. mathem. Congress of Toronto*, p. 535—541).
56. Sur quelques applications des fonctions de W. Stekloff (*Доклады Акад. Наук СССР*, сер. А, стр. 35—38).
57. Sur un problème fondamental de l'hydrodynamique (*Proceed. of the Intern. mathem. Congress of Toronto*, p. 543—548).

1925

58. О движении жидкости, заключенной в данном перемещающемся сосуде (*Доклады Акад. Наук СССР*, сер. А, стр. 152—155).
59. О действиях над функциями, не имеющими производных, II (*Известия Акад. Наук СССР*, VI сер., т. XIX, стр. 75—96).
60. О распространении теоремы Коши на любую систему уравнений в частных производных (*Матем. сборник*, т. XXXII, стр. 367—447).
61. О решениях уравнений гидродинамики (*Известия Акад. Наук СССР*, VI сер., т. XIX, стр. 217—232).
62. Об уравнении

$$\frac{\partial V}{\partial t}+u\frac{\partial V}{\partial x}+v\frac{\partial V}{\partial y}+w\frac{\partial V}{\partial z}=f$$

(*Матем. сборник*, т. XXXII, стр. 278—304).
63. Sur un lemme de Poincaré (*Comptes rendus*, Paris, t. 181, p. 649—651).

1926

64. О движении жидкости, заключенной в данном перемещающемся сосуде, части I и II (*Известия Акад. Наук СССР*, VI сер., т. XX, стр. 1323—1348, 1503—1532).
65. О лемме Пуанкере (*Матем. сборник*, т. XXXIII, стр. 291—331).
66. Памяти А. А. Фридмана. Речь, произнесенная 26 сентября 1925 г. (*Журнал Ленингр. физ.-мат. общ.*, т. I, вып. 1, стр. 5—9).
67. О нахождении скорости по вихрю в случае жидкости, заключенной в замкнутом сосуде (*Журнал Ленингр. физ.-мат. общ.*, т. I, вып. 1, стр. 12—36).
68. Sur le mouvement d'un liquide remplissant un domaine simplement connexe qui se déplace (*Comptes rendus*, Paris, t. 183, p. 17—19).
69. Sur le mouvement d'un liquide remplissant un domaine à connection multiple qui se déplace (*Comptes rendus*, Paris, t. 183, p. 114—116).
70. Sur une application des fonctions universelles de M. A. Korn (*Comptes rendus*, Paris, t. 183, p. 551—553).
71. Über ein Hauptproblem der Hydrodynamik (*Mathem. Zeitschrift*, Bd. XXIV, S. 448—499).

1927

72. Замечание о теореме Morera («In Memoriam N. J. Lobatschevskii», vol. II, Казань, стр. 156—162).
73. О движении жидкости, заключенной в данном перемещающемся сосуде, части III, IV и V (*Известия Акад. Наук СССР*, VI сер., т. XXI, стр. 621—650, 735—756, 1139—1162).
74. Об одном приложении теории замкнутости, части I и II (*Известия Акад. Наук СССР*, VI сер., стр. 63—94, 255—272).
75. Об основной задаче гидродинамики (*Известия физ.-мат. инст. им. В. А. Стеклова*, т. II, стр. 1—168).
76. Об уравнениях гидродинамики (*Журн. Ленингр. физ.-мат. общ.*, т. I, вып. 2, стр. 240—247).

1928

77. Замечание об интегралах Стильтьеса (*Труды Всерос. матем. съезда*, [Москва, 27 апр.—4 мая 1927 г.], М.—Л., стр. 193—195).
78. О движении жидкости в многосвязной области (*Труды Всерос матем. съезда*, [Москва, 27 апр.—4 мая 1927 г.], М.—Л., стр. 256—258).
79. О движении жидкости, заключенной в данном перемещающемся сосуде, часть VI (*Известия Акад. Наук СССР*, VII сер., отдел. физ.-мат. наук, стр. 9—30).
80. О задаче Неймана (*Матем. сборник*, т. XXXV, стр. 139—219).
81. О линейных уравнениях первого порядка в частных производных с двумя независимыми переменными (*Сборник Ленингр. инст. инж. путей сообщ.*, вып. XCVII, ч. III, Л., стр. 115—126).
82. О научных достижениях В. А. Стеклова («Памяти В. А. Стеклова», Л., стр. 1—12).

83. Труды В. А. Стеклова по математической физике («Памяти В. А. Стеклова», Л., стр. 49—77).

1929

84. Дополнение к статье «О системах линейных уравнений первого порядка в частных производных с двумя переменными независимыми» (*Сборник Ленингр. инст. инж. путей сообщ.*, вып. CI, Л., стр. 315—325).
85. Сборник задач по высшей математике. Изд. 4-е, доп. и испр. (Совместно с А. А. Адамовым, А. П. Вилижаниным, А. Н. Захаровым и др.) (Гос. изд., М.—Л., часть I, 256 стр.; часть II, 135 стр.).
86. Sur une application des intégrales de Stieltjes au problème de Neumann (*Comptes rendus*, Paris, т. 189, p. 447—450).

1930

87. Сборник задач по высшей математике. Изд. 5-е, доп. и испр. Часть I (Совместно с А. А. Адамовым, А. П. Вилижаниным, А. Н. Захаровым и др.). (Гос. изд., М.—Л., 256 стр.).
88. Sur les intégrales de Stieltjes généralisées (*Atti del Congresso internaz. dei matematici* [Bologna, 3—10 sett., 1928], t. II, Bologna, p. 313—324).

1931

89. Основы математической физики, ч. I. Интегральные уравнения (Центр. типогр. Наркомвоенмора, Л., 176 стр., литограф.).
90. Сборник задач по высшей математике. Часть I, изд. 6-е (Совместно с А. А. Адамовым, А. П. Вилижаниным, А. Н. Захаровым и др.) (Гос. н.-техн. изд., М.—Л., 256 стр.).
91. Сборник задач по высшей математике. Часть II, изд. 5-е, доп. и испр. (Совместно с А. А. Адамовым, А. П. Вилижаниным, А. Н. Захаровым и др.). (Гос. изд., М.—Л., 169 стр.).
92. Sur le mouvement d'un liquide enfermé dans un vase qui se déplace (*Atti del Congresso intern. dei matematici* [Bologna, 3—10 sett. 1928], t. V, Bologna, p. 183—191).

1932

93. Памяти В. А. Стеклова (*Записки Харківського матем. тов.*, сер. 4, т. V, стр. 3—5).
94. Сборник задач по высшей математике. Изд. 7-е, испр. и доп. (Перераб. под редакц. Н. М. Гюнтера и Р. О. Кузьмина) (Гос. т.-теорет. изд., Л.—М., часть I, 230 стр.; часть II, 300 стр.).
95. Les fonctions moyennes et les intégrales de Stieltjes (*Verhandl. des Intern. Mathem. Kongress* [Zürich, 1932], Bd. II, Zürich und Leipzig, s. a., S. 128—129).
96. Sur le potentiel newtonien (*Comptes rendus*, Paris, t. 194, p. 446—449).
97. Sur le problème du refroidissement (*Comptes rendus*, Paris, t. 194, p. 538—541).
98. Sur les intégrales de Stieltjes et leurs applications aux problèmes fondamentaux de la physique mathématique (*Труды физ.-мат. инст. им. В. А. Стеклова*, т. I, изд. Акад. Наук СССР, 494 стр.).

1933

99. Сборник задач по высшей математике. Изд. 8-е (Перераб. под редакц. Н. М. Гюнтера и Р. О. Кузьмина). (Гос. т.-теор. изд., Л.—М., часть I, 280 стр.; ч. II, 312 стр.).
100. Сборник задач по высшей математике, часть III (Перераб. под редакц. Н. М. Гюнтера и Р. О. Кузьмина). (Гос. т.-теор. изд., Л.—М., 368 стр.).
101. Sur le problème des «Belastete Integralgleichungen» (*Studia mathem.*, t. IV, p. 8—14).
102. Sur les opérations linéaires (*Physikal. Zeitschr. d. Sowjet Union*, Bd. III, S. 115—139).
103. Э. Уиттекер и Г. Робинсон. Математическая обработка результатов наблюдений. Перев. с англ. под редакц. Н. М. Гюнтера (Гос. т.-теор. изд., Л.—М., 363 + 1 ненум. стр.).

1934

104. Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных (Гос. т.-теор. изд., Л.—М., 359 стр.).
105. Сборник задач по высшей математике. Часть II, изд., 9-е (Перераб. под редакц. Н. М. Гюнтера и Р. О. Кузьмина) (Гос. т.-теор. изд., Л.—М., 312 стр.).
106. La théorie du potentiel et ses applications aux problèmes fondamentaux de la physique mathématique (Gauthier-Villars, Paris, 303 p.).

1935

107. Интегралы Стильтьеса в математической физике и в теории интегральных уравнений (*Труды 2 Всес. математ. съезда* [Ленинград, 24—30 июня 1934 г.], т. I, стр. 271—317)

108. О спектральной функции некоторых эрмитовых интегральных уравнений (*Доклады Акад. Наук СССР*, т. IV, стр. 299—302).
109. La théorie des fonctions de domaines dans la physique mathématique (*Prace matem.-fys.*, Warszawa, vol. XLIV, p. 33—50).
110. Sur la fonction spectrale de certaines équations intégrales hermitiennes (*Доклады Акад. Наук СССР*, т. IV, стр. 315—318).
111. Sur la résolvante de certaines équations intégrales hermitiennes (*Comptes rendus*, Paris, t. 200, p. 1714—1716).
112. Sur quelques applications nouvelles de la théorie des fonctions de domaines à la théorie des équations intégrales. Première partie (*Матем. сборник*, т. XLII, стр. 279—384).
113. Э. Уиттекер и Г. Робинсон. Математическая обработка результатов наблюдений. Перев. с англ. под редакц. Н. М. Гюнтера, изд. 2-е (Главн. ред. общетехн. лит., Л.—М., 363 + 1 ненум. стр.).

1936

114. О модулях алгебраических форм (*Труды* I *Всес. съезда математиков* [Харьков, 1930], М.—Л., стр. 240—253).
115. О распространении сферических волн в газах (*Труды Ленингр. индустр. инст.*, № 10, вып. 3, стр. 17—29).
116. Об одном интеграле, аналогичном интегралу Фурье (*Доклады Акад. Наук СССР*, т. IV, стр. 289—291).
117 Sur les équations intégrales aux noyaux du type Fourier de M. H. Weyl (*Журн. Інст. матем. Акад. Наук УССР*, № 2, стр. 21—46).
118. Sur une intégrale analogue à l'intégrale de Fourier (*Доклады Акад. Наук СССР*, IV, стр. 301—303).
119. Шарль Эрмит. Курс анализа. Перев. под ред. Н. М. Гюнтера (Гл. ред. общетехн. лит., Л.—М., 383 стр.).
120. Sur la fermeture (*Rendic. del Circolo Matem. di Palermo*, t. LX, p. 1—11).

1937

121. О сглаживании функции и связанных с ним задачах (*Ученые записки Ленингр. гос. унив.*, т. III, стр. 51—78).
122. Сборник задач по высшей математике. Часть I, 9-е испр. изд. (под редакц. Н. М. Гюнтера и Р. О. Кузьмина) (Гл. ред. т.-теор. лит., Л.—М., 272 стр.).
123. Sur les noyaux du type Fourier (*Известия Акад. Наук СССР*, сер. математ., № 3, стр. 315—354).
124. Sur quelques applications nouvelles de la théorie des fonctions de domaines à la théorie des équations intégrales. Seconde partie (*Матем. сборник*, т. II (XLIV), стр. 197—274, 387—463).

1938

125. Збірник задач в вищої математики. Часть I. Пер. з рос 9 вид. (Держ. н.-техн. вид., Харків, 244 стр.).
126. К теории интегралов Стильтьеса—Радона и интегральных уравнений (*Доклады Акад. Наук СССР.* т. XXI, стр. 219—223).
127. Сборник задач по высшей математике. Часть I, 10-е испр. изд. (Под редакц. Н. М. Гюнтера и Р. О. Кузьмина) (Гл. ред. т.-теор. лит., Л.—М., 272 стр.).
128. Сборник задач по высшей математике. Часть III, 2-е испр. изд. (Под редакц. Н. М. Гюнтера и Р. О. Кузьмина) (Гл. ред. т.-теор. лит., Л.—М., 339 стр.).

1939

129. К общей теории интегральных уравнений (*Доклады Акад. Наук СССР*, т. XXII, стр. 215—219).

1940

130. О постановке некоторых задач математической физики (*Ученые записки Ленингр. гос. унив.*, № 59, стр. 12—26).

1941

131. Замечание об интеграле Hellinger'а (*Доклады Акад. Наук СССР*, т. XXX, стр. 99—102).

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 5 (1941), 203—210 Série mathématique

Я. Л. ГЕРОНИМУС

О ХАРАКТЕРЕ РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ МОМЕНТОВ В СЛУЧАЕ ПРЕДЕЛЬНО-ПЕРИОДИЧЕСКОЙ АССОЦИИРОВАННОЙ ДРОБИ

(*Представлено академиком* **С. Н. Бернштейном**)

Рассматривается распределение точек роста функции, дающей решение степенной или тригонометрической проблемы моментов в случае, когда ассоциированная дробь является предельно-периодической.

1

Рассмотрим непрерывную дробь

$$\frac{\lambda_1 |}{| z - \alpha_1} - \frac{\lambda_2 |}{| z - \alpha_2} - \dots, \tag{1}$$

причем $\{\lambda_n\}_1^\infty > 0$ и $\{\alpha_n\}_1^\infty$ — вещественные последовательности чисел, для которых существуют конечные пределы

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = l_\nu > 0; \ \lim_{n\to\infty} \alpha_n = a_\nu; \ n \equiv \nu \,(\mathrm{mod}\, k) \quad (\nu = 1, 2, \dots, k). \tag{2}$$

На основании исследований Ван-Влека ([1]), Прингсхейма ([2]) и Саса ([3]) можно утверждать, что данная предельно-периодическая непрерывная дробь (1) сходится, за возможным исключением изолированного счетного множества точек, в той же области, что и периодическая дробь

$$\frac{l_1 |}{| z - a_1} - \frac{l_2 |}{| z - a_2} - \dots, \ l_n = l_\nu, \ a_n = a_\nu, \ n \equiv \nu \,(\mathrm{mod}\, k); \tag{3}$$

ее предельное значение является в этой области мероморфной функцией.

Обозначим через

$$\frac{\overline{R}_{i-1}(z)}{\overline{P}_i(z)} \qquad (i = 1, 2, 3, \dots) \tag{4}$$

подходящие дроби периодической непрерывной дроби (3). Пусть $z_1 < < z_2 < \dots < z_{2r}$ $(r \leq k)$ будут точки разветвления алгебраической функции

$$r(z) = \frac{\overline{P}_k(z) - \overline{R}_{k-2}(z) + \sqrt{\{\overline{P}_k(z) - \overline{R}_{k-2}(z)\}^2 - 4l}}{2}, \quad (l = l_1, l_2, \dots, l_k). \tag{5}$$

Обозначим через E множество, являющееся суммой конечного числа сегментов вещественной оси

$$E = \langle z_1, z_2 \rangle + \langle z_3, z_4 \rangle + \dots + \langle z_{2r-1}, z_{2r} \rangle, \tag{6}$$

через H — область, являющуюся дополнительным множеством к E, а через H_1 — пересечение H с вещественной осью. Пользуясь исследованиями Прингсхейма ([4]) и Перрона ([5]) о сходимости периодических непрерывных дробей, а также результатами нашей заметки ([6]), легко видеть, что непрерывная дробь (3), а следовательно и (1), сходится в любой области внутри H, за возможным исключением счетного множества точек, предельные точки которого принадлежат E.

Пользуясь указанными свойствами предельно-периодических непрерывных дробей, мы сможем доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. *Если в проблеме моментов Гамбургера непрерывная дробь* (1), *ассоциированная с интегралом*

$$\varphi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi(x)}{z - x}, \qquad Iz \neq 0, \tag{7}$$

является предельно-периодической дробью, т. е. обладает свойством (2), *то множество точек роста искомой неубывающей функции ограниченной вариации* $\psi(x)$ *ограничено и всюду плотно в* E; *вне* E *функция* $\psi(x)$ *имеет не более, чем счетное множество точек роста, предельные точки которого принадлежат множеству* E*.

Обозначим через E_1 множество точек роста функции $\psi(x)$ и положим

$$E_1 = E_2 + E_3, \quad E_2 \subset E, \quad E_3 \subset H_1, \quad E_3' \subset E.$$

Ограниченность множества E_1 вытекает из ограниченности последовательностей $\{\alpha_n\}_1^\infty$, $\{\lambda_n\}_1^\infty$.

Непрерывная дробь (1) сходится, за возможным исключением счетного множества точек, внутри области H, и ее предельное значение $\varphi(z)$ является в этой области мероморфной функцией, полюсы которой лежат в H_1. По известной формуле обращения Стильтьеса-Перрона находим, что полюсы функции $\varphi(z)$ являются точками разрыва функции $\psi(x)$. Этих точек счетное множество и предельные точки этого множества принадлежат множеству E.

Так как обе последовательности $\{\alpha_n\}_1^\infty$ и $\{\lambda_n\}_1^\infty$ вещественны и так как непрерывная дробь (1) сходится при $z \in H_1$, за возможным исключением счетного множества точек, то функция $\varphi(z)$ принимает в области H_1 вещественные значения. Отсюда по формуле Стильтьеса — Перрона находим, что функция $\psi(x)$ не имеет в H_1 иных точек роста, кроме упомянутых выше точек разрыва.

Покажем, что множество E_2 всюду плотно в E. Для этого найдем так называемый трансфинитный диаметр $d(E)$ множества E. Как

---

* При $k = 1$ получим результат О. Блюменталя ([14]) (мы, к сожалению, не смогли ознакомиться с этой работой).

показал Сегё [7], он равен константе Робена для области H. Нетрудно видеть, что функция Грина для области H такова:

$$G(x,y)=\frac{1}{k}\log\left|\frac{r(z)}{\sqrt{l}}\right|, \qquad z=x+iy, \tag{8}$$

причем в формуле (5) выбран тот знак корня, при котором

$$\lim_{z\to\infty}\frac{r(z)}{z^k}=1; \tag{8'}$$

таким образом находим константу Робена γ из соотношения

$$\log\gamma=\lim_{z\to\infty}\{\log|z|-G(x,y)\}=\frac{1}{k}\log\sqrt{l}, \tag{9}$$

откуда окончательно трансфинитный диаметр $d(E)$ равен

$$d(E)=\gamma=\sqrt[2k]{l}=\sqrt[2k]{l_1 l_2 \ldots l_k}. \tag{10}$$

Его можно найти еще и иначе: когда z пробегает множество E, то $y=\bar{P}_k(z)-\bar{R}_{k-2}(z)$ пробегает множество $e=<-2\sqrt{l},\ 2\sqrt{l}>$; по теореме Фекете [8] имеем $d(E)=\sqrt[k]{d(l)}$, т. е. $d(E)=\sqrt[2k]{l}$.

С другой стороны, построим систему полиномов $\{P_n(x)\}_0^\infty$, удовлетворяющих рекуррентному соотношению

$$P_n(x)=(x-\alpha_n)P_{n-1}(x)-\lambda_n P_{n-2}(x),\ (n=1,2,\ldots),\ P_{-1}=0,\ P_0=1; \tag{11}$$

как известно, они ортогональны на множестве E_1 относительно обложения $d\psi(x)$.

Пусть $\bar{E}_1$ будет замыканием множества E_1, т. е. $\bar{E}_1=E_2+E_1'$; обозначим через $T_n(x)=x^n+\ldots$ полином, наименее уклоняющийся от нуля на множестве $\bar{E}_1$, и через M_n — величину этого наименьшего уклонения. Мы имеем

$$h_n=\int_{E_1}P_n^2(x)\,d\psi(x)=\min\int_{E_1}(x^n+\ldots)^2\,d\psi(x)\leqslant h_0 M_n^2\ \ (n=1,2,\ldots), \tag{12}$$

т. е.

$$\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{n+1}\leqslant h_0 M_n^2. \tag{13}$$

Как показал Фекете [9], существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{M_n}=d(\bar{E}_1); \tag{14}$$

таким образом имеем при условиях (2)

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{h_n}=\sqrt[k]{l_1 l_2 \ldots l_k}\leqslant d^2(\bar{E}_1), \tag{15}$$

откуда вытекает неравенство

$$d(E)\leqslant d(\bar{E}_1)=d(\bar{E}_2+\bar{E}_3)=d(\bar{E}_2), \tag{16}$$

ибо, как показал Полья [10], у ограниченных замкнутых множеств, различающихся лишь на счетное множество точек, трансфинитные диа-

метры одинаковы. Так как $\bar{E}_2 \subset E$, то $d(\bar{E}_2) \leqslant d(E)$ и окончательно

$$d(\bar{E}_2) = d(E). \tag{17}$$

Легко видеть, что $\bar{E}_2$ всюду плотно в E; иначе, если бы существовал интервал $<\alpha, \beta> \subset E$, в котором не было бы точек роста функции $\psi(x)$, то мы имели бы неравенство $d(\bar{E}_2) < d(E)$; из того, что $\bar{E}_2$ всюду плотно в E, следует, что этим же свойством обладает E_2.

2

Докажем теорему, аналогичную 1, для случая тригонометрической проблемы моментов (ограничиваясь случаем $k=1$).

По заданной последовательности тригонометрических моментов $\{c_n\}_0^\infty$ построим последовательность $\{a_n\}_0^\infty$ по формуле ([11, 12])

$$a_n = (-1)^n \frac{|c_{i-k+1}|_{i,k=0}^n}{|c_{i-k}|_{i,k=0}^n}, \quad 0 < |a_n| < 1 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots); \tag{18}$$

предположим существование предела

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad 0 < |a| < 1; \tag{19}$$

обозначим через E замкнутую дугу $<\alpha, 2\pi - \alpha>$, где

$$e^{i\alpha} = 1 - 2|a|^2 + 2i|a|\sqrt{1-|a|^2}, \tag{20}$$

через H — область, являющуюся множеством, дополнительным к E, и через H_1 — открытую дугу $(-\alpha, \alpha)$.

ТЕОРЕМА 1′. *Если в тригонометрической проблеме моментов*

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{in\theta}\, d\sigma(\theta) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{21}$$

существует предел последовательности $\{a_n\}_0^\infty$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad (0 < |a| < 1), \tag{22}$$

то искомая неубывающая функция ограниченной вариации $\sigma(\theta)$ имеет в H_1 не более чем счетное множество точек роста, предельные точки которого принадлежат E; на множестве E точки роста функции $\sigma(\theta)$ расположены всюду плотно.

Обозначим снова через E_1 множество точек роста функции $\sigma(\theta)$; введем обозначение

$$E_1 = E_2 + E_3, \quad E_2 \subset E, \quad E_3 \subset H_1.$$

В ([12]) мы вывели формальное разложение в непрерывную дробь

$$-q_0(y) = -\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}\, d\sigma(\theta)}{e^{i\theta} - y} \sim \frac{a_0 c_0}{|\, y - a_0} - \frac{\frac{a_1}{a_0} y (1 - |a_0|^2)\,|}{|\; y + \frac{a_1}{a_0}} - \frac{\frac{a_2}{a_1} y (1 - |a_1|^2)\,|}{|\; y + \frac{a_2}{a_1}} - \ldots; \tag{23}$$

по Ван-Влеку [1] эта непрерывная дробь при условии (22) сходится (за возможным исключением изолированного счетного множества точек) в любой области внутри H, и ее предел $K(y)$ является в H мероморфной функцией; с другой стороны, функция $q_0(y)$ в области $|y|<1$ регулярна и разлагается в ряд

$$q_0(y)=c_0+\bar{c}_1 y+\bar{c}_2 y^2+\ldots \tag{24}$$

Непрерывная дробь (23) имеет знаменателями подходящих дробей полиномы $\{P_n(y)\}_1^{\infty}$, которые по ([12]) ортогональны на множестве E_1 относительно обложения $d\sigma(\theta)$, причем

$$a_n=-P_{n+1}(0)\neq 0 \quad (n=0,1,2,\ldots,);$$

поэтому любая ее подходящая дробь порядка n регулярна в некоторой окрестности точки $y=0$ и разлагается в ряд, который отличается от ряда (24) членами с y^n, y^{n+1} и т. д.; отсюда по Прингсхейму [2] следует, что функции $K(y)$ и $-q_0(y)$ совпадают в окрестности точки $y=0$, а следовательно, во всей области $|y|<1$; совпадают также их предельные значения при приближении y изнутри к окружности $|y|=1$.

Применяя формулу

$$\frac{\sigma(\theta+0)+\sigma(\theta-0)}{2}=\text{const}-\lim_{r\to 1-0} R\int_0^{\theta}\{2K(re^{i\theta})+c_0\}\,d\theta, \tag{25}$$

мы видим, что полюсы функции $K(y)$, лежащие на дуге H_1, являются точками разрыва функции $\sigma(\theta)$. Покажем, что иных точек роста на дуге H_1 функция $\sigma(\theta)$ не имеет. Действительно, мы имеем

$$2K(y)+c_0=2\,\frac{R_{n-1}(y)-k_n(y)\,R_{n-2}(y)}{P_n(y)-k_n(y)\,P_{n-1}(y)}+c_0, \tag{26}$$

где $\{R_{n-1}(y)\}_1^{\infty}$ — числители подходящих дробей непрерывной дроби (23), а

$$k_n(y)=\frac{\frac{a_n}{a_{n-1}}\,y\,(1-|a_{n-1}|^2)\big|}{\big|\; y+\frac{a_n}{a_{n-1}}}-\frac{\frac{a_{n+1}}{a_n}\,y\,(1-|a_n|^2)\big|}{\big|\; y+\frac{a_{n+1}}{a_n}}-\ldots; \tag{27}$$

при условии (22) имеем

$$\lim_{n\to\infty} k_n(y)=K_0(y), \tag{28}$$

где $K_0(y)$ является пределом периодической непрерывной дроби

$$K_0(y)=\frac{y\,(1-|a|^2)\,|}{|\;\; y+1}-\frac{y\,(1-|a|^2)\,|}{|\;\; y+1}-\ldots=\frac{y+1-\sqrt{(y-e^{i\alpha})(y-e^{-i\alpha})}}{2}. \tag{29}$$

Поэтому имеем

$$2K(y)+c_0=2\lim_{n\to\infty}\frac{R_{n-1}(y)-K_0(y)\,R_{n-2}(y)}{P_n(y)-K_0(y)\,P_{n-1}(y)}+c_0=$$
$$=2\lim_{n\to\infty}\frac{\Omega_n(y)-K_0(y)\,\Omega_{n-1}(y)}{P_n(y)-K_0(y)\,P_{n-1}(y)}, \tag{30}$$

где мы положили

$$\left.\begin{array}{l}\Omega_n(y)=c_0 P_n(y)+2R_{n-1}(y), \quad (n=0,1,2,\ldots); \\ \Omega_0=c_0, \quad \Omega_1(y)=c_0(y+a_0).\end{array}\right\} \tag{31}$$

Уравнение в конечных разностях

$$a_n x_{n+2}=(a_n y+a_{n+1})x_{n+1}-y a_{n+1}(1-|a_n|^2)x_n \quad (n=0,1,2,\ldots) \tag{32}$$

удовлетворяется при $x_n=P_n(y)$ и $x_n=R_{n-1}(y)$ ([12]); следовательно, оно удовлетворяется и при $x_n=\Omega_n(y)$; отсюда по ([12]) следуют формулы

$$\left.\begin{array}{l}P_n(y)=y P_{n-1}(y)-a_{n-1}P^*_{n-1}(y), \\ \Omega_n(y)=y\,\Omega_{n-1}(y)-a_{n-1}\Omega^*_{n-1}(y).\end{array} \quad (n=1,2,3,\ldots)\right\} \tag{33}$$

При этом получим

$$2K(y)+c_0=2\lim_{n\to\infty}\frac{[y-K_0(y)]\,\Omega_{n-1}(y)+a_{n-1}\Omega^*_{n-1}(y)}{[y-K_0(y)]\,P_{n-1}(y)-a_{n-1}P^*_{n-1}(y)}. \tag{34}$$

Полагая $y=e^{i\theta}$, $-\alpha<\theta<\alpha$, мы находим из (29)

$$e^{i\theta}-K_0(e^{i\theta})=\sin\frac{\alpha}{2}e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\lambda\right)}, \quad \sin\lambda=\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}, \tag{35}$$

где $-\frac{\pi}{2}<\lambda<\frac{\pi}{2}$; вводя обозначение

$$p_{n-1}=\arg\{P_{n-1}(e^{i\theta})\}, \ \omega_{n-1}=\arg\{\Omega_{n-1}(e^{i\theta})\}, \ \alpha_{n-1}=\arg a_{n-1},$$

находим при $-\alpha<\theta<\alpha$

$$2K(e^{i\theta})+c_0=i\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\Omega_{n-1}(e^{i\theta})}{P_{n-1}(e^{i\theta})}\right| \frac{\cos\frac{1}{2}\left[\left(n-\frac{3}{2}\right)\theta-2\omega_{n-1}+\alpha_{n-1}-\lambda\right]}{\sin\frac{1}{2}\left[\left(n-\frac{3}{2}\right)\theta-2p_{n-1}+\alpha_{n-1}-\lambda\right]}, \tag{36}$$

откуда вытекает, что функция $2K(e^{i\theta})+c_0$ принимает на дуге H_1 чисто мнимые значения, а следовательно, по (25) функция $\sigma(\theta)$ не имеет на дуге H_1 иных точек роста, кроме упомянутых выше точек разрыва.

Покажем, что множество E_2 всюду плотно в E. Для этого докажем, что $d(\bar{E}_2)=d(E)$. Мы имеем, с одной стороны,

$$d(\bar{E}_1)=d(\bar{E}_2+\bar{E}_3)=d(\bar{E}_2)\leqslant d(E); \tag{37}$$

с другой стороны,

$$h_n=\frac{1}{2\pi}\int_{E_1}|P_n(z)|^2\,d\sigma(\theta)=\min\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{E_1}|z_n+\ldots|^2\,d\sigma(\theta)\right\}\leqslant$$
$$\leqslant c_0 M_n^2, \quad z=e^{i\theta}, \tag{38}$$

где M_n — минимальное уклонение от нуля на $\bar{E}_1$ полинома степени n со старшим коэффициентом равным единице. Отсюда находим

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{h_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{h_{n+1}}{h_n}=1-|a|^2=\cos^2\frac{\alpha}{2}\leqslant\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{M_n^2}=d^2(\bar{E}_1),$$

ибо по ([12])

$$h_n = h_0 \prod_{\nu=0}^{n-1} (1 - |a_\nu|^2) \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{39}$$

Из этого следует, что

$$d(\bar{E}_1) \geqslant \cos\frac{\alpha}{2} = d(E),$$

ибо трансфинитный диаметр дуги с центральным углом φ равен $R \sin\frac{\varphi}{4}$. Таким образом окончательно

$$d(\bar{E}_1) = d(\bar{E}_2) = d(E). \tag{40}$$

Отсюда так же, как в теореме 1, заключаем, что множество $\bar{E}_2$, а следовательно и E_2, всюду плотно в E.

Институт математики и механики
Харьковского гос. университета

Поступило
16 I 1941

ЛИТЕРАТУРА

[1] Van Vleck E., On the convergence of algebraic continued fractions whose coefficients have limiting values, Trans. Amer. Math. Soc., 5 (1904), 253—62.

[2] Pringsheim A., Über Konvergenz und funktionentheoretischen Charakter gewisser limitär-periodischer Kettenbrüche, Sitz. math.-phys. Classe der k. b. Akad. der Wiss. zu München, 1910, Abh. 6, 1—52.

[3] Szász O., Über die Erhaltung der Konvergenz unendlicher Kettenbrüche bei independenter Veränderlichkeit aller ihrer Elemente, Journal für die reine und angew. Mathem., 147 (1917), 132—50.

[4] Pringsheim A., Über die Konvergenz periodischer Kettenbrüche, Sitz. math. phys. Classe der k. b. Akad. der Wiss. zu München, III (1900), 463—88.

[5] Perron O., Über die Konvergenz periodischer Kettenbrüche, ibid., III (1905), 495—503.

[6] Геронимус Я. Л., О некоторых уравнениях в конечных разностях и соответствующих системах ортогональных полиномов, Доклады Ак. Наук СССР, XXIX (1940), 534—6.

[7] Szegö G., Bemerkungen zu einer Arbeit von Herrn M. Fekete: Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten, Math. Zeitschr., 21 (1924), 203—8.

[8] Fekete M., Über den transfiniten Durchmesser ebener Punktmengen, ibid., 32 (1930), 215—21.

[9] Fekete M., Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten, ibid., 17 (1923), 228—49.

[10] Pòlya G., Über gewisse notwendige Determinantenkriterien für die Fortsetzbarkeit einer Potenzreihe, Math. Annalen, 99 (1928), 687—706.

[11] Геронимус Я. Л., Обобщенные ортогональные полиномы и формула Кристоффеля—Дарбу, Доклады Ак. Наук СССР, XXVI (1940), 843—6.

[12] Геронимус Я. Л., О некоторых свойствах обобщенных ортогональных полиномов, ibid., XXIX (1940), 5—8.

[13] Геронимус Я. Л., О некоторых свойствах обобщенных ортогональных полиномов, Матем. сборник 9 (1941), 121—135.

[14] Blumenthal O., Über die Entwickelung einer willkürlichen Funktion nach den Nennern des Kettenbruches für $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\varphi(\xi)\,d\xi}{z-\xi}$. Dissertation, Göttingen, 1898.

J. GERONIMUS. ON THE CHARACTER OF THE SOLUTION OF THE MOMENT-PROBLEM IN THE CASE OF THE PERIODIC IN THE LIMIT ASSOCIATED FRACTION

SUMMARY

THEOREM 1. *If the continued fraction*

$$\frac{\lambda_1 |}{|z-a_1} - \frac{\lambda_2 |}{|z-a_2} - \ldots, \; \{\lambda_n\}^{\infty} > 0,$$

associated with the integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi(x)}{z-x}, \qquad Iz \neq 0,$$

in the Hamburger moment-problem is periodic in the limit, i. e. if the limits

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = l_\nu > 0, \; \lim_{n\to\infty} \alpha_n = a_\nu, \quad n \equiv \nu \, (\mathrm{mod}\, k), \quad (\nu = 1, 2, \ldots, k)$$

exist, then the limited set of points of increase of the function $\psi(x)$ is everywhere dense on a certain point set E, beyond which $\psi(x)$ may have only a denumerable isolated set of points of increase; the set E is the sum of $r \leqslant k$ segments of the real axis

$$E = <z_1, z_2> + <z_3, z_4> + \ldots + <z_{2r-1}, z_{2r}>,$$

the points $\{z_i\}_1^{2r}$ being the branch-points of the function

$$\sqrt{\{\overline{P}_k(z) - \overline{R}_{k-2}(z)\}^2 - 4l_1 l_2 \ldots l_k},$$

where $\frac{\overline{R}_{i-1}(z)}{\overline{P}_i(z)}$ is the convergent of order i of the periodic continued fraction

$$\frac{l_1 |}{|z-a_1} - \frac{l_2 |}{|z-a_2} - \ldots, \; l_n = l_\nu, \quad a_n = a_\nu, \quad n \equiv \nu \, (\mathrm{mod}\, k).$$

Consider now the trigonometric moment-problem, i. e. the problem of finding the non-decreasing function $\sigma(\theta)$ of limited variation with infinitely many points of increase from the conditions

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in\theta} d\sigma(\theta), \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

the moments $\{c_n\}_0^{\infty}$ being given.

THEOREM 1′. *If there exists the limit*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \; 0 < |a| < 1, \quad a_n = (-1)^n \frac{\left| c_{i-k+1} \right|_{i,k=0}^{n}}{\left| i-k \right|_{i,k=0}^{n}}, \; 0 < |a_n| < 1,$$

then the points of increase of $\sigma(\theta)$ lie everywhere dense on the arc $<\alpha, 2\pi - \alpha>$,

$$e^{i\alpha} = 1 - 2|a|^2 + 2i|a|\sqrt{1-|a|^2},$$

beyond which $\sigma(\theta)$ may have only a denumerable isolated set of points of increase.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 5 (1941), 211—216 Série mathématique

Н. Б. ВЕДЕНИСОВ

О РАЗМЕРНОСТИ В СМЫСЛЕ Е. ČECH'а

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

Доказывается, что для čech'овской размерности справедливо предложение: если пространство R нормально, размерность его бикомпактного расширения βR (H. Wallman, E. Čech) равна размерности R. Приводятся некоторые следствия этой теоремы.

1

Čech'овская размерность (1) топологического пространства R, $\operatorname{Dim} R$, индуктивно определяется следующим образом: $\operatorname{Dim} R = -1$ тогда и только тогда, когда R пусто; $\operatorname{Dim} R = n$ $(n > -1)$, если 1) для любого замкнутого множества $F \subset R$ и любой его окрестности $U(F) = U$ найдется такая окрестность $V(F) = V \subset U$, что $\operatorname{Dim}(\bar{V} - V) \leqslant n - 1$; 2) существует замкнутое множество $F^* \subset R$, имеющее такую окрестность $U(F^*) = U$, что для любой окрестности $V(F^*) = V \subset U$ имеет место неравенство $\operatorname{Dim}(\bar{V} - V) \geqslant n - 1$.

Легко видеть, что справедлива теорема:

I. (E. Čech). *Если F замкнуто в T_1-пространстве R, то* $\operatorname{Dim} F \leqslant \operatorname{Dim} R$.

Классическое определение урысоновско-менгеровской размерности R, $\dim R$, получается, если в приведенном выше определении слова «замкнутое множество пространства R» заменить словами «точка пространства R».

Легко доказывается предложение *

II. *Для любого T_1-пространства R имеет место неравенство* $\dim R \leqslant \operatorname{Dim} R$.

Брауэровской размерностью R, $\underline{\dim}\, R$, называется наименьшее из таких целых чисел m, что во всякое открытое ** покрытие R можно вписать *** открытое покрытие кратности **** $\leqslant m + 1$. H. Wallman'ом (3)

* В случае пространств, регулярных со счетным базисом (или, иначе, метризуемых со счетным всюду плотным множеством), имеет место равенство $\operatorname{Dim} R = \dim R$ (Урысон, Тумаркин). Мною это равенство доказано в нескольких более общих предположениях (2).

** Состоящее из открытых множеств.

*** Покрытие $\omega^* = \{0_1^*, \ldots, 0_s^*\}$ вписано в покрытие $\omega = \{0_1, \ldots, 0_t\}$, если каждое из множеств ω^* содержится в одном из множеств ω.

**** Кратностью системы множеств называется наибольшее из таких целых чисел m, что в системе имеется n множеств с непустым пересечением.

доказано, что нормальное пространство R имеет бикомпактное расширение* ωR, брауэровская размерность которого равна брауэровской размерности R.

Легко видеть, что ωR гомеоморфно известному čech'овскому ([4]) расширению** βR. В самом деле, Čech'ом [см. ([4]), стр. 833] показано, что бикомпактное расширение bR нормального R, обладающее свойством

а) если F_1, F_2 суть замкнутые непересекающиеся множества R, то*** $\bar{F}_1^b \bar{F}_2^b = 0$,

гомеоморфно расширению βR. Wallman'ом же показано [см. ([3]), лемма 9], что ωR обладает этим свойством. Таким образом имеем теорему:

III. *Если R нормально, то* $\underline{\dim}\, R = \underline{\dim}\, \beta R$.

Ниже будет доказано предложение, аналогичное III.

IV. *Для нормального R справедливо равенство* $\operatorname{Dim} R = \operatorname{Dim} \beta R$.

На вполне регулярные пространства теоремы III и IV не обобщаются. Действительно, нетрудно видеть, что топологическое произведение S пространства трансфинитных чисел $\leqslant \omega_1 = \Omega$ и пространства трансфинитных чисел $\leqslant \omega_2$ есть нульмерное как в čech'овском, так и в брауэровском смысле пространство****.

Обозначим через $\dot{S}$ пространство, полученное из S удалением точки (ω_1, ω_2). Легко показать, что $\dot{S}$ не нульмерно в čech'овском (и брауэровском) смысле (хотя и нульмерно в смысле Урысона—Менгера) и что $\beta \dot{S} = S$. Таким образом для вполне регулярного (не нормального) R могут иметь место неравенства

$$\operatorname{Dim} R > \operatorname{Dim} \beta R; \quad \underline{\dim}\, R > \underline{\dim}\, \beta R.$$

Вопрос о том, возможны ли в этом случае неравенства $\operatorname{Dim} R < \operatorname{Dim} \beta R$, $\underline{\dim}\, R < \underline{\dim}\, \beta R$, остается открытым.

П. С. Александровым ([6]) доказана теорема

V. *Если R бикомпактно, то* $\dim R \geqslant \underline{\dim}\, R$.

Пусть R — нормальное пространство. Тогда по IV $\operatorname{Dim} R = \operatorname{Dim} \beta R$, а в силу II $\operatorname{Dim} R = \operatorname{Dim} \beta R \geqslant \dim \beta R$; но по V $\dim \beta R \geqslant \underline{\dim}\, \beta R$, следовательно в силу III $\dim \beta R \geqslant \underline{\dim}\, R$. Но тогда и подавно $\operatorname{Dim} R \geqslant \underline{\dim}\, R$. Мы получаем теорему

VI. *Для нормального R справедливо неравенство* $\operatorname{Dim} R \geqslant \underline{\dim}\, R$.

---

* Пространство bR есть расширение пространства R, если в bR существует плотное подмножество, гомеоморфное R. Пространство R часто идентифицируют с его образом в bR.

** Гомеоморфизм пространств ωR и βR отмечен П. С. Александровым ([5]), показавшим, что для нормального R пространства ωR и βR гомеоморфны построенному им расширению αR.

*** Для $A \subset R$ под $\bar{A}^b$ мы понимаем замыкание A в расширении bR; $\bar{A}$ обозначает замыкание A в R.

**** Вообще класс пространств нульмерных в смысле Čech'а совпадает с классом пространств, нульмерных в смысле Брауэра [см. ([2]), теорема IV].

VI представляет обобщение на случай нормальных пространств теоремы, доказанной Čech'ом для совершенно нормальных пространств ([1]). Если R — регулярное со счетной базой пространство, то, как известно, имеют место равенства $\mathrm{Dim}\, R = \dim R = \underline{\dim}\, R$. Это обстоятельство и приведенные выше теоремы приводят к такому следствию:

VII. *Для расширения* βR *регулярного со счетной базой* (метризуемого со счетным плотным множеством) *пространства* R *čech'овская, урысоновско-менгеровская и брауэровская размерности совпадают* (и равны размерности R).

Для построения теории размерности нормальных (в частности, бикомпактных) пространств очень важно выяснить, имеет ли место для урысоновско-менгеровской размерности теорема, аналогичная теоремам III и IV.

2

Доказательству теоремы IV уместно предпослать следующие замечания. Открытое в пространстве X множество G, для которого $X - \bar{G} \neq 0$, назовем **канонческим множеством*** пространства X, если $\bar{G} - G \subset \overline{X - \bar{G}}$, т. е. если все точки границы G предельны для множества $X - \bar{G}$. Легко проверить справедливость следующих замечаний:

b) Пусть U есть такое открытое в X множество, что $X - \bar{U}$ не пусто. Существует такое каноническое множество G пространства X, что $U \subset G \subset \bar{U}$.

c) Если G_1 есть каноническое множество пространства X, то $G_2 = X - \bar{G}_1$ также есть каноническое множество пространства X. При этом $\bar{G}_1 - G_1 = \bar{G}_2 - G_2$.

d) Пусть $X \subset Y$, $\bar{X} = Y$. Тогда каноническое множество G пространства X есть пересечение X с некоторым каноническим множеством Γ пространства Y.

e) Пусть опять $X \subset Y$, $\bar{X} = Y$ и пусть $G_1 = \Gamma_1 X$, где G_1 и Γ_1 суть канонические множества пространств X и Y. Тогда $G_2 = X - \bar{G}_1 = \Gamma_2 X$, где $\Gamma_2 = Y - \bar{\Gamma}_1^Y$. При этом в силу c) G_2, Γ_2 суть канонические множества пространств X и Y.

Напомним еще найденное Čech'ом свойство βR [см. ([4]), стр. 834].

f) Если F — замкнутое множество нормального пространства R, то $\bar{F}^\beta = \beta F$.

С помощью свойства f) мы докажем лемму:

Пусть R нормально, $G_1 = \Gamma_1 R$, где G_1 и Γ_1 суть канонические множества пространств R и βR. При этих условиях $\beta(\bar{G}_1 - G_1) = \bar{\Gamma}_1^\beta - \Gamma_1$.

В самом деле, согласно f) достаточно доказать, что

$$\overline{(\bar{G}_1 - G_1)}^\beta = \bar{\Gamma}_1^\beta - \Gamma_1.$$

В силу того что $G_1 = \Gamma_1 R$, имеем $\bar{G}_1 - G_1 \subset \bar{\Gamma}_1^\beta - \Gamma_1$, следовательно

* Этот термин и некоторые из замечаний b) — e) принадлежат П. С. Александрову [см. ([5]), стр. 410].

$\overline{(\bar{G}_1 - G_1)}^\beta \subset \bar{\Gamma}_1^\beta - \Gamma_1$; таким образом надо только доказать, что множество $A = \bar{\Gamma}_1^\beta - \Gamma_1 - \overline{(\bar{G}_1 - G_1)}^\beta$ пусто. Полагая $G_2 = R - \bar{G}_1$, $\Gamma_2 = \beta R - \bar{\Gamma}_1^\beta$, мы по замечаниям c) и d) имеем: $\bar{\Gamma}_1^\beta - \Gamma_1 = \bar{\Gamma}_2^\beta - \Gamma_2$, $\bar{G}_2 - G_2 = \bar{G}_1 - G_1$, поэтому

$$A = \bar{\Gamma}_1^\beta - \Gamma_1 - \overline{(\bar{G}_1 - G_1)}^\beta = \bar{\Gamma}_2^\beta - \Gamma_2 - \overline{(\bar{G}_2 - G_2)}^\beta. \tag{1}$$

Рассуждая от противного, допустим, что $x \in A$. Тогда существует такая окрестность Γ_x точки x в βR, что $\bar{\Gamma}_x^\beta \overline{(\bar{G}_i - G_i)}^\beta = 0$ $(i = 1, 2)$. Имеем следовательно равенство $\bar{\Gamma}_x^\beta R = \bar{\Gamma}_x^\beta G_1 + \bar{\Gamma}_x^\beta G_2$, где множества, стоящие справа, открыты в $\bar{\Gamma}_x^\beta R$ и не пересекаются; значит, они замкнуты в $\bar{\Gamma}_x^\beta R$, а следовательно и в R. Обозначив их F_1, F_2, мы по свойству a) получаем

$$\bar{F}_1^\beta \bar{F}_2^\beta = 0. \tag{2}$$

Покажем, что равенство (2) противоречиво. Действительно, в силу того что $x \in \bar{\Gamma}_i^\beta$ $(i = 1, 2)$, для любой окрестности Γ_x^* точки x в βR имеем $(\Gamma_x \Gamma_x^*) \Gamma_i \neq 0$; следовательно, в силу того что R плотно в βR, множество $(\Gamma_x \Gamma_x^*) \Gamma_i R = (\Gamma_x \Gamma_x^*) G_i$ не пусто; но тогда и подавно не пусто множество $\Gamma_x^* F_i \supset (\Gamma_x \Gamma_x^*) G_i$. Так как Γ_x^* — произвольная окрестность точки x в βR, то $x \in \bar{F}_i^\beta$ $(i = 1, 2)$, что нелепо.

Докажем теперь справедливость такого утверждения:

IV$_1$. *Если* R *нормально,* $\operatorname{Dim} R \leqslant n$, *то* $\operatorname{Dim} \beta R \leqslant n$.

Так как для пустого R расширение βR также пусто, IV$_1$ верно для $n = -1$. Допустив справедливость IV$_1$ для $n - 1$, докажем, что оно выполнено для n.

Пусть R есть нормальное пространство čech'овской размерности $\leqslant n$. Φ замкнуто в βR, Γ — его окрестность в пространстве βR. Наше предложение будет доказано, если мы убедимся в существовании такой окрестности Γ_1 множества Φ в βR, что $\Gamma_1 \subset \Gamma$, $\operatorname{Dim}(\bar{\Gamma}_1^\beta - \Gamma_1) \leqslant n - 1$.

Выберем внутри Γ такую окрестность Γ_0 множества Φ, что $\bar{\Gamma}_0^\beta \subset \Gamma$, и положим $F = \bar{\Gamma}_0^\beta R$. Множество F замкнуто в R и, в силу того что $\operatorname{Dim} R = n$, существует такая окрестность U множества F в пространстве R, что $F \subset U \subset \bar{U} \subset \Gamma R$, $\operatorname{Dim}(\bar{U} - U) \leqslant n - 1$. По замечанию b) найдется такое каноническое множество G_1 пространства R, что $U \subset G_1 \subset \bar{G}_1 = \bar{U} \subset \Gamma$. Множество $\bar{G}_1 - G_1$ есть замкнутое подмножество $\bar{U} - U$, следовательно по I $\operatorname{Dim}(\bar{G}_1 - G_1) \leqslant n - 1$. Отсюда по индуктивному допущению имеем $\operatorname{Dim} \beta(\bar{G}_1 - G_1) \leqslant n - 1$. Обозначив Γ_1 такое каноническое множество пространства βR, что $G_1 = \Gamma_1 R$, имеем по нашей лемме $\beta(\bar{G}_1 - G_1) = \bar{\Gamma}_1^\beta - \Gamma_1$; следовательно $\operatorname{Dim}(\bar{\Gamma}_1^\beta - \Gamma_1) \leqslant n - 1$.

Остается показать, что Γ_1 есть окрестность Φ, содержащаяся в Γ, т. е. проверить включения $\Phi \subset \Gamma_1$, $\Gamma_1 \subset \Gamma$. Второе из них получается так: из того, что R плотно в βR, следует равенство $\bar{\Gamma}_1^\beta = \bar{G}_1^\beta$, но $\bar{G}_1 (\beta R - \Gamma) = 0$, следовательно по a) $\bar{G}_1^\beta (\beta R - \Gamma) = 0$, $\bar{G}_1^\beta \subset \Gamma$. Первое будет установлено, если будет доказано, что $\bar{\Gamma}_0^\beta \subset \Gamma_1$. Но $\bar{\Gamma}_0^\beta = \bar{F}^\beta$,

а так как $F(\beta R - \Gamma_1) = 0$, то $\overline{F}^\beta(\beta R - \Gamma_1) = 0$. Предложение IV_1 доказано.

Доказательство теоремы IV будет доведено до конца, если будет доказано предложение

IV_2. *Пусть* R *нормально и* $\text{Dim}\ \beta R \leqslant n$; *тогда* $\text{Dim}\ R \leqslant n$.

Очевидно IV_2 справедливо, если $\text{Dim}\ \beta R = -1$. Допустив справедливость IV_2 для всех нормальных пространств R таких, что $\text{Dim}\ \beta R \leqslant n-1$, покажем, что предложение справедливо и тогда, когда $\text{Dim}\ \beta R = n$. Пусть, в самом деле, F_1 замкнуто в R и пусть V есть окрестность F_1 в пространстве R. Надо показать, что существует окрестность G множества F_1 такая, что $F_1 \subset G \subset U$, $\text{Dim}\ (\overline{G} - G) \leqslant n-1$.

Положим $F_2 = R - U$. Тогда по свойству a) имеем $\overline{F}_1^\beta \overline{F}_2^\beta = 0$, откуда следует, что $\Gamma_2 = \beta R - \overline{F}_2^\beta$ есть окрестность множества $\overline{F}_1^\beta$ в пространстве βR. Так как $\text{Dim}\ \beta R \leqslant n$, то найдется такое множество Γ_1, открытое в βR, что $\overline{F}_1^\beta \subset \Gamma_1 \subset \overline{\Gamma}_1^\beta \subset \Gamma$, $\text{Dim}\ (\overline{\Gamma}_1^\beta - \Gamma_1) \leqslant n-1$.

Положив $\Gamma_1 R = U_1$, найдем по замечанию b) такое каноническое множество G пространства R, что $U_1 \subset G \subset \overline{G} \subset \overline{U}_1$. По замечанию d) найдется такое каноническое множество Γ пространства βR, что $G = \Gamma R$. Легко видеть, что $\overline{\Gamma}^\beta = \overline{\Gamma}_1^\beta$, $\Gamma_1 \subset \Gamma$, а потому $\overline{\Gamma}_1^\beta - \Gamma_1 \supset \overline{\Gamma}^\beta - \Gamma$; следовательно по I имеем $\text{Dim}\,(\overline{\Gamma}^\beta - \Gamma) \leqslant \text{Dim}\,(\overline{\Gamma}_1^\beta - \Gamma_1) \leqslant n-1$.

По приведенной выше лемме $\beta(\overline{G} - G) = \overline{\Gamma}^\beta - \Gamma$, и следовательно по индуктивному допущению $\text{Dim}\ (\overline{G} - G) \leqslant n-1$. Так как $F_1 \subset \Gamma_1 R = U_1 \subset G \subset U$, то G есть окрестность F_1, существование которой надо было установить, что и требовалось доказать.

Математический институт
Моск. гос. университета им. М. В. Ломоносова

Поступило
5 II 1941

ЛИТЕРАТУРА

[1] Čech E., Bull. intern. de l'Acad. des Sc. de Bohême, 1932, стр. 1—18.
[2] Веденисов Н. Б., Замечания о размерности топологических пространств, Ученые зап. Моск. гос. унив., матем., XXX, кн. 3 (1939), 131—140.
[3] Wallman H., Lattices and topological spaces, Ann. of Mathem., 39 (1938), 112—126.
[4] Čech E., On bicompact spaces, Ann. of Mathem., 38 (1937), 823—844.
[5] Александров П. С., О бикомпактных расширениях топологических пространств, Матем. сборн., 47 (1939), 403—420.
[6] Александров П. С., Теорема сложения в теории размерности бикомпактных пространств, Сообщения Ак. Наук Груз. ССР, II (1941), № 1—2, 1—6.

N. VEDENISSOFF. SUR LA DIMENSION AU SENS DE E. ČECH

RÉSUMÉ

Nous désignons par le symbole Dim R la dimension d'un espace topologique R, définie selon E. Čech ([1]) par les conditions suivantes: 1) $\text{Dim}\ R = -1$ signifie que R est vide; 2) on pose $\text{Dim}\ R \leqslant n$ $(n > -1)$ si, F étant un ensemble fermé quelconque de l'espace R et $U = U(F)$ un voisinage arbitraire de F, on peut trouver un voisinage V de F tel

que $V \subset U$, $\mathrm{Dim}(\bar{V}-V) \leqslant n-1$; 3) on pose $\mathrm{Dim}\ R \geqslant n$ s'il existe un ensemble fermé F^* et un voisinage U^* de F tels que pour tout voisinage V^* de F^* contenu dans U^* on a $\mathrm{Dim}(V^*-V) \geqslant n-1$.

En remplaçant dans cette définition les mots «ensemble fermé dans R» par les mots «point x de R» on obtient la définition de la dimension d'Urysohn—Menger. Cette dernière est désignée par le symbole $\dim R$.

Soit $\underline{\dim}\ R$ la dimension brouwerienne, qui est par définition le plus petit des entiers m tels, que dans tout recouvrement ouvert fini de R on peut inscrire un recouvrement ouvert fini d'ordre non supérieur à $m+1$.

On appelle extension bicompacte d'un espace complètement régulier R tout espace bicompact bR qui contient R comme un sous-ensemble dense.

Parmi les extensions bicompactes d'un espace donné R l'extension βR construite par E. Čech ([4]) occupe une place particulière, grâce à des liens étroits entre la topologie de R et celle de βR. L'extension βR d'un espace normal R étant homéomorphe à l'extension ωR de H. Wallman ([3]), un des théorèmes de H. Wallman peut être formulé ainsi: si l'espace R est normal on a $\underline{\dim}\ R = \underline{\dim}\ \beta R$. Le théorème suivant est le résultat principal de la note présente:

L'espace R étant normal, on a $\mathrm{Dim}\ R = \mathrm{Dim}\ \beta R$.

Ce théorème n'a pas lieu pour les espaces complètement réguliers non normaux; il existe des espaces complètement réguliers R tels que $\mathrm{Dim}\ R > \mathrm{Dim}\ \beta R$. Fxemple: βR est le produit topologique des espaces des nombres transfinis respectivement non supérieurs à ω_1 et à ω_2, R—l'espace qu'on obtient de βR en omettant le point (ω_1, ω_2). Dans ce cas on a $\mathrm{Dim}\ R > 0$, $\mathrm{Dim}\ \beta R = 0$.

Évidemment pour tout espace R dans lequel les points sont des ensembles fermés, on a $\mathrm{Dim}\ R \geqslant \dim R$. Outre cette inégalité évidente on connait les relations suivantes entre les trois dimensions $\mathrm{Dim}\ R$, $\dim R$, $\underline{\dim}$ R. Pour un espace distancié séparable R on a $\mathrm{Dim}\ R = \dim R = \underline{\dim}\ R$ (j'ai démontré l'égalité $\mathrm{Dim}\ R = \dim R$ pour une classe d'espace un peu plus vaste, à savoir pour les espaces réguliers, jouissant des propriétés: a) tout ensemble fermé est un G^δ; b) de tout recouvrement ouvert de l'espace on peut extraire un recouvrement au plus dénombrable). Pour un espace bicompact on a $\dim R \geqslant \underline{\dim}\ R$ ([6]).

En s'appuyant sur le théorème précédemment signalé on peut ajouter à ces relations le théorème: *pour un espace normal on a* $\mathrm{Dim}\ R \geqslant \underline{\dim}\ R$. Cette dernière inégalité a été demontrée par E. Čech ([1]) pour le cas particulier des espaces parfaitement normaux.

Signalons enfin le corollaire suivant: pour un espace R tel que $\mathrm{Dim}\ R = \dim R = \underline{\dim}\ R$ (en particulier pour R distancié séparable) on a $\mathrm{Dim}\ \beta R = \dim \beta R = \underline{\dim}\ \beta R = \dim R$.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 5 (1941), 217—224 Série mathématique

П. С. АЛЕКСАНДРОВ и И. В. ПРОСКУРЯКОВ

О ПРИВОДИМЫХ МНОЖЕСТВАХ

В работе дается инвариантная характеристика и инвариантная трансфинитная классификация широкого класса подмножеств локально бикомпактных хаусдорфовых пространств, совпадающих в метрическом случае с множествами, являющимися одновременно множествами F_σ и G_δ.

1. *H*-вычеты и *H*-приводимые множества

Пусть A есть множество, лежащее в топологическом пространстве R.

Первым вычетом множества A в смысле Хаусдорфа или первым H-вычетом множества A называется множество

$$\text{res}\, A = (\overline{\overline{A} - A}) - (\overline{A} - A).$$

Вообще H-вычеты A_α множества A определяются индуктивно для всех трансфинитных чисел α следующим образом *:

$A_0 = A$. Пусть множество A_β уже определено для любого $\beta < \alpha$. Если α — число первого рода, то $A_\alpha = \text{res}\, A_{\alpha-1}$; если α — число второго рода, то $A_\alpha = \prod\limits_{\beta<\alpha} A_\beta$.

Легко установить соотношение

$$\text{res}\, A = (\overline{\overline{A} - A}) - (\overline{A} - A) = A \cdot (\overline{\overline{A} - A}),$$

из которого видно, что $\text{res}\, A \subset A$ и $\text{res}\, A$ замкнуто в A. Поэтому вообще, если $\alpha < \beta$, то $A_\beta \subset A_\alpha$ и A_β замкнуто в A_α. Таким образом

$$A = A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_\omega \supset A_{\omega+1} \supset \ldots$$

Определение 1. Множество A пространства R называется приводимым по Хаусдорфу ([1]) или H-приводимым, если существует порядковое число α, для которого $A_\alpha = 0$; при этом множество A называется αH-приводимым, если α есть наименьшее число, обладающее этим свойством.

Хаусдорф показывает **, что в случае пространства R со счетной базой каждое приводимое множество αH-приводимо при некотором $\alpha < \Omega$,

* См. Hausdorff ([1]), S. 168.
** См. ([1]), S. 168—173.

где Ω — первое число мощности $\aleph_1$. Таким образом всех классов H-приводимых множеств пространства R не более $\aleph_1$. При этом все эти классы для весьма широких типов топологических пространств (в частности, для всех несчетных компактов) оказываются непустыми: так, уже среди счетных разрозненных (т. е. не имеющих непустого плотного в себе подмножества) множеств отрезка $[0, 1]$ существуют αH-приводимые множества для любого $\alpha < \Omega$. Таким образом классификация H-приводимых множеств на αH-приводимые не является бессодержательной. Однако эта классификация, как и понятие вычета данного множества, не является топологически инвариантным, ибо зависит от содержащего множество A пространства. Так, если множество A рассматривать как пространство, то оно всегда приводимо, ибо уже $A_1 = \text{res}\, A = 0$. Если же рассмотреть множество A пространства R, плотное в R вместе со своим дополнением $R - A$, то $A_1 = \text{res}\, A = A$; следовательно $A_\alpha = A$ для любого α, и A неприводимо. Более того, два гомеоморфных множества одного и того же пространства могут принадлежать к разным классам классификации Хаусдорфа, как это видно из такого простого примера.

Пусть пространство R состоит из отрезка $[0, 1]$ числовой прямой и всех точек вида

$$b_{k,l} = 1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+l}} \quad (k, l = 1, 2, \ldots).$$

Множество B точек $b_{k,l}$ и $b = 1$ гомеоморфно множеству A точек

$$a_{k,l} = \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+l}} \quad (k, l = 1, 2, \ldots),$$

и $a = 0$; и в то же время $\text{res}\, B = 0$, $\text{res}\, A = \{0\} \neq 0$, т. е. B принадлежит к первому, а A ко второму классу H-приводимых множеств пространства R.

Возникает вопрос, существуют ли пространства такого типа, что классы H-приводимых множеств в этих пространствах обладают топологической инвариантностью, т. е. два гомеоморфных множества одного и того же или двух разных пространств данного типа всегда принадлежат к одному и тому же классу H-приводимых множеств или же одновременно неприводимы. Ниже будет показано (см. теорему III), что это имеет место в двух следующих случаях:

(a) R есть локально бикомпактное хаусдорфово пространство,

(b) R есть локально компактное хаусдорфово пространство с первой аксиомой счетности.

Для удобства изложения сформулируем следующую лемму.

ЛЕММА. *Пространство R типа* (a) *или* (b) *регулярно.*

В самом деле, пространство R можно дополнить одной точкой ξ до бикомпактного (соответственно компактного) хаусдорфова пространства $R + \xi$, обладающего в случае (b) счетной определяющей системой

окрестностей в каждой точке * $x \neq \xi$. В случае (a) пространство $R+\xi$ нормально, следовательно регулярно, а в случае (b) оно регулярно в каждой точке ** $x \neq \xi$. Следовательно и пространство R регулярно.

ТЕОРЕМА I. *Для того чтобы множество A пространства R, удовлетворяющего условию* (a) *(соответственно* (b)*), было бикомпактно (соответственно компактно) в точке $x \in A$, необходимо и достаточно, чтобы $x \in A - \operatorname{res} A$.*

Ввиду сходства доказательств в обоих случаях рассмотрим лишь случай (b).

Доказательство необходимости. Пусть A компактно в точке x. Существует окрестность $V(x) \subset A$ точки x относительно A, замыкание которой относительно A, т. е. множество $A \cdot \overline{V}(x)$ компактно. Это множество замкнуто, так как иначе оно имело бы предельную точку, ему не принадлежащую, и содержало бы сходящуюся к ней последовательность точек, что противоречит его компактности ***. Поэтому из

$$V(x) \subset A \cdot \overline{V}(x)$$

следует

$$\overline{V}(x) \subset A \cdot \overline{V}(x) \subset A.$$

Пусть $U(x)$ есть открытое множество, для которого $V(x) = A \cdot U(x)$. Имеем

$$\overline{A} \cdot U(x) \subset \overline{A \cdot U(x)} = \overline{V}(x) \subset A,$$

откуда $U(x) \cdot (\overline{A} - A) = 0$ и следовательно $x \in R - \overline{(\overline{A} - A)}$. Так как $x \in A$, то

$$x \in A \cdot [R - \overline{(\overline{A} - A)}] = A - A \cdot \overline{(\overline{A} - A)} = A - \operatorname{res} A.$$

Доказательство достаточности. Пусть $x \in A - \operatorname{res} A$. Тогда

$$x \in A - A \cdot \overline{(\overline{A} - A)} \subset R - \overline{(\overline{A} - A)}.$$

По нашей лемме R регулярно. Существует следовательно окрестность $U(x)$ точки x, для которой $\overline{U}(x)$ компактно и $\overline{U}(x) \cdot \overline{(\overline{A} - A)} = 0$. Поэтому

$$\overline{A} \cdot \overline{U}(x) = A \cdot \overline{U}(x) + (\overline{A} - A) \cdot \overline{U}(x) = A \cdot \overline{U}(x).$$

Следовательно множество $A \cdot \overline{U}(x)$ замкнуто. Положим $V(x) = A \cdot U(x)$. Так как $V(x) \subset A \cdot \overline{U}(x)$, то $\overline{V}(x) \subset A \cdot \overline{U}(x) \subset A$, откуда

$$A \cdot \overline{V}(x) = V(x) \subset \overline{U}(x).$$

---

* P. Alexandroff et P. Urysohn, (2) p. 68, 70.

** Ibid., p. 26, 28.

*** В случае (a) в соответствующем месте доказательства применяется теорема о том, что бикомпактное хаусдорфово пространство замкнуто во всяком содержащем его хаусдорфовом пространстве.

Таким образом $V(x)$ есть окрестность точки x относительно A, замыкание которой относительно A, т. е. $A \cdot \overline{V}(x)$, как замкнутое подмножество компактного множества $\overline{U}(x)$ компактно. A компактно в точке x.

Из теоремы I непосредственно вытекает

Следствие. *Множество A пространства R, удовлетворяющего условию* (a) (*соответственно* (b)), *локально бикомпактно* (*соответственно локально компактно*) *тогда и только тогда, когда* $\operatorname{res} A = 0$.

Все рассуждения данного параграфа остаются справедливыми, если под R понимать, как и выше, топологическое пространство, удовлетворяющее условию (a) (и говорить о точках локальной бикомпактности) или условию (b) (и тогда говорить о точках локальной компактности). Ввиду полной аналогии обоих случаев мы ограничимся в дальнейшем лишь случаем (a).

2. Вычеты и приводимость (инвариантные определения)

Пусть A есть множество произвольного топологического пространства R. Определим вычеты A^α множества A следующим образом. Положим $A^0 = A$. Пусть вычеты A^β уже определены для всех $\beta < \alpha$. Если α — число первого рода, то пусть A^α есть множество точек из $A^{\alpha-1}$, в которых $A^{\alpha-1}$ не бикомпактно. Если α — число второго рода, то пусть

$$A^\alpha = \prod_{\beta<\alpha} A^\beta.$$

По индукции множества A^α определены для всех трансфинитных чисел α, причем легко видеть, что если $\alpha < \beta$, то $A^\beta \subset A^\alpha$ и A^β замкнуто в A^α.

Определение 2. Множество A называется приводимым, если существует порядковое число α, для которого $A^\alpha = 0$; при этом A называется приводимым класса α или α-приводимым, если α есть наименьшее число, обладающее этим свойством.

Очевидно понятие вычета множества A, а потому также понятие приводимого множества и его класса топологически инвариантны. Отсюда, сопоставляя определения 1 и 2 с теоремой I, мы легко получим топологическую инвариантность понятия H-приводимых и αH-приводимых множеств в случае пространства R типа (a). А именно, справедлива

ТЕОРЕМА II. *Совокупность всех H-приводимых множеств хаусдорфова бикомпактного пространства R совпадает с совокупностью всех приводимых множеств этого пространства, причем совокупность αH-приводимых множеств совпадает с совокупностью α-приводимых множеств для любого порядкового числа α.*

В самом деле, $A_0 = A^0 = A$. Пусть для всех $\beta < \alpha$ доказано, что $A_\beta = A^\beta$. Если α — число первого рода, то по теореме I имеем

$$A_\alpha = \operatorname{res} A_{\alpha-1} = \operatorname{res} A^{\alpha-1} = A^\alpha.$$

Если α — число второго рода, то

$$A_\alpha = \prod_{\beta<\alpha} A_\beta = \prod_{\beta<\alpha} A^\beta = A^\alpha.$$

Таким образом $A_\alpha = A^\alpha$ для любого α. Отсюда и следует наша теорема.

3. Множества, являющиеся одновременно множествами F_σ и G_δ

Интерес, представляемый H-приводимыми множествами, в значительной степени основывается на следующей теореме Хаусдорфа *:

В полных метрических пространствах со счетной базой класс H-приводимых множеств совпадает с классом множеств, являющихся одновременно множествами F_σ и G_δ.

Поэтому в разбиении всех H-приводимых множеств пространства R на $\aleph$ классов αH-приводимых множеств мы по существу имеем классификацию множеств, являющихся одновременно множествами F_σ и G_δ в R. В частности, если за пространство R взять фундаментальный гильбертов параллелепипед, то совокупность всех множеств, являющихся множествами F_σ и G_δ в R, совпадает с совокупностью всех метризуемых множеств, являющихся одновременно абсолютными F_σ и G_δ, и мы получаем классификацию всех таких множеств. Теорема II устанавливает топологическую инвариантность этой классификации и выясняет ее топологический смысл, состоящий в возможности исчерпать все данное множество путем последовательного удаления (в данном трансфинитном числе раз) точек локальной компактности данного множества и получаемых каждый раз остатков.

Теорема I позволяет далее дать некоторую новую характеристику всех метризуемых множеств, являющихся одновременно абсолютными F_σ и G_δ. Докажем с этой целью такую теорему.

ТЕОРЕМА III. *Множество A (произвольного топологического пространства R) тогда и только тогда приводимо, когда всякое множество $A' \subset A$, замкнутое в A, содержит по крайней мере одну точку локальной бикомпактности.*

Доказательство. Пусть каждое замкнутое в A подмножество A' содержит точку локальной бикомпактности. Рассмотрим трансфинитную последовательность вычетов

$$A^0 = A, A^1, A^2, \ldots, A^\alpha, \ldots$$

На некотором порядковом числе α, мощность которого не превосходит веса множества A, рассматриваемого как пространство, эта последовательность сделается стационарной:

$$A^\alpha = A^{\alpha+1} = \ldots$$

Из нашего условия и определения множества A^α следует, что при этом непременно $A^\alpha = 0$; A приводимо.

* См. (1), S. 170, V, VI.

Пусть A приводимо и $A' \subset A$ есть множество, замкнутое в A. Так как, начиная с некоторого α, все A^α пусты, то для любой точки $x \in A'$ существует наименьшее порядковое число α_x такое, что x не содержится в A^{α_x}. Число α_x очевидно первого рода. Пусть $\alpha_{x_0} = \alpha$ — наименьшее из всех чисел α_x, определенных для любой точки $x \in A'$. Тогда $A' \subset A^{\alpha-1}$ Так как x_0 не содержится в A^α, то x_0 есть точка локальной бикомпактности множества $A^{\alpha-1}$, следовательно и замкнутого подмножества A' множества $A^{\alpha-1}$. Этим теорема III доказана.

Отсюда в связи со сказанным выше получаем теорему IV.

ТЕОРЕМА IV. *Для того чтобы множество A, лежащее в компактном метрическом пространстве (или, что то же самое, метрическое пространство A со счетным базисом) было одновременно абсолютным F_σ и G_δ, необходимо и достаточно, чтобы каждое замкнутое в A множество имело хотя бы одну точку локальной компактности.*

4. Случай счетных множеств

Рассмотрим теперь счетное множество A компакта R. Наличие в каком-либо подмножестве $A' \subset A$ точки локальной компактности равнозначно в этом случае наличию в A' изолированной точки. В самом деле, в каждой своей изолированной точке множество A' локально компактно. Если, обратно, A' компактно в точке x, то существует окрестность $V(x)$ этой точки относительно A', для которой множество $A' \cdot \overline{V}(x)$ компактно и, как подмножество метрического пространства R, замкнуто. Если бы A' не имело изолированных точек, то то же было бы верно для его открытого подмножества $V(x)$. Так как далее $V(x) \subset A' \cdot \overline{V}(x) \subset \overline{V}(x)$, то и множество $A' \cdot \overline{V}(x)$ не имело бы изолированных точек и было бы совершенным подмножеством пространства R. Поэтому его мощность была бы равна * $\aleph$, что противоречит тому, что $A' \cdot \overline{V}(x) \subset A' \subset A$.

Это позволяет вывести из теоремы IV следующее известное предложение:

Следствие. *Для того чтобы счетное множество, лежащее в компакте R, было множеством типа G_δ, необходимо и достаточно, чтобы оно было разрозненным (т. е. не содержало бы плотного в себе подмножества)*

или

Для того чтобы счетное метрическое пространство было абсолютным G_δ (т. е. было гомеоморфно полному метрическому пространству), необходимо и достаточно, чтобы оно было разрозненным.

5. Отсутствие нетривиальных уплотнений множеств F_σ в множества G_δ

Докажем еще одну теорему, тесно связанную с содержанием данного параграфа.

* См. Hausdorff (1), S. 135, VI.

Определение. Уплотнением пространства A на пространство B называется взаимно однозначное и в одну сторону непрерывное отображение A и B.

ТЕОРЕМА V. *Для того чтобы метрическое пространство типа F_σ уплотнялось на пространство типа G_δ, необходимо, чтобы оно само было типа G_δ.*

В силу теоремы IV достаточно доказать следующую лемму:

ЛЕММА. *Если метрическое пространство A типа F_σ уплотняется на пространство B типа G_δ, то каждое замкнутое подмножество A' пространства A имеет по крайней мере одну точку локальной компактности.*

Доказательство. Покажем сначала, что пространство A имеет точку локальной компактности. Предположим противное. Пусть $A = \Sigma F_n$, где F_n — компакт. Покажем, что при нашем предположении множество F_n нигде не плотно в A. В самом деле, в противном случае множество F_n содержало бы точку x вместе с ее окрестностью $U(x)$, и в силу замкнутости F_n мы имели бы $\overline{U}(x) \subset F_n$, $\overline{U}(x)$ компактно, A компактно в точке x, что невозможно. Пусть Φ_n есть образ F_n в пространстве B при уплотнении A на B. Так как F_n компакт, то и Φ_n компакт. Покажем, что Φ_n нигде не плотно в B. Пусть y точка множества Φ_n, $V(y)$ — окрестность y, x — прообраз y, $U(x)$ — прообраз $V(y)$. Так как F_n нигде не плотно, то $U(x)$ содержит точку a, не принадлежащую F_n. В силу взаимной однозначности отображения A на B образ точки a в B принадлежит $V(y)$, но не принадлежит Φ_n. Следовательно Φ_n нигде не плотно в B. Поэтому $B = \Sigma\Phi_n$ первой категории на себе самом, что невозможно, так как B есть абсолютное G_δ.

Пусть теперь A' есть замкнутое подмножество A и B' — образ A в B. Множество $A - A'$, как открытое подмножество метрического пространства A, есть F_σ в A и следовательно абсолютное F_σ. В силу взаимной однозначности отображения, образ $A - A'$ в B есть $B - B'$. Значит $B - B'$ есть абсолютное F_σ, а потому B' есть G_δ в B, т. е. абсолютное G_δ. Уплотнение A на B порождает очевидно уплотнение A' на B', и так как A' типа F_σ, а B' типа G_δ, то по доказанной части леммы множество A' должно иметь точку локальной компактности. Этим наша лемма, а следовательно и теорема V доказана.

Математический институт
Московского гос. университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
5 II 1941

ЛИТЕРАТУРА

[1] Hausdorff F., Mengenlehre, Berlin—Leipzig, 1927.
[2] Alexandroff P. et Urysohn P., Mémoires sur les espaces topologiques compacts, Verhandelingen der koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, XIV (1929).

P. ALEXANDROFF und I. PROSKURIAKOFF. ÜBER REDUZIBLE MENGEN

ZUSAMMENFASSUNG

Es sei A eine Punktmenge eines topologischen Raumes R. Unter dem Hausdorffschen Residuum [1] (oder dem H-Residuum) der Menge A versteht man die Menge res $A = \overline{(\bar{A} - A)} - (\bar{A} - A)$.

Man zeigt leicht, dass res A eine in A abgeschlossene Teilmenge von A ist. Durch transfinite Induktion definiert man sodann für jede Punktmenge A und jede Ordnungszahl α das Hausdorffsche Residuum von der Ordnung α von A oder kurz das αH-Residuum von A. Die Menge A heisst H-reduzibel und zwar αH-reduzibel, wenn für eine Ordnungszahl — unter denen α die kleinste sei — das αH-Residuum von A verschwindet.

In der vorliegenden Arbeit werden folgende topologisch-invariante Begriffe, welche für alle wichtigen Klassen von Räumen den obigen Hausdorffschen Begriffen äquivalent sind, und sie daher ersetzen können, eingeführt. Es sei wieder A eine Punktmenge des topologischen Raumes R. Wir setzen $A_0 = A$ und nehmen an, dass für alle Ordnungszahlen β, die kleiner sind als eine feste Ordnungszahl α, die Mengen A_β bereits definiert sind. Ist α eine Ordnungszahl erster Art, so definieren wir A_α als die Menge aller derjenigen Punkte von $A_{\alpha-1}$, in denen $A_{\alpha-1}$ nicht bikompakt ist. Ist α eine Limeszahl, so definieren wir A_α als den Durchschnitt aller A_β, $\beta < \alpha$. Wie leicht ersichtlich, sind alle A_α abgeschlossen in A.

Die Menge A heisst reduzibel, wenn eine Ordnungszahl α existiert, für die $A_\alpha = 0$ ist. Die erste Ordnungszahl α für die $A_\alpha = 0$ ist, heisst die Klasse der reduziblen Menge A.

Satz I. *Die Punktmenge A des im Kleinen bikompakten Hausdorffschen Raumes R ist dann und nur dann im Punkte $a \in A$ bikompakt, wenn $a \in A$ — res A.*

Satz II. *Die reduziblen Punktmengen des im Kleinen bikompakten Hausdorffschen Raumes R sind identisch mit den H-reduziblen, und zwar sind die reduziblen Mengen von der Klasse α identisch mit den αH-reduziblen.*

Satz III. *Die Punktmenge A eines beliebigen topologischen Raumes R ist dann und nur dann reduzibel, wenn jede in A abgeschlossene Teilmenge A' von A mindestens einen Punkt enthält, in dem A' bikompakt ist.*

Da ferner aus Satz II und den Ergebnissen von Hausdorff, loc. cit., folgt, dass *die reduziblen Punktmengen eines vollständigen metrischen Raumes R mit abzählbarer Basis mit denjenigen Punktmengen dieses Raumes identisch sind, die gleichzeitig F_σ und G_δ Mengen sind*, so gibt Satz III eine einfache topologische Charakterisierung der letztgenannten Mengen, die somit in $\aleph$ topologisch-invariante und (falls R nicht abzählbar ist) nachweislich nicht leere Klassen zerfallen.

Schliesslich wird bewiesen: *Eine absolute F_σ-Menge kann nur dann auf eine absolute G_δ-Menge eineindeutig und (in einer Richtung) stetig abgebildet werden, wenn sie selbst eine G_δ-Menge ist.*

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 5 (1941), 225—282 Série mathématique

А. С. ПАРХОМЕНКО

ОБ УПЛОТНЕНИЯХ В КОМПАКТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

В статье даются некоторые условия, при которых топологическое пространство взаимно однозначно и непрерывно отображается на бикомпактное пространство.

1

Уплотнением топологического пространства X в пространство Y называется взаимно-однозначное и в одну сторону непрерывное отображение пространства X на пространство Y. Простейшие предложения общего характера, относящиеся к отображениям этого рода, были даны мною в статье ([1]). Настоящая заметка посвящена изучению некоторых условий, при которых топологическое пространство может быть уплотнено в компактное или бикомпактное пространство.

Как показал П. С. Александров, для того чтобы метрическое пространство X типа F_σ могло быть уплотнено в пространство Y типа G_δ, необходимо и (тривиальным образом) достаточно, чтобы пространство X само было типа* G_δ. Возникает вопрос: не будет ли данное в этой теореме условие, необходимое для того, чтобы множество типа F_σ уплотнялось в G_δ и, в частности, в компакт, также и достаточным для уплотнения в компакт множества этого рода; иными словами, не будет ли всякое множество, являющееся одновременно F_σ и G_δ, уплотняться в компакт? Следующий пример показывает, что на этот вопрос нужно ответить отрицательно.

Возьмем пространство A, состоящее из точек последовательности отрезков A_n $(n=1, 2, \ldots)$, лежащих в одной плоскости, параллельных оси OY и сходящихся к отрезку этой оси, и двух точек этого предельного отрезка.

* Здесь и в дальнейшем под пространством F_σ мы будем понимать пространство, представимое в виде суммы счетного множества компактов, и под пространством типа G_δ—пространство, являющееся G_δ в своем полном замыкании, т. е. абсолютные F_σ и G_δ.

Пусть например это будут отрезки

$$A_n : x = \frac{1}{n}, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1 \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

и две точки $a_0(0, 0)$ и $a_1(0, 1)$.

Это множество есть F_σ; так как оно состоит из двух точек и счетного множества отрезков, оно есть G_δ. В самом деле, если мы присоединим к нашему множеству A точки предельного отрезка оси OY ($x=0$, $0 \leqslant y \leqslant 1$), то получим компактное множество $\overline{A}$, из которого множество A получается удалением интервала $x=0$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, т. е. удалением множества типа F_σ.

Докажем, что множество A нельзя уплотнить в компакт. Предположим противное. Пусть $b = f(a)$ — уплотнение множества A в компакт B. Так как отрезок A_n ($n=1, 2, \ldots$) — множество компактное, а на компакте уплотнение есть гомеоморфизм, и так как уплотнение есть отображение взаимно однозначное, то множество B состоит из счетного числа простых дуг $B_n = f(A_n)$, не имеющих попарно общих точек, и двух точек $b_0 = f(a_0)$ и $b_1 = f(a_1)$, причем ни одна из этих точек не лежит ни на одной из дуг B_n.

Рассмотрим в пространстве B последовательность множеств $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$ Точки b_0 и b_1 принадлежат нижнему топологическому пределу этой последовательности. В самом деле, пусть например $V(b_0)$ — произвольная окрестность точки b_0, $U(a_0)$ — прообраз этой окрестности. Область $U(a_0)$ пересекает почти все отрезки A_n, так как эта точка принадлежит топологическому пределу последовательности отрезков. Следовательно образ этой области $V(b_0)$ содержит точки почти всех множеств B_n, т. е. b_0 принадлежит нижнему пределу последовательности этих множеств. Точно так же докажем, что и точка b_1 принадлежит нижнему топологическому пределу последовательности множеств B_n.

Пространство B компактно (по предположению); множества B_n, как образы отрезков, связны; нижний предел последовательности этих множеств не пуст, следовательно по теореме Зоретти* верхний предел этой последовательности есть множество связное. Так как верхний предел всегда замкнут и содержит в себе нижний предел, то верхний предел последовательности множеств B_n есть континуум, содержащий по крайней мере две точки b_0 и b_1. Это множество не может лежать целиком ни на одном из множеств B_n, так как ни одно из них не содержит точек b_0 и b_1. Оно не может лежать и на конечной или счетной совокупности множеств B_n и двух точек b_0 и b_1, так как в этом случае, будучи континуумом, оно распадалось бы в конечную или счетную сумму замкнутых непересекающихся множеств, что невозможно в силу извест-

* См. например ([2]), S. 163.

ной теоремы* Серпинского. Полученное противоречие убеждает нас в невозможности уплотнения множества A в компакт.

Рассмотрим теперь вопрос о том, как возможность уплотнения пространства X в бикомпактное пространство связана с наличием в X точек, в которых X бикомпактно.

ТЕОРЕМА. *Если хаусдорфово пространство X бикомпактно во всех своих точках, кроме, быть может, одной, то оно уплотняется в хаусдорфово бикомпактное пространство Y. Если, сверх того, X удовлетворяет* II *аксиоме счетности, то оно уплотняется в компакт.*

Доказательство. 1°. Предположим сначала, что пространство X бикомпактно во всех своих точках. По известной теореме П. С. Александрова** к пространству X можно присоединить точку ξ так, чтобы полученное таким образом пространство $X+\xi$ было хаусдорфовым бикомпактным пространством. Возьмем в пространстве $X+\xi$ произвольную точку $x \subset X$ и рассмотрим разбиение пространства $X+\xi$, принимая за элементы разбиения пару точек (x, ξ) и отдельные точки $y \subset X$, отличные от x. Такое разбиение пространства $X+\xi$ есть непрерывное разбиение***. В самом деле, если y — точка X, отличная от x, и $U(y)$ — произвольная ее окрестность, то выбираем $V(y)$ так, чтобы $y \subset V(y) \subset U(y)$ и чтобы $V(y)$ не содержало точек x и ξ; если же $y=(x, \xi)$ — двухточечный элемент разбиения, то полагаем просто $V(y)=U(y)$. Пространство Y, порожденное этим разбиением, есть хаусдорфово бикомпактное пространство; оно является непрерывным образом пространства $X+\xi$, причем двум точкам x и ξ пространства $X+\xi$, принадлежащим одному и тому же элементу разбиения, соответствует элемент, которому обе эти точки принадлежат****. Отсюда следует, что для множества $X \subset X+\xi$ это отображение будет уплотнением его в хаусдорфово бикомпактное пространство Y.

Если, кроме того, X удовлетворяет II аксиоме счетности, то мы можем составить определяющую его систему окрестностей из счетного числа областей с компактными замыканиями. Как следует из доказательства теоремы о включении локально-бикомпактного пространства в бикомпактное посредством присоединения одной точки ξ, эта точка также получит счетную определяющую систему областей. Следовательно $X+\xi$, а потому и Y есть компакт*****.

2°. Предположим теперь, что пространство X бикомпактно во всех своих точках, кроме одной точки ξ. За элементы пространства Y при-

* См. например (2), S. 162.

** См. например (3), S. 62.

*** Пусть дано разбиение пространства X на непересекающиеся замкнутые множества $A: X+\Sigma A$. Мы говорим, что это разбиение непрерывно, если каковы бы ни были элемент разбиения A_0 и область $U(A_0)$, содержащая этот элемент, существует область $V(A_0)$, содержащая A_0 и обладающая тем свойством, что если элемент A разбиения $X=\Sigma A$ пересекает $V(A_0)$, то $A \subset U(A_0)$.

**** См. например (4), S. 98, Satz VIII.

***** См. например ibid., Satz IX.

мем точки пространства X. Топологию пространства Y определим, вводя в нем следующую систему окрестностей. Если точка x отлична от ξ, то приписываем ей те же окрестности, какие она имела в пространстве X. Окрестности же точки ξ определим как дополнение до всевозможных конечных сумм компактных замыканий окрестностей точек X, отличных от ξ.

Введенная таким образом система окрестностей определяет Y как хаусдорфово бикомпактное пространство. В самом деле, топология пространства Y введена нами совершенно так же, как если бы мы к пространству $X-\xi$, бикомпактному во всех своих точках, присоединили точку ξ, дополняющую пространство $X-\xi$ до бикомпактного пространства *.

Тождественное отображение X на Y непрерывно в каждой точке $x \subset X$. В самом деле, если $x \neq \xi$, то окрестности этой точки в обоих пространствах совпадают. Если же $x=\xi$, то всякая окрестность точки ξ в пространстве Y есть открытое множество пространства X. Если X удовлетворяет II аксиоме счетности, то определяющую его систему окрестностей точек x, отличных от ξ, можно составить из счетного числа областей с бикомпактными замыканиями. Но тогда и точка ξ в пространстве Y получит счетную определяющую систему окрестностей и Y будет следовательно компактом. Наша теорема полностью доказана.

Заметим, что если пространство X некомпактно по крайней мере в двух своих точках, то оно, вообще говоря, не может быть уплотнено в компакт, как это видно из примера пространства A, построенного в начале этого параграфа, которое, будучи компактно в каждой точке отрезка A_n $(n=1, 2, \ldots)$, не компактно в точках a_0 и a_1.

Заметим далее, что если пространство X есть пространство типа F_σ, то для его уплотнения в компакт необходимо во всяком случае, чтобы множество точек x, в которых оно некомпактно, было в нем нигде не плотно.

В самом деле, в силу упомянутой выше теоремы Александрова, пространство X должно быть в этом случае типа G_δ. Поэтому достаточно показать, что

Если пространство X является одновременно F_σ и G_δ, то множество точек, в которых оно некомпактно, в нем нигде не плотно.

Пусть G — множество точек пространства X, в которых оно компактно; $F=X-G$ — его дополнение. Так как G есть множество открытое, то F замкнуто в X и потому есть абсолютное F_σ. Пусть $F=\sum F_n$. Множества F_n $(n=1, 2, \ldots)$ нигде не плотны в X. В самом деле, в противном случае нашлась бы точка $x \subset F_n$ такая, что некоторая ее окрестность $U(x)$ целиком лежала бы в F_n. Но тогда и ее замыкание $\overline{U}(x)$ целиком лежало бы в F_n, а так как F_n компактное множество, то $\overline{U}(x)$ также было бы компактно и следовательно X было бы ком-

* См. например ([3]), S. 62.

пактно в точке x, что невозможно, так как x принадлежит дополнению к множеству точек, в которых X компактно.

Таким образом каждое F_n $(n=1, 2, \ldots)$ нигде не плотно в X. Следовательно F, как сумма счетного числа нигде не плотных множеств, есть множество первой категории. Как известно, дополнение к множеству первой категории в полном пространстве есть множество, всюду плотное в этом пространстве*, следовательно G плотно в X.

Так как, кроме того, F есть множество замкнутое, то F нигде не плотно в X, что и требовалось доказать.

2

Пусть дан полиэдр P и некоторое его симплициальное подразделение K. Назовем множество, получающееся из P выбрасыванием внутренних точек некоторых его граней, «ошкуренным полиэдром», а грани, из которых выброшены все их внутренние точки, — ошкуренными гранями.

ТЕОРЕМА. *Всякий ошкуренный полиэдр может быть уплотнен в компакт.*

Заметим прежде всего, что достаточно доказать эту теорему лишь для случая, когда в число граней, подлежащих ошкурению, входят лишь «собственные» грани полиэдра, т. е. те грани, которые служат гранями симплексов более высокого числа измерений.

В самом деле, множество, получающееся из полиэдра ошкурением несобственных граней, есть снова некоторый полиэдр P', так что если мы сумеем уплотнить множество, получающееся ошкурением лишь собственных граней полиэдра, то мы тем самым уплотним и множество, получающееся ошкурением полиэдра P.

Итак, мы должны показать, что множество Q, получающееся из P ошкурением некоторых его собственных граней, может быть уплотнено в компакт.

Пусть $X^k=(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k)$ — одна из граней, подлежащих ошкурению. Внутри одного из симплексов наивысшей размерности комплекса K, для которого X^k служит гранью, возьмем произвольную точку a_{k+1}.

Точки $a_0, a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}$ определяют симплекс X^{k+1} $k+1$ измерений. Множество точек границы симплекса X^{k+1}, не являющихся внутренними точками симплекса X^k, назовем «накрывающим» для симплекса X^k и обозначим его через X'^k.

Построим для каждого симплекса, подлежащего ошкурению, накрывающие множества под тем условием, что если для построения накрывающих для двух симплексов X^k и Y^l мы берем точки a_{k+1} и b_{l+1} внутри одного и того же симплекса, то эти точки следует выбирать так, чтобы симплексы X^{k+1} и Y^{l+1} не имели общих точек внутри этого симплекса.

* См. например (²), S. 142.

Между точками симплекса X и точками накрывающего для него множества X' можно установить топологическое соответствие так, чтобы точки границы X сами себе соответствовали. Если при этом точке $x \subset X$ соответствует точка $x' \subset X'$, то назовем эту точку x' накрывающей для точки x.

Построим из точек полиэдра P новое множество R, принимая за его элементы, во-первых, пары точек (x, x'), где x — внутренняя точка грани, подлежащей ошкурению, а x' — накрывающая для точек x, и во-вторых, остальные точки множества P.

Докажем, что построенное таким образом разбиение полиэдра P есть непрерывное разбиение.

1. Пусть x — точка P, не принадлежащая ни граням, подлежащим ошкурению, ни накрывающим для них множествам, и $U(x)$—произвольная ее окрестность. Точка x находится на конечном расстоянии как от симплексов, подлежащих ошкурению, так и от накрывающих для них, поэтому за окрестность $V(x)$, фигурирующую в определении непрерывного разбиения, можно взять произвольную область, целиком лежащую в $U(x)$ и не пересекающую указанных выше множеств.

2. Пусть теперь x — точка полиэдра P, которая сама выбрасыванию не подлежит, но входит в границы симплексов $X_1, X_2, \ldots, X_s$, подлежащих ошкурению. Пусть $U(x)$ — произвольная область, содержащая точку x, и ε — положительное число такое, что сфера $S(x, \varepsilon) \subset U(x)$. Пусть X_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$ — одна из граней, содержащих точку x, и X_i' — накрывающая для этой грани. Так как X_i гомеоморфно X_i', то существует положительное число δ_i такое, что если $y \subset X_i \cdot S(x, \delta_i)$, то

$$y' \subset X_i' \cdot S(x, \varepsilon),$$

где y' — накрывающая для y. Точно так же существует положительное число δ_i' такое, что коль скоро $y' \subset X_i' \cdot S(x, \delta_i')$, то

$$y \subset X_i \cdot S(x, \varepsilon).$$

Обозначая через σ наименьшее из чисел $\delta_1, \delta_1', \delta_2, \delta_2', \ldots, \delta_s, \delta_s', \varepsilon$ и через $V(x)$ сферу $S(x, \sigma)$, видим, что если $y \subset V(x)$, то

$$y' \subset U(x)$$

и если $y' \subset V(x)$, то

$$y \subset U(x).$$

3. Пусть теперь $\xi = (x, x')$—элемент разбиения, состоящий из двух точек, причем x принадлежит только одной грани X, подлежащей ошкурению, x' — накрывающая для точки x, X' — накрывающее для X. Пусть $U(\xi)$ — область, содержащая элемент ξ, и ε—положительное число такое, что

$$S(x, \varepsilon) \subset U(\xi), \quad S(x', \varepsilon) \subset U(\xi),$$

причем ни одна из сфер не пересекает ни симплексов, отличных от X и подлежащих ошкурению, ни накрывающих для этих симплексов.

Так как X гомеоморфно X', то по предыдущему найдутся числа δ и δ' такие, что если $y \subset X \cdot S(x, \delta)$, то

$$y' \subset X' \cdot S(x', \varepsilon)$$

и точно так же если $y' \subset X' \cdot S(x', \delta)$, то

$$y \subset X \cdot S(x, \varepsilon).$$

Обозначая снова через σ наименьшее из чисел δ, δ', ε и полагая $V(\xi) = S(x, \sigma) + S(x', \sigma)$, видим, что область $V(\xi)$ удовлетворяет нашему требованию.

4. Наконец, если $\xi = (x, x')$ — элемент разбиения, состоящий из двух точек, причем x входит еще в границы нескольких граней, подлежащих ошкурению, то применяя к этому элементу рассуждения, которыми мы пользовались в двух предыдущих случаях (2 и 3), снова найдем нужное нам $V(\xi)$.

Непрерывность разбиения P таким образом установлена. Это непрерывное разбиение порождает топологическое пространство R, являющееся непрерывным образом P. Так как P есть компакт, то и R есть также компакт *.

Так как при отображении P на R две точки P, принадлежащие одному и тому же элементу разбиения, обе отображаются в этот элемент, то наше отображение дает уплотнение множества Q, получающегося ошкурением P в компакт R.

Математический институт
Московск. гос. университета им. М. В. Ломоносова

Поступило
5 II 1940

ЛИТЕРАТУРА

[1] Пархоменко А. С., О взаимно однозначных и непрерывных отображениях, Матем. сборн., 47 (1939), 197—210.
[2] Hausdorff F., Mengenlehre, Berlin—Leipzig, 1927.
[3] Alexandroff P. et Urysohn P., Mémoires sur les espaces topologiques compacts, Verhandelingen der koninklijke Akademie von Wetenschappen te Amsterdam, XIV (1929).
[4] Alexandroff P. u. Hopf H., Topologie, I, Berlin, 1935.

A. PARHOMENKO. ÜBER EINEINDEUTIGE STETIGE ABBILDUNGEN AUF KOMPAKTE RÄUME

ZUSAMMENFASSUNG

Beispiele von Punktmengen, die gleichzeitig (absolute) F_σ- und G_δ-Mengen sind, und auf kein Kompaktum eineindeutig und stetig abgebildet werden können.

* См. например ([4]), S. 98.

Satz I. *Jeder im Kleinen bikompakte Hausdorffsche Raum R kann auf ein Bikompaktum (und falls R eine abzählbare Basis besitzt — sogar auf ein Kompaktum) eineindeutig und stetig abgebildet werden.*

Satz II. *Ist K ein absolutes F_σ, das eineindeutig und stetig auf ein Kompaktum abgebildet werden kann, so ist die (offene) Menge aller Punkte, in denen R kompakt ist, überall dicht in R.*

Satz III. *Die Vereinigungsmenge von endlichvielen offenen Simplexen (beliebiger Dimensionszahlen) eines R^n kann auf ein Kompaktum eineindeutig und stetig abgebildet werden.*

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 5 (1941), 233–240 Série mathématique

А. Г. КУРОШ

ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ КОЛЕЦ, СВЯЗАННЫЕ С ПРОБЛЕМОЙ БЕРНСАЙДА О ПЕРИОДИЧЕСКИХ ГРУППАХ

(*Представлено академиком* **О. Ю. Шмидтом**)

В работе рассматриваются проблемы о кольцах с конечным числом образующих, аналогичные проблеме Бернсайда о периодических группах, и указываются некоторые частные случаи, при которых эти проблемы имеют положительное решение. Самая широкая из этих проблем решается вместе с тем в общем случае отрицательно.

1

Дальнейшее развитие теории периодических групп, т. е. групп, все элементы которых имеют конечный порядок, требует, как известно, решения следующей проблемы, поставленной Бернсайдом [1]:

Проблема (G). *Будет ли конечной всякая периодическая группа с конечным числом образующих?*

Положительное решение этой проблемы получено для некоторых частных классов групп — абелевых и разрешимых групп, периодических групп матриц и др. Решение для общего случая не удается однако получить даже при условии, что порядки элементов ограничены в совокупности. Здесь сделаны пока лишь следующие первые шаги. Бернсайд дал положительное решение для групп, все отличные от единицы элементы которых имеют порядок 3, а также для групп с двумя образующими, порядок всякого элемента которых есть делитель числа 4; первый из этих двух случаев рассматривали позже Леви и ван-дер-Варден [2]. Б. Нейман [3] решил проблему (G) для групп, порядок всякого элемента которых не выше, чем 3. Наконец, Санов [4] дал положительное решение этой проблемы для группы с любым конечным числом образующих, если порядки всех элементов этой группы не превосходят числа 4.

В настоящей работе указываются некоторые проблемы о кольцах, аналогичные проблеме Бернсайда. Мы будем рассматривать кольца с единицей, центры которых содержат данное коммутативное поле P, причем единица кольца совпадает с единицей этого поля. Такое кольцо будет называться алгебраическим над P, если всякий элемент этого кольца удовлетворяет некоторому алгебраическому уравнению с коэффициентами из P; наименьшая из степеней уравнений, которым этот элемент удовлетворяет, есть его степень над P. Кольца с этим

свойством, не являющиеся конечными алгебрами над P, уже рассматривались в литературе ([5]). Далее, кольцо R обладает над P конечной системой образующих, если R обладает такой конечной системой элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$, что минимальное подкольцо кольца R, содержащее все эти элементы и поле P, совпадает с R; словом в образующих $a_1, a_2, \ldots, a_n$ условимся называть всякое произведение (положительных) степеней этих образующих, а также единицу кольца R.

Мы приходим теперь к следующей проблеме о кольцах.

Проблема (R). *Будет ли конечной алгеброй над полем P всякое кольцо с единицей, алгебраическое над P и обладающее над P конечной системой образующих?*

Особенно интересен следующий частный случай этой проблемы, относящийся к некоммутативным телам.

Проблема (K). *Будет ли конечной алгеброй с делением над полем P всякое тело, алгебраическое над P и обладающее над P конечной системой образующих?*

Решение этих проблем пока не получено даже при условии, что степени всех элементов кольца (тела) ограничены в совокупности. Проблема (R) положительно решена лишь для случая, когда степени всех элементов кольца не выше, чем 3 (теорема 1). Проблема (K) положительно решена, сверх того, для случая двух образующих, если степени всех элементов не выше, чем 4 (теорема 2).

Проблема Бернсайда, с одной стороны, и проблемы (R) и (K), с другой, не могут быть непосредственно подчинены друг другу. Между ними существует однако достаточно тесная связь, обнаруживающаяся при переходе от группы к ее групповому кольцу над некоторым полем. Действительно, легко проверить, что проблема (G) эквивалента совокупности следующих двух проблем.

Проблема (G′). *Если G есть периодическая группа с конечным числом образующих, то будет ли алгебраическим над P групповое кольцо группы G, построенное над полем P?*

Проблема (G″). *Будет ли конечной алгеброй над полем P всякое кольцо с единицей, алгебраическое над P и обладающее над P такой конечной системой образующих, что всякое слово в этих образующих служит для P корнем из единицы, т. е. является корнем некоторого многочлена $x^n - 1$?*

Это расщепление проблемы Бернсайда окажется, быть может, полезным при ее решении; мы не будем однако касаться в дальнейшем проблем (G′) и (G″). В качестве объединения проблем (G) и (R) служит

Проблема (GR). *Будет ли конечной алгеброй над полем P кольцо R со следующими свойствами:*

1° *Центр кольца R содержит поле P, причем единица поля P служит единицей для R.*

2° *R обладает над P конечной системой образующих $a_1, \ldots, a_n$.*

3° *Всякое слово в образующих $a_1, \ldots, a_n$ алгебраично над P?*

Мы покажем однако, что проблема (GR) решается отрицательно даже для случая, когда степени всех слов над P ограничены в совокупности (теорема 5). Этого пока не удается сделать для следующей проблемы, естественным образом объединяющей проблемы (G) и (K):

Проблема (GK). *Будет ли конечной алгеброй над полем P кольцо R, удовлетворяющее условиям 1^0 — 3^0 проблемы* (GR) *и сверх этого условию*

4^0 *Всякое слово α в образующих $a_1, \ldots, a_n$ обладает в R обратным элементом α^{-1}, выражающимся линейно (над P) через степени элемента α?*

Положительное решение этой проблемы будет дано (теорема 6) лишь для случая, когда степени всех слов не выше, чем 3.

Наиболее существенной из перечисленных выше проблем является проблема (K) — ее роль в теории тел равносильна роли проблемы (G) в теории групп. Проблема (R) представляет преимущественно аксиоматический интерес, так как в ней говорится об одной из возможностей определения понятия алгебры без использования понятия базы. Вместе с тем значение проблем (R) и (GK) в том, что их отрицательное решение (трудно ожидать, чтобы эти проблемы могли быть в общем виде решены положительно) дало бы, возможно, методы для аналогичного решения проблем (G) и (K).

2

ТЕОРЕМА 1. *Проблема (R) решается положительно для кольца, степень всякого элемента которого над P не выше, чем 3.*

Доказательство. Пусть кольцо R, удовлетворяющее условиям проблемы (R), имеет над P систему образующих $a_1, \ldots, a_n$. Для колец с меньшим числом образующих теорему будем считать доказанной (при $n=1$ она очевидна); поэтому подкольцо R', порожденное присоединением к P элементов $a_1, \ldots, a_{n-1}$, есть конечная алгебра над P. Введем обозначение $a_n = b$. Так как, по условию, b^3 выражается через меньшие степени элемента b, то всякое слово в образующих $a_1, \ldots, a_{n-1}, b$, равно сумме (с коэффициентами из P) слов, в записи которых чередуются слова в образующих $a_1, \ldots, a_{n-1}$ и элементы b или b^2; будем называть b-длиной такого слова число его множителей, являющихся степенью элемента b.

Если α есть произвольное слово в образующих $a_1, \ldots, a_{n-1}$, то, применяя, с одной стороны, дистрибутивный закон и используя, с другой стороны, условия теоремы, мы получаем

$$\left.\begin{aligned}(\alpha+b)^3 &= \alpha^3+\alpha b\alpha+b\alpha^2+b^2\alpha+\alpha^2 b+\alpha b^2+b\alpha b+b^3= \\ &= k_0(\alpha+b)^2+k_1(\alpha+b)+k_2= \\ &= k_0\alpha^2+k_0\alpha b+k_0 b\alpha+k_0 b^2+k_1\alpha+k_1 b+k_2, \quad k_0, k_1, k_2 \subset P.\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Отсюда следует, что слово $b\alpha b$ выражается через слова с меньшей b-длиной. Это же имеет место для слова $b^2\alpha b^2$. Умножая теперь слева на b обе части получающегося из (1) выражения для $b\alpha b$ и заменяя возни-

кающие вновь элементы вида $b\alpha b$, а также высокие степени элемента b их выражениями, мы получим, что слово $b^2\alpha b$ выражается через слово $b\alpha b^2$ и слова с меньшей b-длиной. Теперь легко видеть, что всякое слово в образующих $a_1, \ldots, a_{n-1}, b$, b-длина которого не меньше 3, выражается через слова с меньшей b-длиной, т. е. всякое слово в этих образующих линейно выражается через слова вида α, $\alpha b\beta$, $\alpha b^2\beta$, $\alpha b\beta b^2\gamma$, где α, β, γ — слова в образующих $a_1, \ldots, a_{n-1}$. Так как однако R' есть конечная алгебра над P, т. е. можно указать конечную систему слов в образующих $a_1, \ldots, a_{n-1}$, через которую линейно выражаются все слова в этих образующих, то мы получаем, что R также будет конечной алгеброй над P.

ТЕОРЕМА 2. *Проблема* (K) *решается положительно для тела с двумя образующими над P, если степень всякого элемента этого тела не выше, чем* 4.

Доказательство. Пусть тело K обладает над полем P системой образующих a, b. Условимся через $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ обозначать некоторые степени элемента a. Так как элемент $(\alpha b)^4$ выражается, по условиям теоремы, через меньшие степени элемента αb, то

$$(\alpha b)^3 = (\alpha b)^4 (\alpha b)^{-1} = [k_0 (\alpha b)^3 + k_1 (\alpha b)^2 + k_2 (\alpha b) + k_3] (\alpha b)^{-1},$$

откуда

$$b\alpha b\alpha b = k_0 b\alpha b + k_1 b + k_2 \alpha^{-1} + k_3 \alpha^{-1} b^{-1} \alpha^{-1}, \tag{2}$$

т. е. слово $b\alpha b\alpha b$ выражается через слово $b\alpha b$ и слова, b-длина которых не больше единицы (элементы b^{-1} и α^{-1} выражаются соответственно через положительные степени элементов b и α). К такому же результату мы пришли бы, заменяя b через b^k, $k = 1, 2, 3$.

Рассмотрим теперь выражение $(\alpha + b)^4$. Раскрывая его на основании дистрибутивного закона и выражая, с другой стороны, через меньшие степени элемента $\alpha + b$, мы получим, что слово $b^2\alpha b$ выражается через следующие слова: слово $b\alpha b^2$, слова, которые содержат элемент b лишь в первой степени и имеют b-длину, равную 2, и слова, b-длина которых не больше единицы. Умножая полученное для $b^2\alpha b$ выражение слева на b, мы придем к выражению для слова $b^3\alpha b$, а умножая это последнее справа на b, мы получим выражение для слова $b^3\alpha b^2$. Два последних выражения мы преобразуем для того, чтобы исключить содержащиеся в них слова, b-длина которых равна 3. В выражении для $b^3\alpha b$ содержится слово $b\alpha b\alpha b$. Заменяя его на основании равенства (2), мы получим, что слово $b^3\alpha b$ выражается через слово $b\alpha b^3$, слова, имеющие b-длину, равную 2, и не содержащие b^3, и слова, b-длина которых меньше, чем 2. Среди входящих в выражение для $b^3\alpha b^2$ слов с b-длиной, равной 3, встречается слово $b\alpha b^2\alpha b$. Заменяя отрезок $b^2\alpha b$ этого слова его выражением, уже найденным выше, мы сократим, как легко проверить, часть слов с b-длиной, равной 3, из выражения для $b^3\alpha b^2$. Применяя к оставшимся словам с этой же b-длиной равен-

ство (2) и используя уже найденное выражение для $b^3\alpha b$, мы получим, наконец, что слово $b^3\alpha b^2$ выражается через следующие слова: слово $b^2\alpha b^3$, слова вида $b\beta b^3\gamma$, слова, имеющие b-длину 2 и не содержащие b^3, и слова, b-длина которых меньше, чем 2.

Пользуясь найденными нами выражениями для слов $b^2\alpha b$, $b^3\alpha b$ и $b^3\alpha b^2$, докажем, что всякое слово в образующих a, b можно выразить (линейно с коэффициентами из P) через слова, в которых степени элемента b расположены так, что никогда более высокая степень этого элемента не предшествует его меньшей степени. Доказывать это мы будем индукцией по b-длине слова, так как если b-длина равна единице, то наше утверждение справедливо.

Рассмотрим сперва такие слова с b-длиной k, которые не содержат множителей b^3. Для этих слов мы будем вести доказательство индукцией по числу l содержащихся в них множителей b^2 (при $l=0$ наше утверждение очевидно). Наконец, для каждого множителя b^2 из нашего слова подсчитаем число расположенных за ним (т. е. между ним и концом слова) множителей b в первой степени и сумму h всех этих чисел назовем высотой слова. При $h=0$ наше утверждение очевидно, поэтому при данных k и l будем вести доказательство индукцией по h. Если $h\neq 0$, то в нашем слове на некотором месте должен содержаться отрезок вида $b^2\alpha b$. Заменяя его найденным выше выражением и произведя необходимые сокращения и объединения, получим, что данное нам слово выражается через слова, b-длина которых меньше k, слова с b-длиной k, но с меньшим, чем l, числом множителей b^2, и слова с теми же k и l, но с меньшей, чем h, высотой. Для всех этих слов однако наше утверждение уже доказано.

Если теперь нам дано слово с b-длиной k, но уже содержащее множители b^3, то обозначим число этих множителей через l' и будем вести доказательство индукцией по l' (случай $l'=0$ уже рассмотрен выше). Далее, для каждого множителя b^3 подсчитываем общее число расположенных за ним множителей b и b^2 и называем высотой h' сумму всех этих чисел. Если $h'=0$, то ввиду доказанного выше наше утверждение можно считать доказанным, поэтому при данных k и l' ведем доказательство индукцией по h'. Если $h'\neq 0$, то наше слово содержит отрезок вида $b^3\alpha b$ или $b^3\alpha b^2$. Заменяя его найденным ранее выражением, мы придем, как и раньше, к словам, для которых наше утверждение уже доказано. Этим его доказательство заканчивается.

Рассмотрим теперь элемент $b^k(\alpha b^k+\beta\alpha^{-1})^4$, $k=1, 2, 3$. Раскрывая его на основании дистрибутивного закона и выражая, с другой стороны, элемент $(\alpha b^k+\beta\alpha^{-1})^4$ через меньшие степени стоящего в скобках элемента, мы получим, используя равенство (2) (с заменой b на b^k), что слово $b^k\alpha b^k\beta b^k\alpha b^k$ выражается через слова с меньшей b-длиной. Если дано слово $b^k\alpha_1 b^k\alpha_2 b^k\alpha_3 \ldots b^k\alpha_n$, в котором степени элемента a чередуются с одной и той же степенью b^k элемента b и если это слово нельзя выразить через слова с меньшей b-длиной, то ввиду (2) соседние множители α_i и α_{i+1}, $i=1, 2, \ldots, n-1$, должны быть различными,

а ввиду только что доказанного множители α_i и α_{i+2}, $i=1, 2, \ldots, n-2$, также не могут быть равными. Вместе с тем всякое α_i равно одному из элементов a, a^2, a^3. Если поэтому будет например $\alpha_1=a$, $\alpha_2=a^2$, то должно быть $\alpha_3=a^3$, $\alpha_4=a$, $\alpha_5=a^2$ и т. д., но тогда при $n=12$ наше слово будет четвертой степенью слова $b^kab^ka^2b^ka^3$, т. е. может быть заменено словами с меньшей b-длиной. Отсюда и из доказанной выше возможности ограничиться рассмотрением слов, составленных не более чем из трех отрезков, каждый из которых содержит элемент b в некоторой фиксированной степени, следует справедливость теоремы.

3

ТЕОРЕМА 3. *Проблема* (GR) *решается положительно, если кольцо R коммутативно.*

Действительно, если образующие $a_1, a_2, \ldots, a_n$ имеют соответственно степени $k_1, k_2, \ldots, k_n$, то всякое слово в этих образующих выражается через слова вида $a_1^{s_1}a_2^{s_2}\ldots a_n^{s_n}$, где $0\leqslant s_i<k_i$, $i=1, 2, \ldots, n$. Таких слов однако лишь конечное число.

ТЕОРЕМА 4. *Проблема* (GR) *решается положительно, если число образующих равно двум и они оба имеют степень* 2 *над* P.

Действительно, в этом случае всякое слово выражается через слова, в которых чередуются первые степени элементов a_1 и a_2. Если однако элемент a_1a_2 имеет степень n, то всякое слово с чередующимися множителями a_1 и a_2, общая длина которого больше, чем $2n$, может быть выражено через более короткие слова.

ТЕОРЕМА 5. *Проблема* (GR) *имеет в общем случае отрицательное решение даже при условии, что степени всех слов над P ограничены в совокупности.*

Доказательство. Пусть даны три символа a, b, c. Слово $x_1x_2\ldots x_n$ в этих символах ($x_i=a$, b или c, $i=1, 2, \ldots, n$) обладает повторяющимся отрезком, если есть такие k и l, $1\leqslant k<l<n$, что $x_k=x_l$, $x_{k+1}=x_{l+1}$, $\ldots$, $x_{l-1}=x_{2l-k-1}$, причем $2l-k-1\leqslant n$. Известно, что существует бесконечно много слов в образующих a, b, c, которые не содержат повторяющихся отрезков. Пусть M есть множество всех таких слов, включая пустое слово, α, β, ... — элементы множества M, а $\mathfrak{M}$ — группа линейных форм над полем P, имеющая M своей базой. Определяем в $\mathfrak{M}$ умножение, полагая $\alpha\beta=\gamma$, где γ есть слово, которое получается приписыванием справа к первому множителю второго множителя, если только при этом не появляются повторяющиеся отрезки, и $\alpha\beta=0$ в противоположном случае. Ассоциативность этого умножения, распространяемого очевидно на всю группу $\mathfrak{M}$, проверяется без затруднений. Мы получаем кольцо R, в котором пустое слово играет роль единицы; в центре кольца R содержится следовательно поле P. Слова a, b и c, входящие в M, служат образующими для R над P. Наконец, всякое слово μ в образующих a, b, c удовлетворяет равенству $\mu^2=0$.

ТЕОРЕМА 6. *Проблема* (GK) *решается положительно, если степени всех слов в образующих* $a_1, \ldots, a_n$ *не выше, чем* 3.

Доказательство. При $n=1$ теорема очевидна, поэтому будем вести доказательство индукцией по n. Подкольцо R' кольца R, порожденное присоединением к P элементов $a_1, \ldots, a_{n-1}$, есть конечная алгебра над P. Введем обозначения: $a_n = b$, α — произвольное слово в образующих $a_1, \ldots, a_{n-1}$. Тогда из

$$(\alpha b)^3 = k_0(\alpha b)^2 + k_1(\alpha b) + k_2 \quad k_0, k_1, k_2 \subset P,$$

следует

$$b\alpha b = k_0 b + k_1 \alpha^{-1} + k_2 \alpha^{-1} b^{-1} \alpha^{-1}, \tag{3}$$

т. е. после замены элементов b^{-1} и α^{-1} их выражениями получаем, что слово $b\alpha b$ выражается через слова, b-длина которых не больше единицы. Это же имеет место для слова $b^2\alpha b^2$. Умножая, наконец, полученное нами выражение для $b\alpha b$ слева на элемент b и выполняя необходимую замену при помощи равенства (3), получим, что слово $b^2\alpha b$ выражается через слова вида $b\beta b^2\gamma$, где β и γ — слова в образующих $a_1, \ldots, a_{n-1}$, и слова, b-длина которых не больше единицы.

Теперь легко видеть, что всякое слово, b-длина которого больше или равна 3, выражается через слова с меньшей b-длиной, а так как R' есть конечная алгебра над P, т. е. существует конечная система слов в образующих $a_1, \ldots, a_{n-1}$, через которую линейно выражаются все слова в этих образующих, то кольцо R также будет конечной алгеброй над P.

Математический институт им. В. А. Стеклова Академии Наук СССР

Поступило 4 II 1941

ЛИТЕРАТУРА

[1] Burnside W., On an unsettled question in the theory of discontinuous groups, Quart. J. Math., 33 (1902), 230—238.

[2] Levi F. und van der Waerden B. L., Über eine besondere Klasse von Gruppen, Hamburg. Abh., 9 (1932), 154—158.

[3] Neumann B. H., Groups whose elements have bounded orders, J. London Math. Soc., 12 (1937), 195—198.

[4] Санов И. Н., Решение проблемы Бернсайда для показателя 4, Ученые записки Лен. гос. унив., № 55 (1940), 166—170.

[5] Conwell H. H., Linear associative algebras of infinite order whose elements satisfy finite algebraic equations, Bull. Amer. Math. Soc., 40 (1934), 95—102.

A. KUROSCH. RINGTHEORETISCHE PROBLEME, DIE MIT DEM BURNSIDESCHEN PROBLEM ÜBER PERIODISCHE GRUPPEN IN ZUSAMMENHANG STEHEN

ZUSAMMENFASSUNG

Die weitere Entwicklung der Theorie der periodischen Gruppen, d. h. der Gruppen, deren sämtliche Elemente von endlicher Ordnung sind, fordert bekanntlich die Lösung des folgenden Burnsideschen Problems:

Problem (G). *Ist jede periodische Gruppe mit endlich vielen Erzeugenden selbst endlich?*

In der vorliegenden Arbeit werden einige ring- und körpertheoretische Probleme angegeben, die dem Problem (G) ähnlich sind oder sogar mit diesem Problem in Zusammenhang stehen. Wir betrachten einen Ring R mit Einselement, dessen Zentrum einen kommutativen Körper P enthält derart, dass die Einselemente von R und P übereinstimmen. R ist algebraisch über P, wenn jedes Element von R einer algebraischen Gleichung in P genügt; R besitzt endlich viele Erzeugende über P, wenn es in R solche Elemente $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gibt, dass R mit dem minimalen Unterring, der alle diese Elemente und P enthält, übereinstimmt. Jetzt entsteht die Frage:

Problem (R). *Ist ein Ring, der algebraisch über P ist und endlich viele Erzeugende über P besitzt, eine endliche Algebra über P?*

Von besonderem Interesse ist folgender Spezialfall dieses Problems:

Problem (K). *Ist ein Körper, der algebraisch über P ist und endlich viele Erzeugende über P besitzt, eine endliche Divisionsalgebra über P?*

Für das Problem (R) existiert eine positive Lösung, wenn jedes Element des Ringes einen Grad über P hat, der nicht grösser als 3 ist (Satz 1). Für das Problem (K) existiert eine positive Lösung überdies in dem Falle, wenn der Körper zwei Erzeugende über P besitzt und jedes Element dieses Körpers einen Grad über P hat, der nicht grösser als 4 ist (Satz 2).

Die Probleme (G) und (R) sind eng miteinander verbunden: das Problem (G) ist nämlich in zwei Teile teilbar, von denen der erste behauptet, dass ein Gruppenring einer periodischen Gruppe algebraisch über seinem Grundkörper ist, und von denen der zweite ein Spezialfall von (R) ist. Als Vereinigung der Probleme (G) und (R) kann man folgendes Problem aufstellen:

Problem (GR). *Ist ein Ring R eine endliche Algebra über dem Körper P, wenn*

1° *P zum Zentrum von R gehört und dabei die Einselemente von P und R übereinstimmen;*

2° *R endlich viele Erzeugende $a_1, \ldots, a_n$ über P besitzt;*

3° *jedes Wort in den Erzeugenden $a_1, \ldots, a_n$ algebraisch über P ist?*

Dieses Problem hat für einen kommutativen Ring (Satz 3) und für einen Ring mit zwei Erzeugenden, die beide vom Grade 2 sind (Satz 4), eine triviale positive Lösung. Das Problem (GR) hat aber eine negative Lösung schon in dem Falle, wenn die Grade aller Worte in der Gesamtheit begrenzt sind (Satz 5).

Das folgende Problem vereinigt die Probleme (G) und (K):

Problem (GK). *Ist ein Ring R eine endliche Algebra über P, wenn die Bedingungen* 1°—3° *von Problem* (GR) *gelten und überdies*

4° *jedes Wort α in den Erzeugenden $a_1, \ldots, a_n$ ein Inverses α^{-1} in R besitzt, das durch Potenzen von α linear (über P) darstellbar ist?*

Für dieses Problem existiert eine positive Lösung in dem Falle, wenn jedes Wort einen Grad über P hat, der nicht grösser als 3 ist (Satz 6).

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 5 (1941), 241—254 Série mathématique

E. FELDHEIM

SUR LES POLYNOMES GÉNÉRALISÉS DE LEGENDRE

(*Présenté par* **S. Bernstein,** de l'Académie)

Dans cet article sont étudiées les corditions nécessaires et suffisantes pour que les polynomes généralisés de Legendre, introduits par Fejér, soient orthogonaux.

1. Généralités sur les polynomes de Legendre généralisés dûs à L. Fejér

Supposons donnée une suite infinie de quantités réelles $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ À toute suite $\{a_n\}$ peut être adjoint un système infini de polynomes de Legendre $P_n(\cos\theta)$ $(n=0,1,2,\ldots)$, défini de la façon suivante*. On forme la série entière

$$F(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n+\ldots,$$

on remplace z par $re^{i\theta}$, et l'on prend $|F(re^{i\theta})|^2$ pour fonction génératrice des polynomes $P_n(\cos\theta)$:

$$|F(re^{i\theta})|^2=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\cos\theta)\,r^n.$$

Le développement explicite des polynomes $P_n(\cos\theta)$ en série de cosinus est ainsi:

$$P_n(\cos\theta)=\sum_{k=0}^{n}a_k\,a_{n-k}\cos(n-2k)\,\theta, \tag{1}$$

avec le dernier terme égal à a_ν^2 ou $2a_\nu a_{\nu+1}\cos\theta$ respectivement, si $n=2\nu$, ou $n=2\nu+1$. $P_n(x)$ est donc un polynome de degré n de même parité que son degré.

Exemples: a) $F(z)=(1-z)^{-\rho}$, $a_n=\binom{n+\rho-1}{n}$; $P_n(\cos\theta)$ est le polynome ultrasphérique.

b) $$F(z)=\frac{1}{z}\log\frac{1}{1-z},\quad a_n=\frac{1}{n+1},$$

* Voir L. Fejér (1) Pour les autres résultats cités, et la bibliographie ultérieure, consulter G. Szegö (2).

$$P_n(\cos\theta) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(n-2k)\theta}{(k+1)(n-k+1)}.$$

Rappelons les deux théorèmes suivants

I. (Szegö). Si $a_n > 0$, et la suite $\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_1}, \ldots, \frac{a_n}{a_{n-1}}, \ldots$ est croissante, les zéros de $P_n(x)$ sont réels, simples et situés dans l'intervalle $-1 < x < +1$. Si les zéros sont $x_\nu = \cos\theta_\nu$, on a l'inégalité

$$\frac{\nu - \frac{1}{2}}{n+1}\pi < \theta_\nu < \frac{\nu + \frac{1}{2}}{n+1}\pi \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

II. (Fejér). Si $a_n > 0$ et la suite $\{a_n\}$ est complètement monotone, c'est-à-dire

$$\Delta^{(k)} a_n = \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^\nu \binom{k}{\nu} a_{n+\nu} \geqslant 0 \quad (k, n = 0, 1, 2, \ldots),$$

alors les zéros de $P_n(\cos\theta)$ satisfont à l'inégalité de Stieltjes

$$\left(\nu - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n} \leqslant \theta_\nu \leqslant \frac{\nu\pi}{n+1} \qquad \left(\nu = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]\right). \tag{3}$$

Les signes d'égalité ne sont valables que pour les polynomes de Tchebycheff de première et de seconde espèce respectivement.

Pour une suite $\{a_n\}$ complètement monotone, les conditions du théorème I sont évidemment remplies (inégalité de Schwarz).

2. Conditions pour que les polynomes de Legendre généralisés soient orthogonaux

Nous utilisons, pour trouver ces conditions, le théorème suivant*:

Pour que la suite de polynomes $P_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ soit orthogonale, il est nécessaire et suffisant que la relation de récurrence

$$2 b_n x P_n(x) = P_{n+1}(x) + \lambda_n P_{n-1}(x) \quad (n \geqslant 1,\ \lambda_n > 0) \tag{4}$$

soit vérifiée.

Si $P_n(x)$ est le polynome de Legendre, on a

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Remplaçons dans (4)

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} T_{n-2k}(x),$$

en se rappelant que

$$2x T_n(x) = T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x).$$

* Voir ([3]), p. 42.

Alors

$$b_n \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} [T_{n-2k+1}(x) + T_{n-2k-1}(x)] =$$
$$= \sum_{k=0}^{n+1} a_k a_{n-k+1} T_{n-2k+1}(x) + \lambda_n \sum_{k=0}^{n-1} a_k a_{n-k-1} T_{n-2k-1}(x),$$

$$b_n \sum_{k=0}^{n+1} (a_k a_{n-k} + a_{k-1} a_{n-k+1}) T_{n-2k+1}(x) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n+1} (a_k a_{n-k+1} + \lambda_n a_{k-1} a_{n-k}) T_{n-2k+1}(x),$$

où $a_{-1} \equiv 0$. En identifiant dans les deux membres les coefficients de $T_{n-2k+1}(x)$, il vient

$$b_n (a_k a_{n-k} + a_{k-1} a_{n-k+1}) = a_k a_{n-k+1} + \lambda_n a_{k-1} a_{n-k},$$

ou, en divisant par $a_{k-1} a_{n-k}$,

$$b_n (b_{k-1} + b_{n-k}) = b_{k-1} b_{n-k} + \lambda_n,$$

ce qui peut encore être écrit de la façon suivante:

$$\lambda_n = b_n^2 - (b_n - b_{k-1})(b_n - b_{n-k}) \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{5}$$

C'est la condition cherchée.

Nous voyons que le produit figurant au second membre ne peut pas dépendre de k, ce qui a lieu si

$$b_n - b_{k-1} = \alpha_n \frac{g_{n-k+1}^{(n)}}{g_k^{(n)}} \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{5'}$$

Nous vérifierons plus tard l'exactitude de cette relation. Pour résoudre le problème, ce qui revient à la détermination des b_k et λ_n, nous partons de

$$\lambda_n = b_n (b_{k-1} + b_{n-k}) - b_{k-1} b_{n-k} \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

que nous écrivons d'abord pour $k = n, n-1, n-2$:

$$\lambda_n = b_n (b_{n-1} + b_0) - b_{n-1} b_0; \quad \lambda_n = b_n (b_{n-2} + b_1) - b_{n-2} b_1;$$
$$\lambda_n = b_n (b_{n-3} + b_2) - b_{n-3} b_2.$$

Il est évident que b_0 (et aussi b_1) est arbitraire; nous posons, pour le moment, $b_0 = 0$, en revenant ensuite au cas général. On tire alors des trois relations précédentes:

$$b_n = \frac{b_1 b_{n-2}}{b_1 + b_{n-2} - b_{n-1}} = \frac{b_2 b_{n-3}}{b_2 + b_{n-3} - b_{n-1}}; \quad b_{n-1} = \frac{b_1 b_{n-3}}{b_1 + b_{n-3} - b_{n-2}},$$

donc

$$b_{n-3} = \frac{b_{n-1}(b_{n-2} - b_1)}{b_{n-1} - b_1}, \quad b_{n-3} - b_{n-1} = \frac{b_{n-1}(b_{n-2} - b_{n-1})}{b_{n-1} - b_1},$$

et

$$b_n = \frac{b_2 b_{n-1}(b_{n-2} - b_1)}{b_2(b_{n-1} - b_1) + b_{n-1}(b_{n-2} - b_{n-1})} = \frac{b_2 b_{n-1}(b_{n-2} - b_1)}{b_{n-1}(b_2 + b_{n-2} - b_{n-1}) - b_1 b_2} =$$
$$= \frac{b_1 b_{n-2}}{b_1 + b_{n-2} - b_{n-1}}.$$

De cette dernière égalité on tire

$$(b_2-b_1)(b_{n-2}-b_{n-1})\,b_{n-1}\,b_{n-2}=b_1b_2\,(b_{n-2}-b_{n-1})(b_{n-1}-b_1)\quad (n=3,4,5,\ldots).$$

Si tous les b_n ne sont pas égaux, on en tire enfin

$$b_n=\frac{b_1^2b_2}{b_1b_2-(b_2-b_1)\,b_{n-1}}\qquad (n=1,2,3,\ldots). \tag{6}$$

Or, comme b_0 et b_1 (et, comme nous voyons, encore b_2) sont des quantités arbitraires, nous poserons dans (6),

$$\beta_n=\frac{b_n-b_0}{b_1-b_0}\ \text{ et }\ c=\frac{b_2-b_0}{b_2-b_1},$$

de sorte qu'il vient

$$\beta_n=\frac{c}{c-\beta_{n-1}}\qquad (\beta_0=0,\ \beta_1=1,\ n=1,2,3,\ldots). \tag{7}$$

Nous montrerons tout à l'heure que si les b_n sont définis par (7), toutes les relations (5) seront vérifiées. On verra immédiatement que la solution en nombres réels de (7) n'est possible que si $c\geqslant 4$. Les β_n seront donnés, en effet, par une fraction continue finie. En posant

$$\delta_n=1-\frac{\beta_n}{c}\qquad (\delta_0=1;\ n=1,2,3,\ldots),$$

on aura

$$\delta_n=\frac{R_n}{S_n}=1-\frac{\frac{1}{c}\big|}{|\,1}-\frac{\frac{1}{c}\big|}{|\,1}-\cdots-\frac{\frac{1}{c}\big|}{|\,1},$$

avec

$$R_n=R_{n-1}-\frac{1}{c}R_{n-2},\quad S_n=S_{n-1}-\frac{1}{c}S_{n-2};$$

$$R_0=1,\quad S_0=1;\quad R_1=1-\frac{1}{c},\quad S_1=1.$$

R_n et S_n sont donnés par les racines de l'équation du second degré

$$x^2-x+\frac{1}{c}=0,$$

c'est-à-dire

$$x=\frac{\sqrt{c}\pm\sqrt{c-4}}{2\sqrt{c}}.$$

Posons $c=4\,\mathrm{ch}^2\,\xi$ (où l'on a bien $c\geqslant 4$). Alors, en remarquant que $\mathrm{th}\,\xi<1$,

$$R_n=\frac{(1+\mathrm{th}\,\xi)^{n+2}-(1-\mathrm{th}\,\xi)^{n+2}}{2^{n+2}\,\mathrm{th}\,\xi},\qquad S_n=\frac{(1+\mathrm{th}\,\xi)^{n+1}-(1-\mathrm{th}\,\xi)^{n+1}}{2^{n+1}\,\mathrm{th}\,\xi}$$

et ainsi

$$\delta_n=1-\frac{\beta_n}{4\mathrm{ch}^2\,\xi}=\frac{1}{2}\,\frac{(1+\mathrm{th}\,\xi)^{n+2}-(1-\mathrm{th}\,\xi)^{n+2}}{(1+\mathrm{th}\,\xi)^{n+1}-(1-\mathrm{th}\,\xi)^{n+1}}=\frac{1}{2\mathrm{ch}\,\xi}\,\frac{\mathrm{sh}\,(n+2)\,\xi}{\mathrm{sh}\,(n+1)\,\xi},$$

$$\beta_n=4\mathrm{ch}^2\,\xi-2\,\mathrm{ch}\,\xi\,\frac{\mathrm{sh}\,(n+2)\,\xi}{\mathrm{sh}\,(n+1)\,\xi}=\frac{2\,\mathrm{sh}\,n\xi\,\mathrm{ch}\,\xi}{\mathrm{sh}\,(n+1)\,\xi}=1+\frac{\mathrm{sh}\,(n-1)\,\xi}{\mathrm{sh}\,(n+1)\,\xi}.$$

Finalement, la solution de (6) est donnée par

$$b_n=b_1+(b_1-b_0)\,\frac{\mathrm{sh}\,(n-1)\,\xi}{\mathrm{sh}\,(n+1)\,\xi}\qquad (n=0,1,2,\ldots), \tag{8}$$

ξ étant un paramètre $\geqslant 0$ quelconque, b_0 et b_1 des grandeurs arbitraires.

De cette valeur (8), on tire

$$b_n - b_{k-1} = (b_1 - b_0)\left[\frac{\operatorname{sh}(n-1)\xi}{\operatorname{sh}(n+1)\xi} - \frac{\operatorname{sh}(k-2)\xi}{\operatorname{sh}k\xi}\right] =$$
$$= \frac{(b_1 - b_0)\operatorname{sh}2\xi}{\operatorname{sh}(n+1)\xi}\cdot\frac{\operatorname{sh}(n-k+1)\xi}{\operatorname{sh}k\xi},$$

et

$$b_n - b_{n-k} = \frac{(b_1 - b_0)\operatorname{sh}2\xi}{\operatorname{sh}(n+1)\xi}\,\frac{\operatorname{sh}k\xi}{\operatorname{sh}(n-k+1)\xi}.$$

Nous voyons donc que (5′) est vérifié avec $\alpha_n = \frac{(b_1 - b_0)\operatorname{sh}2\xi}{\operatorname{sh}(n+1)\xi}$, $g_k^{(n)} = \operatorname{sh}k\xi$, et le second coefficient λ_n de la relation de récurrence (5) est déterminé par (5):

$$\lambda_n = b_n^2 - \alpha_n^2 =$$
$$= \left[b_1 + (b_1 - b_0)\,\frac{\operatorname{sh}2\xi + \operatorname{sh}(n-1)\xi}{\operatorname{sh}(n+1)\xi}\right]\left[b_1 + (b_1 - b_0)\,\frac{\operatorname{sh}(n-1)\xi - \operatorname{sh}2\xi}{\operatorname{sh}(n+1)\xi}\right]$$

ou

$$\lambda_n = b_1^2 + 2b_1(b_1 - b_0)\frac{\operatorname{sh}(n-1)\xi}{\operatorname{sh}(n+1)\xi} + (b_1 - b_0)^2\frac{\operatorname{sh}(n-3)\xi}{\operatorname{sh}(n+1)\xi} \quad (n = 3, 4, \ldots). \tag{9}$$

On voit que $\lambda_n > 0$ si $b_1 > b_0$.

(8) et (9) donnent, par (4), tous les polynomes généralisés de Legendre qui sont orthogonaux. Le cas limite $\xi = 0$ conduit à

$$b_n = b_1 + \frac{(b_1 - b_0)(n-1)}{n+1} = \frac{2n}{n+1}b_1 - \frac{n-1}{n+1}b_0.$$

Si $2b_1 > b_0$, nous retrouvons, à un facteur près, les polynomes ultrasphériques. Nous prenons, dans le cas général, les deux premiers coefficients égaux à ceux du cas ultrasphérique

$$b_0 = \rho, \qquad b_1 = \frac{1+\rho}{2}.$$

On aura alors

$$b_n = \frac{\operatorname{sh}n\xi\operatorname{ch}\xi + \rho\operatorname{ch}n\xi\operatorname{sh}\xi}{\operatorname{sh}(n+1)\xi} = \frac{\operatorname{th}n\xi + \rho\operatorname{th}\xi}{\operatorname{th}n\xi + \operatorname{th}\xi} = \frac{\frac{\operatorname{th}n\xi}{\operatorname{th}\xi} + \rho}{\frac{\operatorname{th}n\xi}{\operatorname{th}\xi} + 1}.$$

Posons

$$\frac{\operatorname{th}n\xi}{\operatorname{th}\xi} = \gamma_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots;\ \gamma_0 = 0,\ \gamma_1 = 1), \tag{10}$$

de sorte que

$$b_n = \frac{\gamma_n + \rho}{\gamma_n + 1} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots;\ \gamma_0 = 0). \tag{11}$$

Remarquons que $1 < \gamma_n \leq n$, comme cela résulte immédiatement de ce que

$$\gamma_n = \frac{\binom{n}{1} + \binom{n}{3}\operatorname{th}^2\xi + \binom{n}{5}\operatorname{th}^4\xi + \ldots}{1 + \binom{n}{2}\operatorname{th}^2\xi + \binom{n}{4}\operatorname{th}^4\xi + \ldots}.$$

Pour $\xi=0$, cas ultrasphérique, on a $\gamma_n=n$.

Les coefficients a_n sont alors déterminés de $b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}$:

$$a_n=a_0 b_0 b_1 b_2 \ldots b_{n-1} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ldots),$$

d'où

$$a_n=a_0\frac{\rho(\rho+1)(\rho+\gamma_2)(\rho+\gamma_3)\cdots(\rho+\gamma_{n-1})}{1\cdot 2\cdot(1+\gamma_2)(1+\gamma_3)\cdots(1+\gamma_{n-1})} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ldots). \qquad (12)$$

Pour $\rho=1$, $b_n=1$; c'est le cas des polynomes de Tchebycheff $U_n(x)$. La relation (8) montre d'ailleurs que, pour toute valeur de ξ, si $b_1=b_0$, on a $b_n=b_0$, c'est-à-dire, les polynomes $U_n(x)$ (à un facteur égal à b_0^n près). Pour λ_n on aura alors l'expression

$$\lambda_n=\frac{1-\gamma_n\,\mathrm{th}^2\,\xi}{(1+\gamma_n)(1-\mathrm{th}^2\,\xi)}\left[\gamma_{n-1}+2\rho+\rho^2\,\gamma_{n-1}\,\mathrm{th}^2\,\xi\right].$$

3. Propriétés de ces polynomes

On a

$$b_n=1-\frac{1-\rho}{1+\gamma_n}.$$

Nous supposons $0<\rho\leqslant 1$. Comme $\mathrm{th}\,(n+1)\,\xi\geqslant\mathrm{th}\,n\xi$, et

$$b_n-b_{n-1}=\alpha_n\frac{\mathrm{sh}\,\xi}{\mathrm{sh}\,n\xi}=\frac{\alpha_n\,\alpha_{n-1}}{(1-\rho)\,\mathrm{ch}\,\xi} \qquad (\rho\neq 1)$$

on aura $b_{n+1}\geqslant b_n$, c'est-à-dire, les conditions du théorème I sont vérifiées. Pour la positivité des b_n il faut poser la condition

$$\frac{b_1}{b_0}>\frac{\mathrm{sh}\,(n-1)\,\xi}{2\,\mathrm{sh}\,n\xi\,\mathrm{ch}\,\xi}$$

qui est sûrement vérifiée dans le cas présent. Les zéros de $P_n(x)$ sont situés dans l'intervalle (2).

Mais on peut aller plus loin, en démontrant que le théorème II est aussi valable pour ces polynomes. En effet, la suite (12) des $\{a_n\}$ est complètement monotone. Posons

$$q_n=\frac{1-\rho}{1+\gamma_n},\quad b_n=1-q_n \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ldots),$$

$$a_n=a_0\prod_{\nu=0}^{n-1}(1-q_\nu) \qquad (a_0>0,\quad q_\nu>0).$$

On a

$$\Delta^{(1)}q_n=q_n-q_{n+1}=\frac{(1-\rho)(\gamma_{n+1}-\gamma_n)}{(1+\gamma_n)(1+\gamma_{n+1})},$$

$$\Delta^{(2)}q_n=\Delta^{(1)}q_n-\Delta^{(1)}q_{n+1}=\frac{(1-\rho)\left[(1+\gamma_{n+2})(\gamma_{n+1}-\gamma_n)-(1+\gamma_n)(\gamma_{n+2}-\gamma_{n+1})\right]}{(1+\gamma_n)(1+\gamma_{n+1})(1+\gamma_{n+2})}.$$

Or

$$\gamma_{n+1}-\gamma_n=\frac{\mathrm{ch}\,\xi}{\mathrm{sh}\,(n+1)\,\xi\,\mathrm{sh}\,n\xi},$$

donc

$$\Delta^{(1)}q_n=\frac{(1-\rho)\,\mathrm{sh}\,\xi\,\mathrm{sh}\,2\xi}{2\,\mathrm{sh}\,(n+1)\,\xi\,\mathrm{sh}\,(n+2)\,\xi},$$

$$\Delta^{(2)} q_n = \frac{(1-\rho)\,\mathrm{sh}^2 \xi \,\mathrm{sh}\, 2\xi \,\mathrm{ch}\,(n+2)\xi}{\mathrm{sh}\,(n+1)\xi \,\mathrm{sh}\,(n+2)\xi \,\mathrm{sh}\,(n+3)\xi},$$

ou

$$\Delta^{(2)} q_n = \frac{2}{1-\rho} q_{n+2} \Delta^{(1)} q_n, \quad \Delta^{(1)} a_n = a_n q_n.$$

Comme $q_n > 0$, $\Delta^{(1)} q_n > 0$, on tire de la première des relations précédentes que $\Delta^{(2)} q_n > 0$, et ainsi de suite, $\Delta^{(k)} q_n > 0$, pour $k = 0, 1, 2, \ldots$ La seconde des relations de tout à l'heure montre alors de la même façon* que l'on a aussi $\Delta^{(k)} a_n \geqslant 0$, et la suite $\{a_n\}$ est complètement monotone. Les polynomes $P_n(x)$, qui contiennent, comme cas particuliers, les polynomes ultrasphériques, fournissent un exemple de polynomes orthogonaux dont les zéros sont situés dans l'intervalle de Stieltjes—Markoff.

Au sujet de ces polynomes $P_n(x)$, on peut encore se proposer de chercher leur expression explicite, de même que l'intervalle et le poids d'orthogonalité. Les polynomes $P_n(x)$ ont l'expression explicite

$$P_n(x) = a_0^2 \begin{vmatrix} 2b_0 x & \lambda_1^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 \ldots 0 & 0 \\ \lambda_1^{\frac{1}{2}} & 2b_1 x & \lambda_2^{\frac{1}{2}} & 0 \ldots 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{\frac{1}{2}} & 2b_2 x & \lambda_3^{\frac{1}{2}} \ldots 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots \lambda_{n-1}^{\frac{1}{2}} & 2b_{n-1} x \end{vmatrix}$$

Les premiers polynomes $P_n(x)$ sont (avec $a_0 \equiv 1$),

$$\begin{aligned}
&P_0(x) = 1, \\
&P_1(x) = 2\, b_0 x, \\
&P_2(x) = 4\, b_0 b_1 x^2 - \lambda_1, \\
&P_3(x) = 8\, b_0 b_1 b_2 x^3 - 2\,(b_0 \lambda_2 + b_2 \lambda_1)\, x, \\
&P_4(x) = 16\, b_0 b_1 b_2 b_3 x^4 - 4\,(b_0 b_1 \lambda_3 + b_0 b_3 \lambda_2 + b_2 b_3 \lambda_1)\, x^2 + \lambda_1 \lambda_3, \\
&P_5(x) = 32\, b_0 b_1 b_2 b_3 b_4 x^5 - 8\,(b_0 b_1 b_2 \lambda_4 + b_0 b_1 b_4 \lambda_3 + b_0 b_3 b_4 \lambda_2 + \\
&\qquad\qquad + b_2 b_3 b_4 \lambda_1)\, x^3 + 2\,(b_0 \lambda_2 \lambda_4 + b_4 \lambda_1 \lambda_3)\, x.
\end{aligned}$$

La question du poids est résolue, en principe, par le problème des moments. Si l'on fait

$$c_{2\nu} = \int x^{2\nu}\, d\psi(x), \quad c_{2\nu+1} = 0 \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

ces moments seront déterminés de proche en proche par $P_{2n}(\bar{c}) = 0$, où l'on a, d'une façon symbolique, $(\bar{c})^{2\nu} = c_{2\nu}$. Les formules précédentes donnent, par exemple,

$$c_2 = \frac{\lambda_1 c_0}{4 b_0 b_1}, \qquad c_4 = \frac{(b_0 \lambda_2 + b_2 \lambda_1)\, \lambda_1 c_0}{16\, b_0^2 b_1^2 b_2}, \text{ etc.}$$

---

* Confronter, pour ce raisonnement, L. Fejér, ([8]), p. 28—29.

Mais, d'une façon explicite, on ne peut pas en tirer la fonction $\psi(x)$ ni la grandeur précise de l'intervalle d'orthogonalité. Sur la qualité de cet intervalle on peut obtenir des informations des expressions de b_n et λ_n, comme on peut le voir p. e. dans la monographie de J. Shohat([4]), p. 41.

Budapest Reçu 10 II 1941

BIBLIOGRAPHIE

[1] F e j é r L., Abschätzungen für die Legendreschen und verwandte Polynome, Mathem. Zeitschr., 24 (1925), 285—298.

[2] S z e g ö G., Orthogonal polynomials, Amer. Mathem. Soc. Coll. Publ., 23 (1939).

[3] F e j é r L., Trigonometrische Reihen und Potenzreihen mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolgen, Trans. of the Amer. Mathem. Soc., 39 (1936), 18—59.

[4] S h o h a t J., Théorie générale des polynomes orthogonaux de Tchebycheff, Mémorial des Sci. Mathem., fasc. 66, Paris, 1934.

Э. ФЕЛЬДХЕЙМ. ОБ ОБОБЩЕННЫХ ПОЛИНОМАХ ЛЕЖАНДРА

(ПЕРЕВОД)

1. Общие понятия об обобщенных полиномах Лежандра по Л. Фейеру

Допустим, что дана бесконечная последовательность действительных чисел $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ С каждой последовательностью $\{a_n\}$ можно связать бесконечную систему полиномов Лежандра $P_n(\cos\theta)$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$, определенную следующим образом *. Образовав степенной ряд

$$F(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n+\ldots,$$

заменяем z через $re^{i\theta}$ и принимаем $|F(re^{i\theta})|^2$ за образующую функцию для полиномов $P_n(\cos\theta)$:

$$|F(re^{i\theta})|^2=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\cos\theta)\,r^n.$$

Таким образом явное выражение полиномов $P_n(\cos\theta)$ в виде ряда из косинусов имеет вид

$$P_n(\cos\theta)=\sum_{k=0}^{n}a_ka_{n-k}\cos(n-2k)\,\theta, \tag{1}$$

где последний член равен a_ν^2 или $2a_\nu a_{\nu+1}\cos\theta$, смотря по тому, будет ли $n=2\nu$ или $n=2\nu+1$. Итак, $P_n(x)$ есть полином n-ой степени четный или нечетный соответственно при четности или нечетности n.

Примеры: a) $F(z)=(1-z)^{-\rho}$, $a_n=\binom{n+\rho-1}{n}$. Тогда $P_n(\cos\theta)$ есть ультрасферический полином.

b) $F(z)=\frac{1}{z}\log\frac{1}{1-z}$, $a_n=\frac{1}{n+1}$. Тогда

$$P_n(\cos\theta)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\cos(n-2k)\,\theta}{(k+1)(n-k+1)}.$$

* См. L. F e j é r ([1]). По поводу других цитированных результатов и дальнейшей библиографии см. G. S z e g ö ([2]).

Напомним следующие две теоремы:

I. (Szegö). Если $a_n > 0$ и последовательность $\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_1}, \ldots, \frac{a_n}{a_{n-1}}, \ldots$ возрастающая, то нули $P_n(x)$ действительные, простые и расположены в интервале $-1 < x < +1$. Если нули будут $x_\nu = \cos\theta_\nu$, то мы имеем неравенство

$$\frac{\nu - \frac{1}{2}}{n+1}\pi < \theta_\nu < \frac{\nu + \frac{1}{2}}{n-1}\pi \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

II. (Fejér). Если $a_n > 0$ и последовательность $\{a_n\}$ вполне монотонная, т. е.

$$\Delta^{(k)} a_n = \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^\nu \binom{k}{\nu} a_{n+\nu} \geqslant 0 \quad (k, n = 0, 1, 2, \ldots),$$

то нули $P_n(\cos\theta)$ удовлетворяют неравенству Стильтьеса

$$\left(\nu - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n} \leqslant \theta_\nu \leqslant \frac{\nu\pi}{n+1} \qquad \left(\nu = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]\right). \tag{3}$$

Знаки равенства будут справедливы только для полиномов Чебышева соответственно первого и второго рода.

Для вполне монотонной последовательности $\{a_n\}$ условия теоремы I, очевидно, выполнены (неравенство Шварца)

2. Условия ортогональности обобщенных полиномов Лежандра

Для того чтобы найти эти условия, мы воспользуемся следующей теоремой ([2]):

Для того чтобы последовательность полиномов $P_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ была ортогональной, необходимо и достаточно, чтобы имело место рекуррентное соотношение

$$2b_n x P_n(x) = P_{n+1}(x) + \lambda_n P_{n-1}(x) \quad (n \geqslant 1, \ \lambda_n > 0). \tag{4}$$

Если $P_n(x)$ есть полином Лежандра, то

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Заменим в (4)

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} T_{n-2k}(x),$$

вспомнив, что

$$2x\, T_n(x) = T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x).$$

Тогда

$$b_n \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} [T_{n-2k+1}(x) + T_{n-2k-1}(x)] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} a_k a_{n-k+1} T_{n-2k+1}(x) + \lambda_n \sum_{k=0}^{n-1} a_k a_{n-k-1} T_{n-2k-1}(x),$$

$$b_n \sum_{k=0}^{n+1} (a_k a_{n-k} + a_{k-1} a_{n-k+1}) T_{n-2k+1}(x) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n+1} (a_k a_{n-k+1} + \lambda_n a_{k-1} a_{n-k}) T_{n-2k+1}(x),$$

где $a_{-1} \equiv 0$. Отождествляя в обеих частях равенства коэффициенты при $T_{n-2k+1}(x)$, получим

$$b_n (a_k a_{n-k} + a_{k-1} a_{n-k+1}) = a_k a_{n-k+1} + \lambda_n a_{k-1} a_{n-k}$$

или, деля на $a_{k-1} a_{n-k}$,

$$b_n (b_{k-1} + b_{n-k}) = b_{k-1} b_{n-k} + \lambda_n,$$

что можно переписать так:

$$\lambda_n = b_n^2 - (b_n - b_{k-1})(b_n - b_{n-k}) \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{5}$$

Это и есть искомое условие.

Мы видим, что произведение в правой части равенства не может зависеть от k, что осуществляется при

$$b_n - b_{k-1} = \alpha_n \frac{g_{n-k+1}^{(n)}}{g_k^{(n)}} \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{5'}$$

В дальнейшем мы докажем правильность этого соотношения. Для разрешения проблемы, что сводится к нахождению b_k и λ_n, мы отправляемся от соотношения

$$\lambda_n = b_n (b_{k-1} + b_{n-k}) - b_{k-1} b_{n-k} \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

которое напишем сначала для $k = n,\ n-1,\ n-2$:

$$\lambda_n = b_n (b_{n-1} + b_0) - b_{n-1} b_0, \quad \lambda_n = b_n (b_{n-2} + b_1) - b_{n-2} b_1,$$
$$\lambda_n = b_n (b_{n-3} + b_2) - b_{n-3} b_2.$$

Ясно, что b_0 (а также b_1) произвольно; мы пока положим $b_0 = 0$, а в дальнейшем вернемся к общему случаю. Тогда получим из трех предыдущих соотношений:

$$b_n = \frac{b_1 b_{n-2}}{b_1 + b_{n-2} - b_{n-1}} = \frac{b_2 b_{n-3}}{b_2 + b_{n-3} - b_{n-1}}; \quad b_{n-1} = \frac{b_1 b_{n-3}}{b_1 + b_{n-3} - b_{n-2}}.$$

Значит

$$b_{n-3} = \frac{b_{n-1}(b_{n-2} - b_1)}{b_{n-1} - b_1}, \qquad b_{n-3} - b_{n-1} = \frac{b_{n-1}(b_{n-2} - b_{n-1})}{b_{n-1} - b_1}$$

и

$$b_n = \frac{b_2 b_{n-1}(b_{n-2} - b_1)}{b_2 (b_{n-1} - b_1) + b_{n-1}(b_{n-2} - b_{n-1})} = \frac{b_2 b_{n-1}(b_{n-2} - b_1)}{b_{n-1}(b_2 + b_{n-2} - b_{n-1}) - b_1 b_2} =$$
$$= \frac{b_1 b_{n-2}}{b_1 + b_{n-2} - b_{n-1}}$$

Из последнего равенства получаем

$$(b_2 - b_1)(b_{n-2} - b_{n-1}) b_{n-1} b_{n-2} = b_1 b_2 (b_{n-2} - b_{n-1})(b_{n-1} - b_1)$$
$$(n = 3, 4, 5, \ldots).$$

Если не все b_n равны, то из этого окончательно получаем

$$b_n = \frac{b_1^2 b_2}{b_1 b_2 - (b_2 - b_1) b_{n-1}} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{6}$$

Но так как b_0 и b_1 (и, как мы видим, также b_2) суть произвольные количества, мы положим в (6)

$$\beta_n = \frac{b_n - b_0}{b_1 - b_0}, \qquad c = \frac{b_2 - b_0}{b_2 - b_1}$$

и таким образом получим

$$\beta_n = \frac{c}{c - \beta_{n-1}} \qquad (\beta_0 = 0,\ \beta_1 = 1,\ n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{7}$$

Покажем теперь, что если b_n определены по формуле (7), то все соотношения (5) удовлетворяются. Можно сразу убедиться, что решение (7) в действительных числах возможно лишь при $c \geqslant 4$. Действительно, β_n определяются при помощи конечной непрерывной дроби. Полагая

$$\delta_n = 1 - \frac{\beta_n}{c} \qquad (\delta_0 = 1;\ n = 1, 2, 3, \ldots),$$

имеем

$$\delta_n = \frac{R_n}{S_n} - 1 = \frac{\frac{1}{c}\big|}{|1} - \frac{\frac{1}{c}\big|}{|1} - \ldots - \frac{\frac{1}{c}\big|}{|1},$$

где

$$R_n = R_{n-1} - \frac{1}{c} R_{n-2}, \qquad S_n = S_{n-1} - \frac{1}{c} S_{n-2},$$

$$R_0 = 1, \quad S_0 = 1 \quad R_1 = 1 - \frac{1}{c}, \quad S_1 = 1.$$

R_n и S_n определяются как корни квадратного уравнения

$$x^2 - x + \frac{1}{c} = 0,$$

т. е.

$$x = \frac{\sqrt{c} \pm \sqrt{c-4}}{2\sqrt{c}}.$$

Положим $c = 4\,\mathrm{ch}^2\,\xi$ (где как раз $c \geqslant 4$). Тогда, замечая, что $\mathrm{th}\,\xi < 1$,

$$R_n = \frac{(1 + \mathrm{th}\,\xi)^{n+2} - (1 - \mathrm{th}\,\xi)^{n+2}}{2^{n+2}\,\mathrm{th}\,\xi}, \quad S_n = \frac{(1 + \mathrm{th}\,\xi)^{n+1} - (1 - \mathrm{th}\,\xi)^{n+1}}{2^{n+1}\,\mathrm{th}\,\xi}$$

и значит

$$\delta_n = 1 - \frac{\beta_n}{4\,\mathrm{ch}^2\,\xi} = \frac{1}{2}\,\frac{(1 + \mathrm{th}\,\xi)^{n+2} - (1 - \mathrm{th}\,\xi)^{n+2}}{(1 + \mathrm{th}\,\xi)^{n+1} - (1 - \mathrm{th}\,\xi)^{n+1}} = \frac{1}{2\,\mathrm{ch}\,\xi}\,\frac{\mathrm{sh}\,(n+2)\,\xi}{\mathrm{sh}\,(n+1)\,\xi},$$

$$\beta_n = 4\,\mathrm{ch}^2\,\xi - 2\,\mathrm{ch}\,\xi\,\frac{\mathrm{sh}\,(n+2)\,\xi}{\mathrm{sh}\,(n+1)\,\xi} = \frac{2\,\mathrm{sh}\,n\xi\,\mathrm{ch}\,\xi}{\mathrm{sh}\,(n+1)\,\xi} = 1 + \frac{\mathrm{sh}\,(n-1)\,\xi}{\mathrm{sh}\,(n+1)\,\xi}.$$

Окончательно решение (6) дается формулой

$$b_n = b_1 + (b_1 - b_0)\,\frac{\mathrm{sh}\,(n-1)\,\xi}{\mathrm{sh}\,(n+1)\,\xi} \qquad (n = 0,\ 1,\ 2, \ldots), \tag{8}$$

где ξ — произвольный параметр $\geqslant 0$, b_0 и b_1 — произвольные величины. Из (8) получаем

$$b_n - b_{k-1} = (b_1 - b_0)\left[\frac{\mathrm{sh}\,(n-1)\,\xi}{\mathrm{sh}\,(n+1)\,\xi} - \frac{\mathrm{sh}\,(k-2)\,\xi}{\mathrm{sh}\,k\xi}\right] = \\ = \frac{(b_1 - b_0)\,\mathrm{sh}\,2\xi}{\mathrm{sh}\,(n+1)\,\xi} \cdot \frac{\mathrm{sh}\,(n-k+1)\,\xi}{\mathrm{sh}\,k\xi}$$

и

$$b_n - b_{n-k} = \frac{(b_1 - b_0)\,\mathrm{sh}\,2\xi}{\mathrm{sh}\,(n+1)\,\xi} \cdot \frac{\mathrm{sh}\,k\xi}{\mathrm{sh}\,(n-k+1)\,\xi}.$$

Мы видим таким образом, что (5′) удовлетворяется при

$$\alpha_n = \frac{(b_1 - b_0)\operatorname{sh} 2\xi}{\operatorname{sh}(n+1)\xi}, \quad g_k^{(n)} = \operatorname{sh} k\xi,$$

и второй коэффициент λ_n рекуррентного соотношения (5) определяется при помощи (5):

$$\lambda_n = b_n^2 - \alpha_n^2 =$$

$$= \left[b_1 + (b_1 - b_0)\frac{\operatorname{sh} 2\xi + \operatorname{sh}(n-1)\xi}{\operatorname{sh}(n+1)\xi} \right] \left[b_1 + (b_1 - b_0)\frac{\operatorname{sh}(n-1)\xi - \operatorname{sh} 2\xi}{\operatorname{sh}(n+1)\xi} \right]$$

или

$$\lambda_n = b_1^2 + 2b_1(b_1 - b_0)\frac{\operatorname{sh}(n-1)\xi}{\operatorname{sh}(n+1)\xi} + (b_1 - b_0)^2\frac{\operatorname{sh}(n-3)\xi}{\operatorname{sh}(n+1)\xi} \quad (n = 3, 4, \ldots). \tag{9}$$

Мы видим, что $\lambda_n > 0$, если $b_1 > b_0$.

Формулы (8) и (9) дают на основании (4) все обобщенные полиномы Лежандра, которые являются ортогональными. Предельный случай $\xi = 0$ приводит к

$$b_n = b_1 + \frac{(b_1 - b_0)(n-1)}{n+1} = \frac{2n}{n+1} b_1 - \frac{n-1}{n+1} b_0$$

Если $2b_1 > b_0$, мы получаем с точностью до множителя ультрасферические полиномы. В общем случае примем два первых коэффициента равными соответствующим коэффициентам в ультрасферическом случае

$$b_0 = \rho, \qquad b_1 = \frac{1+\rho}{2}.$$

Тогда получим

$$b_n = \frac{\operatorname{sh} n\xi \operatorname{ch} \xi + \rho \operatorname{ch} n\xi \operatorname{sh} \xi}{\operatorname{sh}(n+1)\xi} = \frac{\operatorname{th} n\xi + \rho \operatorname{th} \xi}{\operatorname{th} n\xi + \operatorname{th} \xi} = \frac{\dfrac{\operatorname{th} n\xi}{\operatorname{th} \xi} + \rho}{\dfrac{\operatorname{th} n\xi}{\operatorname{th} \xi} + 1}.$$

Положим

$$\frac{\operatorname{th} n\xi}{\operatorname{th} \xi} = \gamma_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots; \quad \gamma_0 = 0, \quad \gamma_1 = 1); \tag{10}$$

таким образом

$$b_n = \frac{\gamma_n + \rho}{\gamma_n + 1} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots; \quad \gamma_0 = 0). \tag{11}$$

Заметим, что $1 < \gamma_n \leqslant n$, что непосредственно следует из

$$\gamma_n = \frac{\binom{n}{1} + \binom{n}{3}\operatorname{th}^2 \xi + \binom{n}{5}\operatorname{th}^4 \xi + \ldots}{1 + \binom{n}{2}\operatorname{th}^2 \xi + \binom{n}{4}\operatorname{th}^4 \xi + \ldots}$$

Для $\xi = 0$, т. е. ультрасферического случая, имеем $\gamma_n = n$

Коэффициенты a_n тогда определяются из $b_n = \frac{a_{n-1}}{a_n}$:

$$a_n + a_0 b_0 b_1 b_2 \ldots b_{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

откуда

$$a_n = a_0 \frac{\rho(\rho+1)(\rho+\gamma_2)(\rho+\gamma_3)\ldots(\rho+\gamma_{n-1})}{1 \cdot 2 \cdot (1+\gamma_2)(1+\gamma_3)\ldots(1+\gamma_{n-1})} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{12}$$

Для $\rho=1$, $b_n=1$; это случай полиномов Чебышева $U_n(x)$. Соотношение (8), кроме того, показывает, что для всякого значения ξ, если $b_1=b_0$, мы имеем $b_n=b_0$, т. е. полиномы $U_n(x)$ (с точностью до множителя равного b_0^n). Тогда для λ_n получим выражение

$$\lambda_n=\frac{1-\gamma_n\,\mathrm{th}^2\xi}{(1+\gamma_n)(1-\mathrm{th}^2\xi)}\,[\gamma_{n-1}+2\rho+\rho^2\gamma_{n-1}\,\mathrm{th}^2\xi].$$

3. Свойства этих полиномов

Имеем

$$b_n=1-\frac{1-\rho}{1+\gamma_n}.$$

Предположим, что $0<\rho\leqslant 1$. Так как $\mathrm{th}\,(n+1)\xi\geqslant \mathrm{th}\,n\xi$ и

$$b_n-b_{n-1}=\alpha_n\frac{\mathrm{sh}\,\xi}{\mathrm{sh}\,n\xi}=\frac{\alpha_n\,\alpha_{n-1}}{(1-\rho)\,\mathrm{ch}\,\xi}\quad(\rho\neq 1)$$

будем иметь $b_{n+1}\geqslant b_n$, т. е. условия теоремы I выполнены. Чтобы числа b_n были положительны, надо поставить условие

$$\frac{b_1}{b_0}>\frac{\mathrm{sh}\,(n-1)\,\xi}{2\,\mathrm{sh}\,n\xi\,\mathrm{ch}\,\xi},$$

которое в рассматриваемом случае, разумеется, выполнимо. Нули $P_n(x)$ расположены в интервале (2).

Но можно пойти дальше, а именно, доказать, что и теорема II верна для этих полиномов. Действительно, последовательность (12) чисел $\{a_n\}$ вполне монотонна. Положим

$$q_n=\frac{1-\rho}{1+\gamma_n},\quad b_n=1-q_n\quad(n=0,\ 1,\ 2,\ldots),$$

$$a_n=a_0\prod_{\nu=0}^{n-1}(1-q_\nu)\quad(a_0>0,\ q_\nu>0).$$

Имеем

$$\Delta^{(1)}q_n=q_n-q_{n+1}=\frac{(1-\rho)(\gamma_{n+1}-\gamma_n)}{(1+\gamma_n)(1+\gamma_{n+1})},$$

$$\Delta^{(2)}q_n=\Delta^{(1)}q_n-\Delta^{(1)}q_{n+1}=$$

$$=\frac{(1-\rho)\,[(1+\gamma_{n+2})(\gamma_{n+1}-\gamma_n)-(1+\gamma_n)(\gamma_{n+2}-\gamma_{n+1})]}{(1+\gamma_n)(1+\gamma_{n+1})(1+\gamma_{n+2})}.$$

Но

$$\gamma_{n+1}-\gamma_n=\frac{\mathrm{ch}\,\xi}{\mathrm{sh}\,(n+1)\,\xi\,\mathrm{sh}\,n\xi},$$

значит

$$\Delta^{(1)}q_n=\frac{(1-\rho)\,\mathrm{sh}\,\xi\,\mathrm{sh}\,2\xi}{2\,\mathrm{sh}\,(n+1)\,\xi\,\mathrm{sh}\,(n+2)\,\xi},$$

$$\Delta^{(2)}q_n=\frac{(1-\rho)\,\mathrm{sh}^2\xi\,\mathrm{sh}\,2\xi\,\mathrm{ch}\,(n+2)\,\xi}{\mathrm{sh}\,(n+1)\,\xi\,\mathrm{sh}\,(n+2)\,\xi\,\mathrm{sh}\,(n+3)\,\xi},$$

или

$$\Delta^{(2)}q_n=\frac{2}{1-\rho}\,q_{n+2}\,\Delta^{(1)}q_n,\quad \Delta^{(1)}a_n=a_nq_n.$$

Так как $q_n>0$, $\Delta^{(1)}q_n>0$, то из первого из предыдущих соотношений следует $\Delta^{(2)}q_n>0,\ldots,\ \Delta^{(k)}q_n>0$ для $k=0,\ 1,\ 2,\ldots$ Второе из

предшествующих соотношений тогда показывает таким же образом*, что мы имеем также $\Delta^{(\varkappa)} a_n \geqslant 0$, и последовательность $\{a_n\}$ вполне монотонна. Полиномы $P_n(x)$, содержащие, как частный случай, ультрасферические полиномы, дают пример ортогональных полиномов, нули которых лежат в интервале Стильтьеса — Маркова.

По поводу этих полиномов $P_n(x)$ можно также поставить себе задачу найти их явное выражение, а также интервал и вес ортогональности. Полиномы $P_n(x)$ имеют такое явное выражение:

$$P_n(x) = a_0^2 \begin{vmatrix} 2b_0x & \lambda_1^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 \ldots 0 & 0 \\ \lambda_1^{\frac{1}{2}} & 2b_1x & \lambda_2^{\frac{1}{2}} & 0 \ldots 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{\frac{1}{2}} & 2b_2x & \lambda_3^{\frac{1}{2}} \ldots 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots \lambda_{n-1}^{\frac{1}{2}} & 2b_{n-1}x \end{vmatrix}$$

Первые полиномы $P_n(x)$ таковы (считаем $a_0 \equiv$

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, \\ P_1(x) &= 2b_0x, \\ P_2(x) &= 4\, b_0b_1x^2 - \lambda_1, \\ P_3(x) &= 8\, b_0b_1b_2x^3 - 2(b_0\lambda_2 + b_2\lambda_1)\,x, \\ P_4(x) &= 16\, b_0b_1b_2b_3x^4 - 4(b_0b_2\lambda_3 + b_0b_3\lambda_2 + b_2b_3\lambda_1)\,x^2 + \lambda_1\lambda_3, \\ P_5(x) &= 32\, b_0b_1b_2b_3b_4x^5 - 8(b_0b_1b_2\lambda_4 + b_0b_1b_4\lambda_3 + b_0b_3b_4\lambda_2 + \\ &\quad + b_2b_3b_4\lambda_1)\,x^3 + 2(b_0\lambda_2\lambda_4 + b_4\lambda_1\lambda_3)x. \end{aligned}$$

Проблема о весе, в принципе, разрешается проблемой моментов. Если положить

$$c_{2\nu} = \int x^{2\nu} d\psi(x), \quad c_{2\nu+1} = 0 \quad (\nu = 0,\ 1,\ 2, \ldots),$$

то моменты последовательно определяются при помощи $P_{2n}(\bar{c}) = 0$, где символически $(\bar{c})^{2\nu} = c_{2\nu}$. Из предыдущих формул например получаем

$$c_2 = \frac{\lambda_1 c_0}{4b_0b_1}, \quad c_4 = \frac{(b_0\lambda_2 + b_2\lambda_1)\,\lambda_1 c_0}{16b_0^2b_1^2b_2} \text{ и т. д.}$$

Но отсюда нельзя извлечь в явной форме ни функцию $\psi(x)$ ни точную величину интервала ортогональности. О качестве этого интервала можно судить по выражениям b_n и λ_n, как это видно например из книги Шохата [4], стр. 41.

Будапешт

Поступило 10 II 1941

---

* Ср. по поводу этого рассуждения L. Fejér [3], стр. 28—29.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 5 (1941), 255—262 Série mathématique

В. Д. КУПРАДЗЕ

К ТЕОРИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИНТЕГРАЛОМ В СМЫСЛЕ ГЛАВНОГО ЗНАЧЕНИЯ ПО КОШИ

(*Представлено академиком* С. Л. Соболевым)

Для одномерного интегрального уравнения с сингулярным ядром и с интегралом в смысле главного значения по Коши доказывается теорема, аналогичная третьей теореме Фредгольма, и теорема о разности числа фундаментальных решений двух союзных уравнений.

Пусть γ — простой замкнутый контур, имеющий в каждой точке ограниченную кривизну: s и t — комплексные координаты точек, лежащих на γ; $a(s)$, $c(s)$, $K(s,t)$, $B(s,t)$, $f(s)$ — заданные на γ функции, удовлетворяющие условию Гельдера; $\varphi(s)$ — искомая функция, также удовлетворяющая условию Гельдера. Тогда наиболее общий вид линейного одномерного интегрального уравнения с интегралом в смысле главного значения по Коши будет

$$K\varphi(s) \equiv a(s)\varphi(s) - \lambda\ c(s)\int_\gamma \left[\frac{K(s,t)}{t-s} + B(s,t)\right]\varphi(t)\,dt = f(s).$$

Обозначив

$$K(s,s)\,c(s) = b(s), \quad \frac{K(s,t)-K(s,s)}{t-s} + B(s,t) = A(s,t),$$

можно написанному уравнению придать вид

$$K\varphi(s) \equiv a(s)\varphi(s) - \lambda\, b(s)\int_\gamma \left[\frac{1}{t-s} + A(s,t)\right]\varphi(t)\,dt = f(s). \tag{1}$$

Однородное уравнение, соответствующее (1), будет

$$K\varphi(s) = 0. \tag{2}$$

Уравнение, получающееся из данного путем транспозиции переменных в ядре, будем обозначать чертой над оператором; так что союзное с (1) уравнение будет

$$\bar{K}\bar{\varphi}(s) \equiv a(s)\bar{\varphi}(s) - \lambda\int_\gamma b(t)\left[\frac{1}{s-t} + A(t,s)\right]\bar{\varphi}(t)\,dt = 0. \tag{3}$$

Обозначим через k и $\bar{k}$ соответственно числа линейно независимых решений (2) и (3).

Теория уравнений типа (1), (2) опирается на следующие теоремы.

ТЕОРЕМА А. *Если*

$$a^2(s) + \lambda^2\pi^2\, b^2(s) \neq 0 \quad (s \in \gamma), \tag{4}$$

то существует оператор L *типа* K *такой, что уравнение* $LK\varphi(s) = Lf(s)$ *будет регулярным или квазирегулярным уравнением Фредгольма 2-го рода.*

ТЕОРЕМА В. *Для того чтобы уравнение* (1) *приводилось к эквивалентному уравнению Фредгольма, необходимо и достаточно, чтобы*

$$n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} d \log \frac{a(s) + \lambda\pi i\, b(s)}{a(s) - \lambda\pi i\, b(s)} \geqslant 0. \tag{5}$$

ТЕОРЕМА С. *Необходимым и достаточным условием существования решения уравнения* (1) *являются* $\bar{k}$ *равенств*

$$\int_{\gamma} \varphi(s)\,\bar{\varphi}_i(s)\,ds = 0, \tag{6}$$

где $\bar{k}$ — *функции* $\bar{\varphi}_i(s)$, $i = 1, 2, \ldots, \bar{k}$, *суть фундаментальные решения уравнения* $\bar{K}\bar{\varphi}(s) = 0$.

ТЕОРЕМА D.

$$k - \bar{k} = 2n. \tag{7}$$

Из теоремы А следует, что k и $\bar{k}$ ограниченные числа.

Все указанные теоремы более или менее полно были сформулированы Ф. Нетером в 1921 г. ([1]). Но данные им доказательства этих теорем неполны и чрезвычайно туманны. Кроме того, доказательства Нетера неприменимы к ядрам рассматриваемого нами типа, так как Нетер, изучая ядра вида $\operatorname{ctg}\frac{t-s}{2} + A(t,s)$, предполагает ограниченность выражения $\iint [A(t,s)]^2\, ds\, dt$. В нашем случае это условие не выполнено, ибо интеграл $\iint \left[\frac{1}{t-s} - \operatorname{ctg}\frac{t-s}{2}\right]^2 dt\, ds$, как нетрудно проверить, есть расходящийся интеграл ([4]).

После работы Нетера уравнениям типа (1) посвящался ряд работ, в частности, обширные исследования Г. Жиро ([2]), который, пользуясь чрезвычайно сложным и длинным приемом, получает некоторые теоремы Нетера. Доказательство теоремы В дано С. Г. Михлиным ([3]), а затем И. Н. Векуа ([5]).

Ниже мы имеем в виду дать простые доказательства теорем С и D.

Пусть $\omega(s)$ есть решение уравнения

$$L\omega(s) \equiv a(s)\,\omega(s) + \lambda\, b(s) \int_{\gamma} \left[\frac{1}{t-s} - A(t,s)\right] \omega(t)\, dt = 0. \tag{8}$$

Делая в уравнении (3) замену

$$\omega(s) = b(s)\,\bar{\varphi}_i(s), \tag{9}$$

получим

$$a(s)\,\omega(s) + \lambda\, b(s) \int_{\gamma} \left[\frac{1}{t-s} - A(t,s)\right] \omega(t)\, dt = 0.$$

Следовательно уравнение (8) имеет по крайней мере столько же решений, сколько и уравнение (3). К числу этих решений относятся все функции

$$\omega_i(s) = b(s)\bar{\varphi}_i(s), \qquad (i=1, 2, \ldots, \bar{k}).$$

Число всех решений (8) обозначим через $\bar{\bar{k}}$, очевидно $\bar{\bar{k}} \geqslant \bar{k}$.

Из уравнения (8) следует, что функции $\frac{\omega_i(s)}{b(s)}$ должны быть ограничены и удовлетворяют уравнению (3); значит $\bar{\bar{k}} = \bar{k}$.

Функции $\sqrt{b(s)}\,\bar{\varphi}_i(s)$ $(i=1, 2, \ldots, \bar{k})$ линейно независимы, и детерминант Грамма, им соответствующий,

$$\left|\left\{\int_\gamma b(s)\bar{\varphi}_i(s)\bar{\varphi}_j(s)\,ds\right\}\right| \neq 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, \bar{k}), \tag{10}$$

отличен от нуля. Композиция $L\,K\,\varphi(s)$ может содержать полярности только ниже первого порядка. Действительно, элементарные вычисления показывают, что

$$L\,K\,\varphi(s) \equiv [a^2(s) + \lambda^2\pi^2 b^2(s)]\,\varphi(s) + \lambda\int_\gamma K^*(s, t)\,\varphi(t)\,dt,$$

где

$$K^*(s, t) = \frac{a(t)\,b(t) - a(s)\,b(s)}{t-s} + b(s)\left[\lambda\int_\gamma b(\tau)\,A(\tau, s)\,A(\tau, t)\,d\tau - \right.$$

$$\left. - a(s)\,A(s, t) - a(t)\,A(t, s)\right] - \int_\gamma \frac{b(\tau)}{t-\tau}\left[\frac{1}{\tau-s} - \lambda\,b(s)\,A(\tau, s)\right]d\tau.$$

С другой стороны, при тех предположениях, которые нами сделаны относительно $A(s, t)$ и $b(s)$, нетрудно показать, что

$$\left.\begin{aligned} &\int_\gamma \frac{b(\tau)}{(\tau-s)(t-\tau)}\,d\tau = 0\left[\frac{1}{|s-t|^\alpha}\right], \qquad \alpha < 1, \\ &\int_\gamma \frac{A(\tau, s)\,b(\tau)}{t-\tau}\,d\tau = 0\left[\frac{1}{|s-t|^\beta}\right], \qquad \beta < 1. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Следовательно уравнение

$$L\,K\,\varphi(s) = L\,f(s) \tag{12}$$

представляет линейное квазирегулярное уравнение Фредгольма. Поэтому уравнение

$$K\,\varphi(s) = f(s) \tag{13}$$

может иметь только конечное число линейно независимых решений.

Аналогично показывается, что уравнение

$$\bar{K}\,\bar{\varphi}(s) = 0 \tag{14}$$

допускает только конечное число независимых решений; пусть эти решения будут $\bar{\varphi}_i(s)$ $(i=1, 2, \ldots, \bar{k})$.

Доказательство теоремы С. Пусть уравнение (1) имеет решение. Тогда можем написать систему равенств

$$\int_\gamma f(s)\,\bar{\varphi}_i(s)\,ds = \int_\gamma \bar{\varphi}_i(s)\,K\,\varphi(s)\,ds = \int_\gamma \varphi(s)\,\bar{K}\,\bar{\varphi}_i(s)\,ds = 0,$$

и необходимость условий

$$\int_{\gamma} f(s)\, \overline{\varphi}_i(s)\, ds = 0 \tag{15}$$

доказана.

Для доказательства достаточности рассмотрим следующие случаи: 1) $LK\varphi(s) = 0$ имеет только нулевое решение ($r = 0$; r — число ненулевых решений), причем a) $\overline{k} = 0$ или b) $\overline{k} \neq 0$; 2) $LK\varphi(s) = 0$ имеет r отличных от нуля линейно независимых решений, причем a) $\overline{k} = 0$ или b) $\overline{k} \neq 0$.

1a) $r = 0$, $\overline{k} = 0$. Условия (15) выполнены; из (13), которое разрешимо вследствие условия $r = 0$, имеем $L[K\varphi(s) - f(s)] = 0$, откуда по условию $\overline{k} = 0$, получаем $K\varphi(s) = f(s)$.

1b) $r = 0$, $\overline{k} \neq 0$. Из уравнения (12), согласно с (9), теперь имеем

$$K\varphi(s) - f(s) = \sum_{i=1}^{\overline{k}} c_i\, b(s)\, \overline{\varphi}_i(s), \tag{16}$$

где c_i — определенные постоянные. Умножая (16) на $\overline{\varphi}_j(s)\, ds$, интегрируя по γ и принимая во внимание условия (15), получаем

$$\sum_{i=1}^{\overline{k}} g_{ij} c_i = 0 \qquad \left(g_{ij} = \int_{\gamma} b(s)\, \overline{\varphi}_i(s)\, \overline{\varphi}_j(s)\, ds\right),$$

откуда, по свойству детерминанта Грамма, имеем $c_i = 0$ ($i = 1, 2, \ldots, \overline{k}$), и наконец, из (16) $K\varphi(s) = f(s)$.

2a) $r \neq 0$, $\overline{k} = 0$. Уравнение, получающееся из уравнения $LK\varphi(s) = 0$ транспозицией переменных в ядре $\overline{LK}\psi(s) = 0$, имеет r решений; следовательно уравнение

$$\overline{K}\,\overline{L}\,\psi(s) \equiv \overline{LK}\,\psi(s) = 0 \tag{17}$$

также имеет r решений; обозначим эти решения через $\psi_i(s)$ ($i = 1, 2, \ldots, r$). Условия (15) выполнены. Для разрешимости (12) теперь необходимо и достаточно r условий

$$\int_{\gamma} \psi_i(s)\, L f(s)\, ds = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, r). \tag{18}$$

Эти условия выполняются автоматически; действительно, вследствие условия $\overline{k} = 0$ из (17) следует $\overline{L}\psi_j(s) = 0$ ($j = 1, 2, \ldots, r$), поэтому

$$\int_{\gamma} \psi_j(s)\, L f(s)\, ds = \int_{\gamma} f(s)\, \overline{L}\psi_j(s)\, ds = 0.$$

Следовательно (13) разрешимо, и так как $\overline{k} = 0$, из $L[K\varphi(s) - f(s)] = 0$ следует $K\varphi(s) = f(s)$.

2b) $r \neq 0$, $\overline{k} \neq 0$. Теперь из (17) следует, что

$$\overline{L}\psi_j(s) = \sum_{i=1}^{\overline{k}} e_{ij}\, \overline{\varphi}_i(s) \qquad (j = 1, 2, \ldots, r);$$

поэтому условия разрешимости (12) снова выполнены, так как

$$\int_{\gamma} \psi_j(s)\, L f(s)\, ds = \int_{\gamma} f(s)\, \overline{L}\, \psi_j(s)\, ds = \sum_{i=1}^{\overline{k}} e_{ij} \int_{\gamma} f(s)\, \overline{\varphi}_i(s)\, ds = 0$$

согласно с (15). Таким образом из (12), по условию $\overline{k} \neq 0$, следует

$$K\varphi(s) - f(s) = \sum_{i=1}^{\overline{k}} d_i\, b(s)\, \overline{\varphi}_i(s);$$

отсюда, повторяя рассуждения, примененные в случае 1b, получаем $d_i = 0$, и следовательно $K\varphi(s) = f(s)$. Теорема C доказана полностью.

Из наших рассуждений следует, что при выполнении условий (4) и (15) уравнение (1) всегда приводится к эквивалентному и разрешимому линейному неоднородному уравнению Фредгольма 2-го рода.

Доказательство теоремы D. Пусть

$$a^2(s) + \lambda^2\pi^2 b^2(s) \neq 0. \tag{19}$$

Составим два союзных сингулярных уравнения

$$L\omega(s) \equiv a(s)\,\omega(s) + \lambda\, b(s) \int_{\gamma} \frac{\omega(t)}{t-s}\, dt = 0, \tag{20}$$

$$\overline{L}\,\overline{\omega}(s) \equiv a(s)\,\overline{\omega}(s) - \lambda \int_{\gamma} b(t)\, \frac{\overline{\omega}(t)}{t-s}\, dt = 0. \tag{21}$$

Пользуясь приемом, указанным Карлеманом [4], покажем, что (20) эквивалентно задаче Римана: найти кусочно-голоморфную * на плоскости $z = x + iy$ функцию $\Psi(z)$, удовлетворяющую на γ граничному условию

$$\Psi_a(s) = \frac{a(s) + \lambda\pi i\, b(s)}{a(s) - \lambda\pi i\, b(s)}\, \Psi_i(s); \tag{22}$$

здесь значки a и i при функции $\Psi(z)$ указывают на предельные значения соответственно извне и изнутри.

Будем искать $\Psi(z)$ в виде

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(t)}{t-z}\, dt;$$

тогда на основании известных свойств интегралов типа Коши

$$\Psi_i(s) = \frac{1}{2}\varphi(s) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(t)}{t-s}\, dt; \quad \Psi_a(s) = -\frac{1}{2}\varphi(s) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(t)}{t-s}\, dt$$

условие (22) непосредственно приводит для $\varphi(s)$ к интегральному уравнению (20).

---

* Кусочно-голоморфной называем функцию, голоморфную на всей плоскости, за исключением точек γ, и непрерывно продолжимую вплоть до контура изнутри и извне.

Очевидно также обратное: имея решение задачи Римана, будем иметь в виде разности

$$\Psi_i(s) - \Psi_a(s) = \varphi(s) \tag{23}$$

также и решение уравнения (20)*.

Известно, что указанная здесь задача Римана решается элементарно и имеет ([6]) 1° только нулевое решение, если $n < 0$, 2° $2n$ линейно независимых решений, если $n \geqslant 0$. Заметим, что решения могут быть выписаны в явном и замкнутом виде при помощи интегралов типа Коши. Знак n очевидно зависит от коэффициентов $a(s)$ и $b(s)$ в уравнении (1).

Рассмотрим случай 1°:

$$\operatorname{Ind} K = n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} d \log \frac{a(s) + \lambda\pi i\, b(s)}{a(s) - \lambda\pi i\, b(s)} < 0. \tag{24}$$

Тогда на основании сказанного об эквивалентности уравнения (20) и задачи Римана, которая в этом случае имеет только тривиальное решение, заключаем, что уравнение $L\omega(s) = 0$ имеет единственное решение $\omega(s) \equiv 0$.

Уравнение (21) теперь будет иметь $2n$ решений; в самом деле, сделав в (21) замену

$$\tau(s) = b(s)\,\bar{\omega}(s), \tag{25}$$

приведем его к виду

$$a(s)\,\tau(s) - \lambda\, b(s) \int\limits_{\gamma} \frac{\tau(t)}{t-s}\, dt = 0. \tag{26}$$

Но это уравнение есть уравнение (20), в котором λ заменено на $-\lambda$. Следовательно индекс уравнения (26)

$$n' = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} d \log \frac{a(s) - \lambda\pi i\, b(s)}{a(s) + \lambda\pi i\, b(s)} = -n > 0, \tag{27}$$

и уравнение (26), а вместе с ним и (21) имеют $2n' = |2n|$ решений.

Очевидно уравнения $K\varphi(s) = 0$ и $LK\varphi(s) = 0$ эквивалентны; ибо если бы последнее имело решение $\varphi^*(s)$, не являющееся решением первого, то мы имели бы $L\omega^*(s) = 0$, где $\omega^*(s) = K\varphi^*(s) \neq 0$, что противоречит условию об отсутствии нетривиальных решений у $L\omega(s) = 0$.

Поэтому, на основании легко проверяемого равенства** $\overline{LK} = \bar{K}\bar{L}$, заключаем, что уравнение Фредгольма $\bar{K}\bar{L}\varphi(s) = 0$ имеет k решений $\psi_i(s)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$.

Так как $\bar{L}\psi = 0$ имеет $|2n|$ решений, очевидно $k \geqslant |2n|$. Пусть $k > |2n|$ и пусть последние $|2n|$ функции $\psi_i(s)$ $(i = k - |2n| + 1, k - |2n| + 2, \ldots, k)$ суть решения уравнения $\bar{L}\psi(s) = 0$; тогда

$$\bar{L}\psi_i(s) = \sum_{j=1}^{\bar{k}} \alpha_j^i\, \bar{\varphi}_j(s), \quad i = 1, 2, 3, \ldots, k - |2n|. \tag{28}$$

---

* Речь идет конечно о решениях, удовлетворяющих условию Гельдера.

** Чертой над заглавными буквами всегда указывается на транспозицию переменных в ядре.

Так как $(k-|2n|)$ функций $\psi_i(s)$ $(i=1, 2, \ldots, k-|2n|)$ линейно независимы, то они не могут быть выражены в виде линейного аггрегата меньшего числа линейно независимых функций; таким образом из (28) следует $\overline{k} \geqslant k-|2n|$.

Пусть $\overline{\varphi}_{k-|2n|+1}(s)$ есть какое-либо решение уравнения

$$\overline{K}\,\overline{\varphi}(s)=0.$$

Рассмотрим уравнение

$$\overline{L}\,\psi^*(s)=\overline{\varphi}_{k-|2n|+1}(s). \tag{29}$$

Необходимые и достаточные условия его разрешимости выполнены, так как уравнение $L\,\omega(s)=0$ имеет только нулевое решение; но, найдя $\psi^*(s)$ из (29), мы могли бы присоединить его к решениям уравнения $\overline{K}\,\overline{L}\,\psi(s)=0$, которое таким образом имело бы не k, а $k+1$ решений: $\psi_1(s), \psi_2(s), \ldots, \psi_k(s), \psi^*(s)$, причем очевидно $\psi^*(s)$ не есть линейная комбинация предшествующих функций.

Из этого противоречия вытекает, что $\overline{k}=k-|2n|$ или

$$\overline{k}-k=|2n|. \tag{30}$$

Можно вести доказательство отдельно для случая $n>0$. Укажем его вкратце. Теперь уравнение $L\,\omega(s)=0$ имеет $2n$ решений, а $\overline{L}\,\overline{\omega}(s)=0$ не имеет вовсе ненулевых решений.

Рассмотрим уравнение $K\,L\,\omega(s)=0$ (в отличие от композиции LK, которою мы пользовались в случае 1°). Легко убедиться, что композиция KL также регулярна и типа Фредгольма. Это уравнение имеет $(2n+k)$ линейно независимых решений. Действительно, $2n$ из них — это известные решения уравнения $L\,\omega(s)=0$ (решения задачи Римана).

Рассмотрим уравнения $L\,\omega_i^*(s)=\varphi_i(s)$ $(i=1, 2, \ldots, k)$. Вследствие теоремы A, они разрешимы, и k функций $\omega_i^*(s)$, найденные отсюда, будут остальными k решениями уравнения $K\,L\,\omega(s)=0$. Следовательно уравнение $\overline{KL}\,\psi(s)\equiv\overline{L}\,\overline{K}\,\psi(s)=0$ тоже имеет $(2n+k)$ решений; с другой стороны, это уравнение допускает только $\overline{k}$ решений, ибо $\overline{L}\,\overline{\omega}(s)=0$ имеет только нулевое решение. Таким образом $\overline{k}=2n+k$ или

$$\overline{k}-k=2n. \tag{31}$$

Очевидно равенства (30) и (31) можно объединить в одно равенство

$$\overline{k}-k=2n,$$

где n — целое положительное или отрицательное число, и теорема D доказана.

В следующей статье мы дадим доказательство теорем A, B, C, D для того случая, когда γ есть незамкнутый контур.

Математический институт
Академии Наук Грузинской ССР

Поступило
11 I 1940

ЛИТЕРАТУРА

1. Noether F., Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen, Math. Ann., 82 (1921), 42—63.
2. Giraud G., Sur une classe d'équations linéaires où figurent des valeurs principales d'intégrales etc. ..., Ann. de l'École Norm. Sup., 51, f. 3, 4 (1934), 255—292, 293—372; 53, f. 1(1936), 2—40; 56, f. 2 (1939), 120—172.
3. Михлин С. Г., Sur une certaine classe d'équations intégrales singulières, Докл. Ак. Наук СССР, XXIV (1939), 315—317.
4. Carlemann T., Sur la résolution de certaines équations intégrales, Arkiv för Matem. Astron. och Fysik, B. 16, No. 26, (1922), 2—19.
5. Векуа И. Н., О сингулярных интегральных уравнениях, содержащих интегралы в смысле главного значения по Коши, Докл. Ак. Наук СССР, XXVI, No. 4 (1940), 335—338.
6. Гахов Ф. Д., Линейные краевые задачи теории функций комплексного переменного. Известия Казанск. унив., X., сер. 3 (1938), 39—79.

V. KUPRADZE. ZUR THEORIE DER INTEGRALGLEICHUNGEN MIT DEM INTEGRAL IM SINNE DES CAUCHYSCHEN HAUPTWERTES

ZUSAMMENFASSUNG

Es werden Integralgleichungen der Gestalt

$$K\varphi(s) \equiv a(s)\varphi(s) - \lambda\, b(s)\int\limits_{\gamma} \frac{K(s,t)}{t-s}\varphi(t)\,dt = f(s) \tag{1}$$

untersucht, wobei γ eine glatte, geschlossene Randkurve ist und die Funktionen $a(s)$, $b(s)$, $K(s,t)$, $f(s)$ der Hölderschen Bedingung genügen.

Es seien $K\varphi(s)=0$ und $\overline{K}\overline{\varphi}(s)=0$ zwei assoziierte, singuläre homogene Integralgleichungen der angegebenen Art; k resp. $\overline{k}$ sei die Anzahl ihrer linear unabhängigen Lösungen. In der vorliegenden Arbeit werden neue Beweise für die folgenden Sätze gegeben:

Satz A. *Für die Lösbarkeit von* (1) *ist das Bestehen der Gleichungen*

$$\int\limits_{\gamma} f(s)\overline{\varphi}_i(s)\,ds = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, \overline{k}$$

notwendig und hinreichend.

Satz B.

$$k - \overline{k} = 2n,$$

wo

$$n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} d\log\frac{a(s)+\lambda\pi i A(s)}{a(s)-\lambda\pi i A(s)}$$

und

$$A(s) = b(s)K(s,s)$$

ist.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Серия математическая 5 (1941), 263—268 Série mathématique

С. Ф. ЛИДЯЕВ

О ПРЕДСТАВИМОСТИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ВИДЕ ИНТЕГРАЛА ПУАССОНА

(Представлено академиком С. Л. Соболевым)

В статье доказывается существование почти всюду предельных значений интеграла Пуассона с бесконечными пределами при t, стремящемся к нулю, и даются необходимые и достаточные условия представимости решения уравнения теплопроводности в виде интеграла Пауссона—Стильтьеса и в виде интеграла Пауссона—Лебега.

Решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \tag{1}$$

удовлетворяющее условию $u(x, 0) = \varphi(x)$ при некоторых предположениях о функции $\varphi(x)$, дается обычно в форме интеграла Пуассона

$$P(x, t) = u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} \varphi(\xi)\, d\xi \quad (t > 0). \tag{2}$$

Из работы А. Н. Тихонова (¹) известно, что если для некоторой суммируемой функции этот интеграл сходится для значений x_0, t_0, то он сходится для всех значений x, t, когда $t < t_0$.

Исследуем предельные значения интеграла Пуассона при $t \to 0$ и условия представимости решения уравнения (1) в подобном виде. Аналогичные задачи для уравнения Лапласа были исследованы Фату (²), И. И. Приваловым (³, ⁴), однако отличие нашей задачи от предшествующих заключается в том, что пределы интеграла бесконечны, что существенно меняет метод исследования. Задача, разрешенная в настоящей работе, была поставлена А. Н. Тихоновым и при выполнении ее я пользовался его консультацией.

ТЕОРЕМА 1. *Если интеграл* (2) *сходится для некоторых значений* x_0, t_0, *то при* $t \to 0$ $u(x, t)$ *стремится к* $\varphi(x)$ *в тех точках, где* $\varphi(x)$ *является производной своего неопределенного интеграла, т. е. почти всюду.*

Доказательство. Следуя А. Н. Тихонову (¹), представим интеграл (2) в виде

$$P(x, t) = u(x, t) = -\int_{-\infty}^{+\infty} M(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \omega(\xi, x, t, x_0, t_0)\, d\xi, \tag{2'}$$

где положено

$$M(\xi)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{\xi}\frac{1}{\sqrt{t_0}}e^{-\frac{(x_0-\xi)^2}{4t_0}}\varphi(\xi)\,d\xi,$$

$$\omega(\xi,x,t,x_0,t_0)=\frac{\sqrt{t_0}}{\sqrt{t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}+\frac{(x_0-\xi)^2}{4t_0}},$$

причем функция $M(\xi)$ ограничена. Интеграл (2′) разобьем на сумму интегралов

$$u(x,t)=-\int_{-\infty}^{x_0-\varepsilon}-\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon}-\int_{x_0+\varepsilon}^{\infty},$$

подинтегральное выражение которых одно и то же, а именно:

$$M(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\omega(\xi,x,t,x_0,t_0)\,d\xi.$$

Оценка каждого из трех последних интегралов дает, что при $t\to\infty$ первый и третий стремятся к нулю, а второй — к $\varphi(x)$, что и доказывает теорему.

Аналогичная теорема доказывается и для интеграла Пуассона — Стильтьеса

$$P(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}d\varphi(e), \tag{3}$$

где функция $\varphi(e)$ ограниченной вариации, e — конечное множество, а именно:

ТЕОРЕМА 2. *Если интеграл Пуассона — Стильтьеса* (3) *сходится для некоторых значений* x_0, t_0, *то для всякой точки* x, *для которой существует предел*

$$\lim\frac{\varphi(\omega)}{\operatorname{mes}\omega}=f(x_0),$$

также существует предельное значение $\lim\limits_{t\to 0}u(x_0,t)$, *равное* $f(x_0)$, *т. е. предельное значение существует почти всюду.*

Доказательство аналогично доказательству первой теоремы.

Изучим теперь класс решений уравнения (1), представимых при помощи интеграла Пуассона.

ТЕОРЕМА 3. *Если интеграл Пуассона* (2) *сходится для некоторых значений* x_0, t_0, *то существуют такие положительные числа* c *и* k, *что*

$$|P(x,t)|e^{-cx^2}<\frac{k}{\sqrt{t}}\quad(\text{для } 0<t\leqslant t_0).$$

Доказательство. Представляя интеграл (2) в виде формулы (2′) и пользуясь тем, что функция $M(\xi)$ ограниченная, будем иметь

$$|P(x,t)|<k\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial\omega}{\partial\xi}\right|d\xi.$$

А так как $\omega(\xi,x,t,x_0,t_0)$ — положительная функция, то

$$\frac{\partial\omega}{\partial\xi}\geqslant 0\qquad\text{при } \xi\geqslant\frac{xt_0-x_0t}{t_0-t}.$$

Следовательно

$$k\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial\omega}{\partial\xi}\right|d\xi = k\frac{\sqrt{t_0}}{\sqrt{t}}\,e^{\frac{(x-x_0)^2}{4(t_0-t)}},$$

откуда

$$|P(x,t)|\,e^{-cx^2} < \frac{k}{\sqrt{t}}\,.$$

ТЕОРЕМА 4. *Если интеграл Пуассона (2) сходится для некоторых значений x_0, t_0, то существует такая* const $c > 0$, *что интеграл*

$$\int\limits_{N}^{\infty} e^{-cx^2} P(x,t)\,dx < \eta(N), \tag{4}$$

т. е. что интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-cx^2} P(x,t)\,dx$ *сходится равномерно относительно* t, $0 \leqslant t \leqslant t_0 - \varepsilon_0$, *для всех* x.

Доказательство. Левая часть выражения (4), которую мы обозначим через I, может быть представлена в виде

$$I = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} M(\xi)\,A(\xi,t)\,d\xi - \int\limits_{-\infty}^{\infty} M(\xi)\,B(\xi,t)\,d\xi = I_1 + I_2,$$

где

$$A(\xi,t) = -2\frac{\sqrt{t_0}}{\sqrt{t}}\,e^{\frac{(x_0-\xi)^2}{4t_0}}\,\frac{(x_0-\xi)}{4t_0}\int\limits_{N}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\,dx,$$

$$B(\xi,t) = -2\frac{\sqrt{t_0}}{\sqrt{t}}\,e^{\frac{(x_0-\xi)^2}{4t_0}}\int\limits_{N}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}-cx^2}\cdot\frac{(x-\xi)}{4t}\,dx\,.$$

Оценивая интегралы I_1 и I_2, получим

$$|I_1| < \text{const}\cdot\sqrt{t}\int\limits_{N}^{\infty} e^{-x^2\left(c-\frac{1}{4\varepsilon_0}\right)}\,dx,$$

$$|I_2| < \text{const}\cdot\Big(e^{-\alpha N^2} + \int\limits_{N}^{\infty} x\,e^{-cx^2+\frac{(x-x_0)^2}{4(t_0-t)}}\,dx\Big)\,.$$

Отсюда можно видеть, что как $|I_1|$, так и $|I_2|$ стремятся равномерно к нулю при $N \to \infty$ при всех t, $t < t_0 - \varepsilon_0$ (эта оценка справедлива для любого N, в частности и для $N = 0$). Этим теорема доказывается полностью.

ТЕОРЕМА 5. *Для того чтобы* $u(x,t) > 0$, *положительное решение уравнения* (1), *определенное в области* $0 < t \leqslant t_0$, $-\infty < x < +\infty$, *могло быть представлено в виде интеграла Пуассона — Стильтьеса*

$$u(x,t) = P(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{t}}\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\,d\varphi(e)$$

с помощью функции $\varphi(e)$ *с ограниченной вариацией, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие* c, k *и* $\delta(N)$, *что*

$$1)\quad |u(x,t)|\,e^{-cx^2} < \frac{k}{\sqrt{t}}\,;\qquad 2)\quad \int\limits_{N}^{\infty} e^{-cx^2}\,u(x,t)\,dx < \delta(N)\,.$$

Доказательство. Положим

$$\varphi(e, \varepsilon) = \int_e u(x, \varepsilon)\, dx,$$

где e — любое открытое конечное множество. Семейство функций $\varphi(e, \varepsilon)$ образует последовательность аддитивных, неубывающих, равномерно ограниченных функций. Это семейство будет компактным, следовательно

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(e, \varepsilon_n) = \varphi(e).$$

Рассмотрим функцию

$$P(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t-\varepsilon}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\varepsilon)}} u(\xi, \varepsilon)\, d\xi .$$

В силу условия теоремы и теоремы единственности [1] будем иметь, что $P(x, t) = u(x, t)$ для $\varepsilon \leqslant t \leqslant t_0 - \varepsilon_0$. Тогда замечая, что

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\varphi(e) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-N}^{N} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\varphi(e).$$

Легко доказать, что разность

$$u(x, t) - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-N}^{N} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\varphi(e)$$

стремится к нулю при $N \to \infty$, что и доказывает теорему.

Выведем, далее, необходимые и достаточные условия для представимости решения уравнения (1) в виде интеграла Пуассона — Лебега.

ТЕОРЕМА 6. *Если $u(x, t)$ — решение уравнения (1) — удовлетворяет условиям*

$$1)\quad \max_{0\leqslant t\leqslant t_0} u(x, t)\, e^{-cx^2} < \frac{k}{\sqrt{t}}; \qquad 2)\quad \int_{\pm N}^{\pm\infty} u(x, t)\, e^{-cx^2} dx < \delta(N),$$

где c и k — положительные константы, и если кроме того функция

$$F(e, \varepsilon) = \int_e u(x, \varepsilon)\, dx,$$

— равномерно абсолютно непрерывно, то функция $u(x, t)$ представима при помощи интеграла Пуассона — Лебега

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} f(\xi)\, d\xi$$

для всех t, $0 \leqslant t \leqslant t_0 - \varepsilon_0$.

Доказательство. Как и в предыдущей теореме, в силу компактности семейства функций $F(e, \varepsilon_n)$, устанавливаем, что

$$\lim_{n\to\infty} F(e, \varepsilon_n) = \varphi(e).$$

Предельная функция $\varphi(e)$ будет аддитивной и абсолютно непрерывной, следовательно $\lim \frac{\varphi(\omega)}{\operatorname{mes} \omega} = f(x)$ почти всюду, и $\varphi(e) = \int_e f(x)\, dx$. Тогда

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\varphi(e) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} f(\xi)\, d\xi .$$

Обратная теорема. Пусть решение уравнения теплопроводности $u(x, t)$ представимо в виде

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} f(\xi)\, d\xi . \tag{5}$$

Предполагая этот интеграл сходящимся для значений x_0, t_0, а функцию $f(\xi)$ суммируемой на конечном интервале, докажем, что

$$F(e, \varepsilon) = \int_e u(x, \varepsilon)\, dx$$

есть равномерно абсолютно непрерывная функция множества $e \subset (-A, A)$, где A — любое фиксированное число.

Доказательство. В силу равномерной сходимости ([1]) интеграла (5) относительно x и t, при $t \leqslant t_0 - \varepsilon_0$, $x' \leqslant x \leqslant x''$, имеем

$$\int_e u(x, t)\, dx \lim_{N\to\infty} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-N}^{N} f(\xi)\, d\xi \int_e \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} dx ,$$

или
$$\lim_{t\to 0} \int_e u(x, t)\, dx = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-N}^{N} f(\xi)\, d\xi \lim_{t\to 0} \int_e \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} dx .$$

Вводя характеристическую функцию, получим на основании теоремы 1

$$\lim_{t\to 0} \int_e u(x, t)\, dx = \int_e f(\xi)\, d\xi . \tag{6}$$

Выбрав далее $\delta > 0$ так, чтобы, при $\operatorname{mes} e < \delta$, $\left| \int_e f(x)\, dx \right| < \frac{\eta}{2}$, будем иметь

$$\int_e u(x, \varepsilon)\, dx = \int_e [u(x, \varepsilon) - f(x)]\, dx + \int_e f(x)\, dx .$$

В силу предыдущего неравенства и равенства (6) получим

$$F(e, \varepsilon) = \int_e u(x, \varepsilon)\, dx \leqslant \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} = \eta,$$

что и требовалось доказать.

Институт математики
Моск. гос. университета им. М. В. Ломоносова

Поступило
11 I 1941

ЛИТЕРАТУРА

[1] Tychonoff A., Мат. сборник, 42 (1935), 199—216.
[2] Fatou P., Acta Mat., 30 (1906).
Привалов И. И., Интеграл Cauchy, Саратов, 1919.
[4] Привалов И. И., Мат. сборник, 45 (1938), 3—25.

S. LIDJAEV. ÜBER DIE DARSTELLBARKEIT DER LÖSUNG DER WÄRMELEITUNGSGLEICHUNG DURCH DAS POISSONSCHE INTEGRAL

ZUSAMMENFASSUNG

Die Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \tag{1}$$

die der Bedingung $u(x, 0) = \varphi(x)$ genügt, wird gewöhnlich, unter gewissen Voraussetzungen über die Funktion $\varphi(x)$, durch das Poissonsche Integral

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4t}} f(\xi)\, d\xi \qquad (t < 0) \tag{2}$$

dargestellt. In der vorliegenden Arbeit werden die Werte des Poissonschen Integrals für $t \to 0$ und die Bedingungen für die Darstellbarkeit der Lösung von Gleichung (1) in derartiger Form untersucht.

THEOREM 1. *Wenn Integral* (2) *für einige Werte* x_0, t_0 *konvergent ist, dann geht* $u(x, t)$ *für* $t \to 0$ *in allen denjenigen Punkten gegen* $\varphi(x)$, *in denen* $\varphi(x)$ *die Ableitung seines unbestimmten Integrals ist, d. h. fast überall.*

Ein analoges Theorem wird für das Poisson—Stieltjes'sche Integral

$$P(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4t}} d\varphi(e) \tag{3}$$

bewiesen, und zwar:

THEOREM 2. *Wenn das Poisson—Stieltjes'sche Integral* (3) *für einige Werte* x_0, t_0 *konvergiert, dann existiert für jeden Punkt* x, *für den der Grenzwert* $\lim \frac{\varphi(\omega)}{\text{mes}\,\omega} = f(x_0)$ *existiert, d. h. fast überall, der Grenzwert* $\lim u(x_0, t)$ *gleich* $f(x_0)$.

In den Theoremen 3 und 4 wird gezeigt, dass es im Falle der Konvergenz von (2) für einige Werte x_0, t_0 solche Konstanten c und k, grösser als Null, gibt, dass $e^{-cx^2}|u(x, t)| < \frac{k}{\sqrt{t}}$ ist und dass $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-cx^2} u(x, t)\, dx$ in bezug auf t, $0 \leqslant t \leqslant t_0 - \varepsilon$, für alle x gleichmässig konvergiert.

THEOREM 5. *Für die Darstellbarkeit der positiven, im Gebiet* $0 < t \leqslant t_0$, $-\infty < x < +\infty$ *definierten Lösung* $u(x, t)$ *von Gleichung* (1) *durch das Poisson—Stieltjessche Integral* (3), *mit der Funktion* $\varphi(e)$ *von beschränkter Variation, ist die Gültigkeit der Bedingungen von Theorem* 3 *und* 4 *notwendig und hinreichend.*

THEOREM 6. *Wenn die Lösung* $u(x, t)$ *der Gleichung* (1) *folgenden Bedingungen genügt:*

$$1)\quad \max_{0 \leqslant t \leqslant t_0} u(x, t)\, e^{-cx^2} < \frac{k}{\sqrt{t}}, \qquad 2)\quad \int_{\pm N}^{\pm\infty} u(x, t)\, e^{-cx^2} dx < \eta(N),$$

wo c *und* k *Konstante grösser als Null sind, und die Funktion* $F(e, \varepsilon) = \int_e u(x, \varepsilon)\, dx$ *gleichmässig absolut stetig ist, dann kann* $u(x, t)$ *für alle* t, $0 \leqslant t \leqslant t_0 - \varepsilon$ *durch das Poisson—Lebesguesche Integral* (2) *dargestellt werden.*

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИЙ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 5 (1941), 269—276 Série mathématique

К. С. ЕРМИЛИН

ОБ ЭКСТРЕМУМЕ ИНТЕГРАЛОВ В СЛУЧАЕ РАЗРЫВНОЙ ПОДИНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

(*Представлено академиком* **С. Н. Бернштейном**)

В работе устанавливаются необходимые и достаточные условия экстремума простейшего функционала при специальных условиях разрывного типа.

Настоящая статья посвящена вопросу об экстремуме интеграла

$$I=\int_C f(x,y,\vartheta)\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt,$$

$$\sin\vartheta=\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}},\quad \cos\vartheta=\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}},$$

когда $f(x,y,\vartheta)$ есть разрывная функция ϑ. Ограничиваясь рассмотрением простейшего разрыва, мы приходим к задаче, близкой к той, которая была нами разобрана в статье (1).

1. Определения

Пусть функция $f(x,y,\vartheta)$ определена для $0\leqslant\vartheta<2\pi$ в области $R(x,y)$ и подчинена следующим условиям:

1° В интервале $0<\vartheta<2\pi$ и при всех x, y, принадлежащих области $R(x,y)$, $f(x,y,\vartheta)$ непрерывна вместе со своими частными производными до третьего порядка включительно.

2° Существуют пределы

$$f(x,y,+0),\quad f(x,y,2\pi-0);\quad f(x,y,2\pi-0)-f(x,y,+0)\neq 0.$$

3° Значение $f(x,y,0)$ отлично от $f(x,y,+0)$ и $f(x,y,2\pi-0)$; будем считать, что

$$f(x,y,0)=\frac{1}{2}\{f(x,y,+0)+f(x,y,2\pi-0)\}. \tag{1}$$

4° Функция $f(x,y,0)$ и ее производные первого и второго порядка непрерывны *.

---

* Преобразованием переменных к предыдущему приводится также случай, когда $f(x,y,\vartheta)$ претерпевает разрыв непрерывности при $\vartheta=\vartheta(x,y)$, не равном нулю тождественно (если функция $\vartheta(x,y)$ однозначна и удовлетворяет необходимым условиям непрерывности).

Нас интересуют условия, при которых экстремум интеграла I реализуется кривой, содержащей конечные отрезки прямых $x=\text{const}$.

Примем обозначение $\mathfrak{M}(C)$ для множества кривых C, которые определены следующим образом:

1° Кривые C принадлежат области $R(x, y)$, непрерывны и имеют всюду, за исключением, может быть, конечного числа точек, непрерывно вращающуюся касательную.

2° Кривые C соединяют заданные точки A и B и составлены из отрезков $P_i\overline{P}_i$ прямых $x=\text{const}$ и дуг $\overline{P}_{i-1}P_i$, $\overline{P}_iP_{i+1}$, не содержащих отрезков прямых $x=\text{const}$, $i=1, 2, \ldots, n$ ($\overline{P}_0$ и P_{n+1} суть соответственно точки A и B).

3° Точки P_i, $\overline{P}_i$ расположены соответственно в окрестности точек P_i^0, $\overline{P}_i^0$, из которых точки с общим индексом имеют общую абсциссу.

Если некоторая кривая сообщает интегралу I экстремум, то любая ее дуга с непрерывной касательной, не принимающей направления $\vartheta=0$, должна быть экстремалью интеграла I в обыкновенном смысле. Будем обозначать через $\mathfrak{C}$ те кривые множества $\mathfrak{M}(C)$, которых дуги $\overline{P}_{i-1}P_i$, $\overline{P}_iP_{i+1}$ суть экстремали интеграла I. Пусть точки P_i^0, $\overline{P}_i^0$ определяют кривую $\mathfrak{C}_0$. Направление экстремалей $\overline{P}_{i-1}^0P_i^0$, $\overline{P}_i^0\,P_{i+1}^0$ всюду и, в частности, в каждой из точек P_i^0, $\overline{P}_i^0$ отлично от направления $\vartheta=0$; поэтому точки P_i^0, $\overline{P}_i^0$ суть угловые точки кривой $\mathfrak{C}_0$.

Рассмотрение условий, при которых кривая $\mathfrak{C}_0$ реализует экстремум интеграла I на множестве $\mathfrak{M}(C)$ и составляет задачу настоящей работы.

2. Условия в угловых точках и знак функции Вейерштрасса

Пусть кривая $\mathfrak{C}_0$ есть решение нашей экстремальной задачи. Принимая для функции под знаком интеграла I обозначение

$$F(P, \vartheta)=f(x, y, \vartheta)\sqrt{x'^2+y'^2},$$

где P — точка (x, y), мы вследствие равенства $\delta I=0$ получим условия

$$\left.\begin{aligned} U(P_i^0, \vartheta_i^0)=U(\overline{P}_i^0, \overline{\vartheta}_i^0)=0,\\ V(P_i^0, \vartheta_i^0)-V(\overline{P}_i^0, \overline{\vartheta}_i^0)=0. \end{aligned}\quad (i=1, 2, \ldots, n)\right\}\tag{2}$$

Здесь

$$U(P, \vartheta)=F_{y'}(P, \vartheta)-F(P, 0), \quad V(P, \vartheta)=F_{x'}(P, \vartheta)-\omega_x(P),$$

$$\int\limits_{P\overline{P}} f(x, y, 0)\,dy=\omega(\overline{P})-\omega(P);$$

$P\overline{P}$ — отрезок прямой $x=\text{const}$, ϑ — направление экстремали в точке P; $F_{x'}$, $F_{y'}$, ω_x — частные производные по указанным аргументам; $F(P, 0)$ определено на основании (1).

Рассмотрим вопрос о связи между условиями (2) и условием постоянства знака вейерштрассовой функции $\mathcal{E}$ на экстремалях $\overline{P}_{i-1}^0P_i^0$, $\overline{P}_i^0P_{i+1}^0$. Будем считать, что $x'>0$ вдоль экстремалей $\overline{P}_{i-1}^0P_i^0$, $\overline{P}_i^0P_{i+1}^0$. Если последние доставляют интегралу I минимум относительно близких

кривых, соединяющих те же точки и ограниченных неравенством $0 < \tilde{\vartheta} < \theta$, где $\vartheta < \theta < 2\pi$ (ϑ — направление экстремали в точке P), то функция $\mathcal{E}(P, \vartheta, \tilde{\vartheta})$ Вейерштрасса на этих экстремалях должна быть неотрицательной для всех направлений $0 < \tilde{\vartheta} < \theta$. При $\tilde{\vartheta}$ положительном и стремящемся к нулю имеем в пределе

$$\mathcal{E}(P_i^0, \vartheta_i^0, +0) = F(P_i^0, +0) - F_{y'}(P_i^0, \vartheta_i^0) > 0,$$

$$\mathcal{E}(\bar{P}_i^0, \bar{\vartheta}_i^0, +0) = F(\bar{P}_i^0, +0) - F_{y'}(\bar{P}_i^0, \bar{\vartheta}_i^0) > 0.$$

Равенство здесь исключено на основании условий (2). Сопоставляя последние с написанными неравенствами, получим

$$F(P_i^0, +0) > F(P_i^0, 0), \quad F(\bar{P}_i^0, +0) > F(P_i^0, 0).$$

Когда значение $f(x, y, 0)$ определяется равенством (1), должно быть

$$f(x, y, +0) > f(x, y, 2\pi - 0). \tag{3}$$

На основании (1) вместе с тем заключаем, что на каждой из экстремалей $\bar{P}_{i-1}^0 P_i^0$, $\bar{P}_i^0 P_{i+1}^0$ функция Вейерштрасса не сохраняет положительного знака для всех направлений $0 < \tilde{\vartheta} < 2\pi$; при $\tilde{\vartheta}$, достаточно близком к 2π, в точках P_i^0, $\bar{P}_i^0$ ее значения отрицательны. Следовательно, в нашей задаче речь может итти только об ограниченном минимуме. Однако в отличие от задачи, упоминавшейся в начале статьи [см. ([1]), стр. 138, 158 — 159], здесь не исключен минимум относительно кривых, для которых касательная принимает направления, сколь угодно близкие к $\vartheta = 0$. Таким образом, не исключен важный случай минимума, когда дуги $\bar{P}_{i-1} P_i$, $\bar{P}_i P_{i+1}$ конкурирующих кривых C ограничены неравенством $0 < \tilde{\vartheta} < \pi$.

3. Поле кривых $\mathfrak{C}$

Рассмотрим множество значений интеграла I по кривым $\mathfrak{C}$, из которых каждая определяется точками $P_i(x_i, y_i)$, $\bar{P}_i(x_i, \bar{y}_i)$. Для краткости записи введем в области точек P_i^0, $\bar{P}_i^0$ вместо x, y новые переменные ξ, η [см. ([1]), стр. 138 — 140]:

$$\xi_i = x_i - x_i^0, \quad \eta_i = \beta_i - \beta_i^0, \quad \bar{\eta}_i = \bar{\beta}_i - \bar{\beta}_i^0,$$

где индексом ^{0} отмечены значения переменных в точках P_i^0, $\bar{P}_i^0$ кривой $\mathfrak{C}_0$, а β обозначает постоянную интегрирования в общем интеграле уравнения $U(P, \vartheta) = 0$; в точках P_i^0, $\bar{P}_i^0$ можно принять $\frac{\partial \eta}{\partial y} = 1$. В новых переменных условия (2) будут:

$$\mathbf{U}_i^0 = \bar{\mathbf{U}}_i^0 = 0, \quad \mathbf{V}_i^0 - \bar{\mathbf{V}}_i^0 = 0,$$

где

$$\mathbf{U} = U(P, \vartheta), \quad \mathbf{V} = V(P, \vartheta) + U(P, \vartheta) \operatorname{ctg} \vartheta;$$

$\mathbf{U}_i^0$ и пр. соответствуют значениям $\xi_i = \eta_i = \bar{\eta}_i = 0$. Имеем

$$I_{\mathfrak{C}} - I_{\mathfrak{C}_0} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left\{ \xi_i^2 \frac{\partial}{\partial \xi} (\mathbf{V}_i^0 - \bar{\mathbf{V}}_i^0) + \eta_i^2 \frac{\partial}{\partial \eta} \mathbf{U}_i^0 - \bar{\eta}_i^2 \frac{\partial}{\partial \eta} \bar{\mathbf{U}}_i^0 + \right.$$

$$\left. + 2\xi_i \eta_i \frac{\partial}{\partial \xi} \mathbf{U}_i^0 - 2\xi_i \bar{\eta}_i \frac{\partial}{\partial \xi} \bar{\mathbf{U}}_i^0 \right\} + r.$$

Здесь r — остаточный член; ϑ_i, $\overline{\vartheta}_i$, как функции переменных ξ_i, η_i, $\overline{\eta}_i$, определены на семействе экстремалей, соединяющих точки

$$\begin{array}{lll} P_i & x_i = x_i^0 + \tau\xi_i, & y_i = y_i^0 + \tau\eta_i; \\ \overline{P}_{i-1} & x_{i-1} = x_{i-1}^0 + \tau\xi_{i-1}, & \overline{y}_{i-1} = \overline{y}_{i-1}^0 + \tau\overline{\eta}_{i-1}; \end{array}$$
$$0 \leqslant \tau \leqslant 1.$$

Отметим, что

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\mathbf{U}_i^0 = \mathbf{U}_{i(\eta)}^0 + F_{y'y'}(P_i^0, \vartheta_i^0)\frac{\Delta'_i(x_i^0)}{\Delta_i(x_i^0)},$$

где $\mathbf{U}_{i(\eta)}^0$ — частная производная от $\mathbf{U}_i^0$ по η, вычисленная при постоянном ϑ; $\Delta_i(x)$ — интеграл уравнения Якоби. Производные $\frac{\partial}{\partial\xi}\mathbf{U}_i^0$, $\frac{\partial}{\partial\xi}\mathbf{V}_i^0$ не содержат $\Delta_i(x_i^0)$. Полагая $\frac{\partial}{\partial\eta}\mathbf{U}_i^0 \neq 0$, $\frac{\partial}{\partial\eta}\overline{\mathbf{U}}_i^0 \neq 0$, получим

$$I_{\mathfrak{C}} - I_{\mathfrak{C}_0} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left\{\xi_i^2\left[\frac{\partial}{\partial\xi}(\mathbf{V}_i^0 - \overline{\mathbf{V}}_i^0) - \frac{\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\mathbf{U}_i^0\right)^2}{\frac{\partial}{\partial\eta}\mathbf{U}_i^0} + \frac{\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\overline{\mathbf{U}}_i^0\right)^2}{\frac{\partial}{\partial\eta}\overline{\mathbf{U}}_i^0}\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\frac{\partial}{\partial\eta}\mathbf{U}^0}\left(\xi_i\frac{\partial}{\partial\xi}\mathbf{U}_i^0 + \eta_i\frac{\partial}{\partial\eta}\mathbf{U}_i^0\right)^2 - \frac{1}{\frac{\partial}{\partial\eta}\overline{\mathbf{U}}_i^0}\left(\xi_i\frac{\partial}{\partial\xi}\overline{\mathbf{U}}_i^0 + \overline{\eta}_i\frac{\partial}{\partial\eta}\overline{\mathbf{U}}_i^0\right)^2\right\} + r.$$

В случае минимума I на кривой $\mathfrak{C}_0$, имеем

$$\left.\begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial\xi}(\mathbf{V}_i^0 - \overline{\mathbf{V}}_i^0) - \frac{\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\mathbf{U}_i^0\right)^2}{\frac{\partial}{\partial\eta}\mathbf{U}_i^0} + \frac{\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\overline{\mathbf{U}}_i^0\right)^2}{\frac{\partial}{\partial\eta}\overline{\mathbf{U}}_i^0} \geqslant 0, \\ \frac{\partial}{\partial\eta}\mathbf{U}_i^0 > 0, \quad \frac{\partial}{\partial\eta}\overline{\mathbf{U}}_i^0 < 0, \end{array}\right\} \qquad (4)$$

и следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial\xi}(\mathbf{V}_i^0 - \overline{\mathbf{V}}_i^0) > 0.$$

Полученные условия показывают, что теория поля кривых $\mathfrak{C}$ основана на рассмотрении поля, построенного для каждого звена $\overline{P}_{i-1}^0 P_i^0 \overline{P}_i^0 P_{i+1}^0$ кривой $\mathfrak{C}_0$, взятого в отдельности. Свойства же этого последнего поля аналогичны свойствам поля в экстремальной задаче, указанной в начале статьи [см. (1), стр. 141 — 150].

Для того чтобы поле возможно было построить, должно быть

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\mathbf{U}_i^0 \neq 0, \quad \frac{\partial}{\partial\xi}\overline{\mathbf{U}}_i^0 \neq 0.$$

Назовем сопряженными на экстремалях $\overline{P}_{i-1}^0 P_i^0$, $\overline{P}_i^0 P_{i+1}^0$ точки $P_i^*(x_i^*)$, $\overline{P}_i^*(\overline{x}_i^*)$, $x_i^* < x_i^0$, $\overline{x}_i^* > x_i^0$, где x_i^*, $\overline{x}_i^*$ — ближайшие к x_i^0 нули интегралов $\Delta_i(x)$ и $\overline{\Delta}_i(x)$, связанных равенством

$$\frac{\partial}{\partial\xi}(\mathbf{V}_i^0 - \overline{\mathbf{V}}_i^0) - \frac{\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\mathbf{U}_i^0\right)^2}{\frac{\partial}{\partial\eta}\mathbf{U}_i^0} + \frac{\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\overline{\mathbf{U}}_i^0\right)^2}{\frac{\partial}{\partial\eta}\overline{\mathbf{U}}_i^0} = 0.$$

Из (4) вытекают необходимые условия

$$x^0_{i-1} > h_i, \qquad x^0_{i+1} \leqslant \bar{g}_i,$$

где точка $P^*_i(h_i)$ сопряжена точке $\bar{P}^0_i$, а $\bar{P}^*_i(\bar{g}_i)$ сопряжена точке $\bar{P}^0_{i+1}$.

4. Достаточные условия минимума

ТЕОРЕМА. *Если*

1° *в угловых точках* P^0_i, $\bar{P}^0_i$ *кривой* $\mathfrak{C}_0$ *выполнены условия* (2);

2° *выполнены в строгом смысле неравенства* (4);

3° *на экстремалях* $\bar{P}^0_{i-1}P^0_i$, $\bar{P}^0_i P^0_{i+1}$ *соблюдено условие* $\mathcal{E}(P, \vartheta, \tilde{\vartheta}) > 0$, *где* ϑ — *направление экстремали в точке* P *и* $0 < \tilde{\vartheta} < \theta$ (θ — *постоянная, заключенная между* ϑ *и* 2π), — *то справедливо неравенство*

$$I_{\mathfrak{C}_0} < I_C \tag{5}$$

для всякой отличной от $\mathfrak{C}_0$ *кривой* C, *для которой*

1° *точки* P_i, $\bar{P}_i$ *и дуги* $\bar{P}_{i-1}P_i$, $\bar{P}_i P_{i+1}$ *достаточно близки соответственно к точкам* P^0_i, $\bar{P}^0_i$ *и дугам* $\bar{P}^0_{i-1}P^0_i$, $\bar{P}^0_i P^0_{i+1}$ *кривой* $\mathfrak{C}_0$ *и*

2° *дуги* $\bar{P}_{i-1}P_i$, $\bar{P}_i P_{i+1}$ *ограничены неравенством* $0 < \tilde{\vartheta} < \theta$.

Теорема следует непосредственно из предыдущего изложения.

На основании (1) и (3) заключаем, что неравенство (5) распространяется также на кривые, которые не принадлежат множеству $\mathfrak{M}(C)$ и аппроксимируют кривые C так, что в окрестности отрезков $P_i\bar{P}_i$ для них имеет место неравенство $0 \leqslant \tilde{\vartheta} < \varepsilon$, где ε достаточно мало.

В случае, когда $f(x, y, 0) = 0$ тождественно, мы, выбрасывая отрезки $P_i\bar{P}_i$ из состава кривых C, будем иметь разрывную кривую $\mathfrak{C}_0$, реализующую минимум интеграла I на множестве, составленном из разрывных кривых C и непрерывных кривых, которые их аппроксимируют.

В нашей статье [1], стр. 136 и 159, было замечено, что разрывная экстремаль, которую рассматривал А. М. Размадзе в известной его работе [2], не реализует, вообще, сильного экстремума. Мы можем теперь сказать, что этот недостаток разрывной экстремали устраняется, если снять с интеграла

$$J = \int_{x_1}^{x_2} F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) dx,$$

который изучался Размадзе, требование

$$\lim_{\bar{C} \to C} J_{\bar{C}} = J_C,$$

где $\bar{C}$ — непрерывная кривая, аппроксимирующая разрывную кривую C.

5. Пример

Пусть при $0 < \vartheta < 2\pi$ функция $F(P, \vartheta)$ под знаком интеграла I задается в форме

$$F(P, \vartheta) = \psi(x, y)\{g(u)\,\vartheta^m + k\}\sqrt{x'^2 + y'^2},$$

где $g(u)$ непрерывна вместе с первой и второй производными; $u = px + qy$; m, k, p, q — постоянные, $m > 0$; $F(P, 0)$ определяется на основании (1).

Примем

$$\psi(x,y)=\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{m-1}\left(m\frac{p}{q}+\frac{\pi}{2}\right)g(u)+k}.$$

Тогда прямые $y=\text{const}$ будут экстремалями интеграла I. Исследуем в этом случае экстремальные свойства ломаных линий, составленных из отрезков прямых $y=\text{const}$ и прямых $x=\text{const}$. Полагая

$$x'^2+y'^2=1,$$

имеем

$$F_1(P,\vartheta)=\frac{1}{\sin^2\vartheta}F_{y'y'}(P,\vartheta)=\psi(x,y)\{\vartheta^{m-2}(m(m-1)+\vartheta^2)g(u)+k\}.$$

Обозначим через l наименьшее значение $g(u)$ в том интервале, где рассматривается интеграл. Будем для определенности считать $l<0$, $m\geqslant 1$, $p>0$, $q>0$, и выберем k так, чтобы

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^{m-1}\left(m\frac{p}{q}+\frac{\pi}{2}\right)l+k>0,\quad \pi^{m-2}(m(m-1)+\pi^2)l+k>0.$$

Тогда $\psi(x,y)$ будет конечным и положительным и $F_1(P,\vartheta)$ — положительным при $0<\vartheta<\pi$. Функция $\mathcal{E}(P,\vartheta,\tilde{\vartheta})$ Вейерштрасса на экстремали $\vartheta=\frac{\pi}{2}$ при $0<\tilde{\vartheta}<\pi$ будет также положительной на основании соотношения

$$\mathcal{E}(P,\vartheta,\tilde{\vartheta})=\frac{1}{2}\sin^2(\tilde{\vartheta}-\vartheta)F_1(P,\vartheta+\varepsilon(\tilde{\vartheta}-\vartheta)),\quad 0<\varepsilon<1.$$

Условие $U\left(P,\frac{\pi}{2}\right)=0$ представляется в форме

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^{m-1}(m+2^{2(m-1)}\pi)g(u)+k=0. \tag{6}$$

Если

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^{m-1}(m+2^{2(m-1)}\pi)l+k<0,$$

то для существования корней $u=u_0$ уравнения (6) достаточно, например, существования в рассматриваемом промежутке корней функции $g(u)$. Значениям u_0 соответствуют прямые

$$u_0=px+qy, \tag{7}$$

на которых могут располагаться угловые точки искомой кривой $\mathfrak{C}_0$, составленной из отрезков прямых $\vartheta=0$ и $\vartheta=\frac{\pi}{2}$. Далее, имеем

$$V\left(P,\frac{\pi}{2}\right)=\psi(x,y)\left\{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{m-1}\left(\frac{\pi}{2}-2^{2(m-1)}\pi\frac{p}{q}\right)g(u)+\left(1-\frac{p}{q}\right)k\right\}.$$

На прямых (7) — их должно быть не менее двух — отсюда получаем

$$V\left(P,\frac{\pi}{2}\right)=1.$$

Следовательно, условие $V(P,\vartheta)-V(\bar{P},\bar{\vartheta})=0$ выполняется тождественно, если выполнены условия $U(P,\vartheta)=U(\bar{P},\bar{\vartheta})=0$.

Так как на прямых (7) имеем

$$\frac{\partial}{\partial x}V\left(P,\frac{\pi}{2}\right)=\frac{kp^2}{q}\psi(x,y)\frac{g'(u_0)}{g(u_0)},$$

то условие $\frac{\partial}{\partial x}(V_0-\bar{V}_0)>0$ сводится к неравенству

$$g'(u_0) - g'(\bar{u}_0) < 0.$$

Обратимся к рассмотрению поля кривых $\mathfrak{C}$. В задаче указано семейство экстремалей $y = \text{const}$. Этому семейству соответствует частный интеграл $\Delta = 1$ уравнения Якоби. Пользуясь этим, напишем для того же уравнения интеграл

$$\Delta(x) = \int_{x^*}^{x} \frac{dx}{F_{y'y'}\left(P, \frac{\pi}{2}\right)}$$

с нулем $x = x^*$. Первое из условий (4) принимает форму

$$\frac{g'(u_0)}{1 + G\Delta(x_0)} \leqslant \frac{g'(\bar{u}_0)}{1 + \bar{G}\bar{\Delta}(x_0)},$$

где

$$G = kq\psi(x_0, y_0)\frac{g'(u_0)}{g(u_0)}, \quad \bar{G} = kq\psi(x_0, y_0)\frac{g'(\bar{u}_0)}{g(u_0)},$$

$$\Delta(x_0) = \int_{X}^{x_0} \frac{dx}{F_{y'y'}\left(P, \frac{\pi}{2}\right)}, \quad \bar{\Delta}(x_0) = \int_{\bar{X}}^{x_0} \frac{dx}{F_{y'y'}\left(\bar{P}, \frac{\pi}{2}\right)},$$

$X < x_0$, $\bar{X} > x_0$; $P(x_0, y_0)$, $P(x_0, \bar{y}_0)$ — угловые точки кривой $\mathfrak{C}_0$. Если например $g'(u_0) < 0$, $g'(\bar{u}_0) > 0$, то неравенство (8) выполнено в строгом смысле. Вместе с тем тогда выполнены и другие неравенства (4), и мы имеем условия, достаточные для минимума интеграла.

Ленинградский Политехнический институт

Поступило
17 XII 1940

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ермилин К. С., Об одной задаче вариационного исчисления, Труды Тбилисск. матем. инст., IV (1938), 135 — 162.

[2] Razmadzé A., Sur les solutions discontinues dans le calcul des variations, Mathem. Ann., 94 (1925).

K. ERMILIN. SUR L'EXTRÉMUM DES INTÉGRALES DES FONCTIONS DISCONTINUES

RÉSUMÉ

On étudie l'intégrale

$$I = \int_C f(x, y, \vartheta)\sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt,$$

$$\sin\vartheta = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}, \quad \cos\vartheta = \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}.$$

La fonction $f(x, y, \vartheta)$ est définie pour $0 \leqslant \vartheta < 2\pi$ dans le domaine $R(x, y)$; elle est soumise aux conditions suivantes:

1° La fonction $f(x, y, \vartheta)$ et toutes ses dérivées partielles des trois premiers ordres sont continues dans l'intervalle $0 < \vartheta < 2\pi$ quand x, y appartiennent au domaine $R(x, y)$.

2° Les limites $f(x, y, +0)$, $f(x, y, 2\pi - 0)$ existent;

$$f(x, y, 2\pi - 0) - f(x, y, +0) \neq 0.$$

3° $f(x, y, 0) = \frac{1}{2}\{f(x, y, +0) + f(x, y, 2\pi - 0)\}$.

4° La fonction $f(x, y, 0)$ et ses dérivées du premier et du second ordres sont continues.

Dans ce travail on traite le problème de l'extrémum de l'intégrale I dans l'ensemble des courbes continues qui joignent deux points donnés A et B et qui contiennent des segments des lignes $x = \text{const}$.

On considère l'ensemble $\mathfrak{M}(C)$ des courbes C, qui sont définies de la manière suivante:

1° Les courbes C appartiennent au domaine $R(x, y)$; elles sont continues et elles peuvent avoir un nombre fini de points angulaires.

2° Les courbes C joignent les points donnés A et B; elles sont composées de segments $P_i \bar{P}_i$ des lignes $x = \text{const}$ et des arcs $\bar{P}_{i+1} P_i$, $\bar{P}_i P_{i+1}$; ces derniers ne contiennent pas de segments des lignes $x = \text{const}$; $i = 1, 2, \ldots; n$.

3° Les points P_i, $\bar{P}_i$ sont situés aux environs des points P_i^0, $\bar{P}_i^0$; ces derniers ayant un indice commun ont une abscisse commune.

$\mathfrak{C}$ sont les courbes de l'ensemble $\mathfrak{M}(C)$ dont les arcs $\bar{P}_{i-1} P_i$, $\bar{P}_i P_{i+1}$ sont des extrémales de l'intégrale I; $\mathfrak{C}_0$ est une de ces courbes; elle est définie par les points P_i^0, $\bar{P}_i^0$.

THÉORÈME. *Si*

1° *les coordonnées des points angulaires* P_i^0, $\bar{P}_i^0$ *de la courbe* $\mathfrak{C}_0$ *et la direction des tangentes des extrémales* $\bar{P}_{i-1}^0 P_i^0$, $\bar{P}_i^0 P_{i+1}^0$ *aux mêmes points satisfont aux conditions* (2),

2° *si ces quantités ainsi que les quantités* $\Delta_i(x_i^0)$, $\bar{\Delta}_i(x_i^0)$ *vérifient au sens strict les inégalités* (4),

3° *si le long des extrémales* $\bar{P}_{i-1}^0 P_i^0$, $\bar{P}_i^0 P_{i+1}^0$ *a lieu la condition*

$$\mathcal{E}(P, \vartheta, \tilde{\vartheta}) > 0, \quad 0 < \tilde{\vartheta} < \theta,$$

où $\mathcal{E}(P, \vartheta, \tilde{\vartheta})$ *est la fonction de Weierstrass,* ϑ *caractérise la direction de l'extrémale au point* P, θ *est une constante prise entre* ϑ *et* 2π, *on aura l'inégalité*

$$I_{\mathfrak{C}_0} < I_C$$

pour toute courbe C *qui se distingue de* $\mathfrak{C}_0$, *si* C *est assujettie aux conditions suivantes:*

1° *les points* P_i, $\bar{P}_i$ *et les arcs* $\bar{P}_{i-1} P_i$, $\bar{P}_i P_{i+1}$ *sont assez voisins des points* P_i^0, $\bar{P}_i^0$ *et des arcs* $\bar{P}_{i-1}^0 P_i^0$, $\bar{P}_i^0 P_{i+1}^0$ *de la courbe* $\mathfrak{C}_0$ *et*

2° *les arcs* $\bar{P}_{i-1} P_i$, $\bar{P}_i P_{i+1}$ *vérifient l'inégalité* $0 < \tilde{\vartheta} < \theta$.

Alors l'inégalité $I_{\mathfrak{C}_0} < I_{\bar{C}}$ a lieu aussi pour les courbes $\bar{C}$ qui n'appartiennent pas à l'ensemble $\mathfrak{M}(C)$ et qui donnent l'approximation des courbes C de telle manière qu'aux environs des segments $P_i \bar{P}_i$ elles vérifient l'inégalité $0 \leq \tilde{\vartheta} < \varepsilon$, où ε est assez petit.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 5(1941), 277—280 Série mathématique

КРИТИКА и БИБЛИОГРАФИЯ

Л. В. КАНТОРОВИЧ. Определенные интегралы и ряды Фурье. Изд. Ленингр. гос. университета, 1940, 248 стр.

Изданная Ленинградским гос. университетом книга проф. Л. В. Канторовича содержит систематическое изложение части университетского курса математического анализа, а именно, теорию интегралов, зависящих от параметра, и тригонометрические ряды Фурье. Сообразно с упомянутыми двумя разделами анализа, книга состоит из двух частей.

В первой части изложены несобственные интегралы, интегралы, зависящие от параметра, и элементарная теория интеграла Стильтьеса. Вторая часть книги посвящена теории рядов Фурье. В конце каждой главы приведены задачи, часть которых снабжена подробными решениями, а также в конце некоторых глав имеются дополнения, содержащие теоретические вопросы, требующие самостоятельного доказательства отдельных специальных предложений, не вошедших в курс.

Изложение всего материала стоит на высоком научном уровне, отличается логической стройностью и ясностью и выполнено тщательно со всеми необходимыми деталями.

С педагогической точки зрения я считаю неправильным стремление автора к наиболее общим формулировкам теорем, что усложняет их содержание, затрудняет понимание предложения для среднего студента, в особенности не являющегося по специальности математиком, и во всяком случае создает трудности учащемуся в смысле запоминания формулировок. С моей точки зрения, курс классического анализа, читаемый для студентов, среди которых большинство будет в дальнейшем специализироваться по механике и астрономии, должен избегать разных тонкостей и деталей, привносимых из теории функций действительного переменного, представляющих интерес лишь для чистого математика и усложняющих понимание основных идей анализа.

Безусловно весьма ценная книга Л. В. Канторовича была бы более доступной для студента, если бы она не была перегружена деталями и тонкостями в формулировках теорем, делающими эти предложения хотя и более общими, но зато и более трудными для студента. В частности, я считаю неправильным в основном курсе анализа рассмотрение функций с бесконечными множествами точек разрыва, что составляет содержание курса теории функций действительного переменного, и поэтому излишним введение интеграла по Риману в общей его форме. Этим затрудняется для студента понимание процесса интегрирования, так как, не усложняя с формальной стороны доказательств, в изучение вводится в качестве объекта функция с бесконечным множеством точек разрыва—понятие, достаточно сложное, которое сознательно может быть воспринято лишь при достаточно высокой математической культуре студента и, во всяком случае, после усвоения им классических идей анализа.

Книгу Л. В. Канторовича с успехом можно рекомендовать как ценное учебное пособие для студентов университета. В качестве основного учебника для студента, впервые изучающего анализ, она, по моему мнению, достаточно трудна, вследствие сжатости изложения при обилии содержащегося в ней материала. Существующие программы курса анализа не содержат многих вопросов, разобранных в этой книге,

которые в таком полном виде не могут быть пройдены во время, отводимое для них учебным планом. Достаточно сказать, что книга имеет 248 страниц, на протяжении которых очень сжато излагаются лишь две темы общей программы анализа.

Заканчивая, я еще раз подчеркиваю ценность книги Л. В. Канторовича как учебного пособия, в котором с безупречной логической стройностью и математической строгостью изложены важные вопросы общего математического анализа.

И. И. Привалов

B. L. van-der WAERDEN, Einführung in die algebraische Geometrie, Berlin, 1939. 247+VII p.

Книга van-der Waerden'а является среди других работ в этой области в известном смысле исключительной: с одной стороны, по основным идеям излагаемого в ней метода она остается близкой к классической литературе по алгебраической геометрии; с другой стороны, в силу необходимости четкого определения понятий и проведения доказательств, удовлетворяющих современным требованиям строгости, в ней используется целый ряд понятий и результатов современной абстрактной алгебры, иногда довольно тонких.

Это последнее обстоятельство придает изложению полную прозрачность и своеобразную прелесть. Чтобы его оценить, достаточно вспомнить хотя бы «определение» понятия общей точки, обычное в алгебраико-геометрической литературе, например итальянской. Вместо этого «определения», из которого даже не ясно, что оно относится к неприводимым многообразиям, мы находим у van-der Waerden'а совершенно четко сформулированное алгебраическое определение.

Заметим еще, что в силу самого назначения книги служить введением в алгебраическую геометрию, ее содержание составляют главным образом общие идеи, а не факты. В части общих замечаний по поводу книги мы ограничимся сказанным и перейдем к краткому изложению содержания по главам.

Первые три главы содержат различный подготовительный материал. Первая из них посвящена понятию проективного и кратно-проективного пространства. Во второй вводится понятие алгебраической функции и приводятся некоторые сведения из теории исключения. Нужно отметить, что автор остается здесь на строго алгебраической точке зрения, определяя все понятия для случая произвольного алгебраически замкнутого основного тела. Глава третья содержит элементарные сведения о плоских алгебраических кривых. В частности, довольно много места отведено кривым третьего порядка.

С четвертой главы—«Алгебраические многообразия»—начинается изложение основного материала книги. Прежде всего автор несколько обобщает понятие точки, вводя точки в обобщенном смысле. Дело в том, что первоначально при рассмотрении проективного пространства S_n над телом K подразумевалось, что отношения координат точек есть элементы K. Для целей дальнейших применений от этого ограничения удобно отказаться и допускать для отношений координат точек значения из произвольного расширения тела K. При этом пространство S_n попрежнему рассматривается как пространство над K.

После этого вводится понятие о специализации, сохраняющей соотношения (relationstreue Spezialisierung). Именно, точка ξ' называется специализацией точки ξ, если все (конечно однородные) алгебраические соотношения с коэффициентами из K между координатами ξ остаются справедливыми, при условии подстановки вместо координат ξ соответствующих координат ξ'. Почему здесь важно понятие точки в обобщенном смысле, ясно непосредственно.

Далее вводится понятие об алгебраическом многообразии. Как само определение этого понятия, так и доказательство однозначной разложимости на неприводимые даны без помощи понятия идеала. Несколько позже в специальном параграфе указываются эффективные методы такого разложения.

После того как понятие алгебраического многообразия определено, с помощью введенного раньше понятия специализации вводится понятие общей точки и доказывается ее существование для неприводимых многообразий. Попутно вводится чисто алгебраически понятие размерности алгебраического многообразия.

По поводу всей четвертой главы можно заметить, что хотя по содержанию здесь излагается, в сущности, то же самое, что и в главе XIII «Современной алгебры», в характере изложения и даже в самих установках автора произошли большие перемены: как уже было сказано, он совершенно отказался от понятия идеала. Кроме того, изложение в рецензируемой книге гораздо нагляднее и геометричнее, чем в «Современной алгебре».

К главе четвертой имеется приложение, посвященное специально топологическим вопросам, связанным с понятием алгебраического многообразия. Основным изложенным здесь результатом является теорема о триангулируемости алгебраических многообразий в комплексном проективном пространстве. Это приложение стоит совершенно особняком и с остальным материалом книги не связано.

Естественным продолжением четвертой главы является глава пятая—«Алгебраические соответствия и их приложение». Здесь прежде всего понятие алгебраического соответствия между точками алгебраических многообразий, лежащих в некоторых пространствах (проективных или кратно проективных), приводится к понятию алгебраического многообразия в прямом произведении рассматриваемых пространств. Это делается естественным образом: точки многообразия, выражающего алгебраическое соответствие, просто сопоставляются парам точек, соответствующих друг другу. Такое сведение дает возможность воспользоваться уже полученными результатами относительно алгебраических многообразий. В частности, появляется возможность определить неприводимость соответствия. Для неприводимых соответствий тотчас же определяется размерность и доказывается следующий принцип подсчета размерностей. Если между неприводимыми алгебраическими многообразиями M и N размерностей, соответственно, a и b установлено q-мерное неприводимое алгебраическое соответствие, причем общей точке M соответствует c-мерное подмногообразие N, а общей точке N d-мерное подмногообразие в M, то имеет место соотношение $q = a + c = b + d$. Это простое соотношение в дальнейшем часто используется. Несколько очень изящных примеров его приложения приведено сразу же.

Вслед за определением алгебраического соответствия и выводом основных его свойств идет параграф, содержащий приложение теории алгебраических соответствий к вопросу о пересечении алгебраического многообразия с линейными пространствами. Здесь установлен ряд простых теорем о размерности пересечений данного многообразия с общим линейным пространством заданной размерности.

Следующий параграф содержит решение несколько частного, но интересного вопроса о числе прямых на поверхности третьего порядка. Обнаруживается, что поверхность третьего порядка, расположенная в трехмерном пространстве и не имеющая двойных точек, содержит ровно 27 различных прямых.

Последние два параграфа рассматриваемой главы посвящены идее введения координат в множество алгебраических многообразий данной размерности. Делается это в духе статьи van-der Waerden'а и Chow (Math. Ann., Bd. 113) следующим образом. Вводится понятие «соответствующей формы» (zugeordnete Form) многообразия. Для точки $(p_0, p_1, \ldots, p_n)$ эта соответствующая форма будет $\sum_{j=0}^{n} p_j u_j$. Для системы точек это будет произведение соответствующих форм отдельных точек. Этим понятие соответствующей формы определено для нуль-мерных многообразий. Пусть теперь в n-мерном проективном пространстве задано r-мерное многообразие M. Берем общее линейное подпространство L размерности $n—r$ (его уравнения содержат какие-то параметры v линейным образом) и пересекаем его с M. Пересечение будет нуль-мерным многообразием, для которого понятие соответствующей формы уже определено. Пусть эта форма будет $F(u)$. Заметим, что коэффициенты $F(u)$ есть полиномы и даже формы от v. Поэтому $F(u)$ можно рассматривать как форму от двух рядов переменных u и v. Эта

форма $F(u, v)$ и называется соответствующей формой многообразия M. Ясно, что коэффициенты $F(u, v)$ вполне определяют многообразие M и могут, таким образом, рассматриваться как координаты M в множестве алгебраических многообразий данной размерности.

В шестой главе заканчивается изложение результатов, относящихся к алгебраическим многообразиям произвольной размерности. В ней рассмотрено понятие кратности (Multiplizitätsbegriff). Проблема определения кратности ставится следующим образом. Пусть некоторая геометрическая проблема приводится к системе алгебраических уравнений, имеющих конечное число решений. Требуется каждому из этих решений приписать определенную «кратность», удовлетворяющую так называемому «принципу сохранения числа»: число решений, понимаемое как сумма кратностей отдельных решений, не должно изменяться при специализации рассматриваемой проблемы, т. е. при специализации значений тех параметров, которые могут входить в исходную задачу. Автор излагает свои исследования в этом направлении, меняя изложение, принятое в серии его работ «Zur algebraische Geometrie», сравнительно несущественно.

В отличие от уже разобранных глав, которые относились к алгебраическим многообразиям произвольной размерности, материал глав седьмой и восьмой (особенно восьмой) касается главным образом теории алгебраических кривых. Седьмая глава содержит основы теории линейных систем алгебраических многообразий (главным образом групп точек на кривой). Способ изложения по своему геометрическому смыслу близок к принятому итальянской школой (см. например учебник Severi). Однако изложение и здесь остается чисто алгебраическим, так что автор нигде не обращается к понятию непрерывности. Кроме определения линейных систем и вывода их простейших свойств, в этой же главе даются: преобразование кривой в кривую без кратных точек (§ 45), понятия дивизора и класса дивизоров (§ 45 и 46). Глава заканчивается доказательством двух теорем Bertini о кратных точках общей группы некоторой линейной системы.

Весь этот материал, равно как и тот, который содержится в начале восьмой главы, является подготовительным для доказательства одной из основных теорем теории алгебраических кривых—теоремы Riemann'a—Koch'a. Эта теорема составляет основное содержание главы восьмой. Основная идея доказательства восходит к Brill'ю и M. Noether'y, но в принятом изложении имеется ряд оригинальных деталей, например принадлежащее van-der Waerden'y доказательство теоремы остатка (Restsatz).

Небольшая заключительная девятая глава книги посвящена анализу особенностей плоских кривых.

А. И. Узков

Редактор издания В. А. Толстиков

Подписано к печати 30/V 1941 г. А38651. $5^5/_8$ печ. л., в том числе 1 вклейка.
Уч.-авт. л. 6,7. Тираж 1800 экз. Цена 6 руб. Заказ 695.

16-я типография треста «Полиграфкнига», Москва, Трехпрудный пер., 9

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 5 (1941), 281—284 Série mathématique

И. И. ПРИВАЛОВ

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ СУБГАРМОНИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

Пользуясь обобщенным оператором Лапласа, автор дает условия субгармоничности функции.

Из теории субгармонических функций известно предложение: если функция $u(Q)$, полунепрерывная сверху в области G, удовлетворяет в каждой точке Q этой области условию $\overline{\Delta}^* u(Q) \geqslant 0$, то эта функция будет субгармонической в области G. Под $\overline{\Delta}^* u(Q)$ в этом предложении мы понимаем верхний обобщенный оператор Лапласа, определяемый либо посредством осреднения функции по объему шара с центром в точке Q, либо при помощи ее осреднения вдоль поверхности сферы с центром в точке Q.

Пусть E_1 — замкнутое ограниченное множество точек пространства p измерений. Цель настоящей статьи доказать следующую более общую теорему:

Если E_1 емкости нуль, то каждая в окрестности E_1 однозначная ограниченная сверху и полунепрерывная сверху функция $u(Q)$ будет необходимо субгармонической в области, содержащей E_1, при условии, что $\overline{\Delta}^* u(Q) > -\infty$ всюду в окрестности E_1 и почти всюду в ней $\overline{\Delta}^* u(Q) \geqslant 0$.

Доказательство. Чтобы обнаружить справедливость нашего предложения, нам достаточно, вследствие известной теоремы ([3, 4]), доказать субгармоничность функции $u(Q)$ в достаточно малой окрестности G всякой точки Q_0, не принадлежащей множеству E_1. Итак, в области G, согласно условиям теоремы, функция $u(Q)$ полунепрерывна сверху, причем $\overline{\Delta}^* u(Q) > -\infty$ всюду в G, и $\overline{\Delta}^* u(Q) \geqslant 0$ всюду в G, за исключением множества точек E меры нуль.

Предполагая, что функция $u(Q)$ не является субгармонической в области G, мы придем к противоречию. В самом деле, тогда найдется подобласть D, $\overline{D} \subset G$, и гармоническая функция $U(Q)$ внутри D, непрерывная в $\overline{D}$, такие, что будут выполнены условия

$$u(Q) \leqslant U(Q) \tag{1}$$

на границе Γ области D, тогда как внутри D в некоторой точке Q_1 будет

$$u(Q_1) > U(Q_1) \tag{2}$$

Построим в пространстве функцию лебеговых множеств $\mu(e)$ со следующими свойствами:

1° $\mu(e) \geqslant 0$;

2° $\mu(e)$ — вполне аддитивна;

3° $\mu(e)$ — абсолютно непрерывна;

4° симметрическая производная функции $\mu(e)$ в каждой точке множества E равна $+\infty$;

5° если ω — шар с центром в точке Q радиуса r, то отношение $\frac{\mu(\omega)}{r^{p-1}}$ остается ограниченным равномерно относительно всех точек Q пространства и всех r.

Построение этого примера было выполнено студентом А. Л. Брудно следующим образом. Рассмотрим открытые множества O_n, удовлетворяющие условиям:

1° $O_1 \supseteq O_2 \supseteq \ldots \supseteq O_n \supseteq O_{n+1} \supseteq \ldots$;

2° $O_n \supset E$, каково бы ни было $n \geqslant 1$;

3° $\operatorname{mes} O_n \leqslant \frac{1}{2^n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Пусть $f_n(Q) = 1$, если $Q \in O_n$, и $f_n(Q) = 0$ в противном случае. Полагая $f(Q) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(Q)$, рассмотрим функцию множества $\mu(e)$, определив ее при помощи соотношения

$$\mu(e) = \int\limits_e f(Q)\,d\omega = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{mes}(e\,O_n).$$

Очевидно

$$\mu(e) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{mes} O_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1,$$

и следовательно, $\mu(e)$ удовлетворяет трем первым условиям 1° — 3°.

Покажем, что $\mu(e)$ удовлетворяет условию 4°. Пусть $Q_0 \in E$. Для каждого n найдется такое r_0, что шар ω_{r_0} радиуса r_0 с центром в точке Q_0 лежит внутри O_n. Тогда, считая $r < r_0$, будем иметь

$$\frac{\mu(\omega_r)}{r^p} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \operatorname{mes}(\omega_r\,O_k)}{r^p} \geqslant \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{mes}(\omega_r\,O_k)}{r^p} = \frac{n \operatorname{mes} \omega_r}{r^p} > n.$$

Следовательно, для каждого n найдется такое $r_0 = r_0(n)$, что при $r < r_0$ будет $\frac{\mu(\omega_r)}{r^p} > n$, т. е.

$$\lim_{r \to 0} \frac{\mu(\omega_r)}{r^p} = +\infty.$$

Наконец, обнаружим выполнение условия 5°. С этой целью, обозначая через ω_r шар радиуса r с центром в любой точке Q пространства, предположим $\frac{1}{n+1} < r \leqslant \frac{1}{n}$. Тогда найдем

$$\frac{\mu(\omega_r)}{r^{p-1}}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\operatorname{mes}(\omega_r O_k)}{r^{p-1}}+\frac{\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\operatorname{mes}(\omega_r O_k)}{r^{p-1}}\leqslant$$

$$\leqslant n\frac{\operatorname{mes}\omega_r}{r^{p-1}}+(n+1)^{p-1}\sum_{k=n+1}^{\infty}\operatorname{mes}O_k<$$

$$<\frac{\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)}+(n+1)^{p-1}\frac{1}{2^n}<C_p,$$

каково бы ни было $n\geqslant 1$, где C_p зависит только от p. Следовательно. отношение $\frac{\mu(\omega_r)}{r^{p-1}}<C_p$ для $0<r\leqslant 1$; при $r>1$ это отношение $<\mu(\omega_r)\leqslant 1$. Итак, $\frac{\mu(\omega_r)}{r^{p-1}}<C_p$, равномерно относительно всех точек Q пространства и всех r, что доказывает условие 5°.

Образуем теперь соответствующую построенному слою $\mu(e)$ субгармоническую функцию $v(Q)=-\int\limits_K g(P;Q)\,d\mu(e)$, где K шар, содержащий внутри область G, которая будет удовлетворять следующим условиям:

a) $\Delta^* v(Q)=+\infty$ в точках множества E, ибо в этих точках функция распределения $\mu(e)$ имеет плотность, равную $+\infty$ [1,2];

b) $\Delta^* v(Q)\geqslant 0$ всюду в области K, потому что $v(Q)$ — субгармоническая;

c) $v(Q)$ конечна всюду в области K.

В самом деле, достаточно, в случае $p>2$, показать, что $\int\limits_K\frac{d\mu(e)}{\overline{PQ}^{p-2}}$ конечен в любой точке Q области K. Пусть Q_0 такая точка. Опишем около Q_0, как центра, шар K_1 радиуса h, целиком принадлежащий области K, и обозначим $K=K_1+K_2$. Тогда

$$\int\limits_K\frac{d\mu}{\overline{PQ_0}^{p-2}}=\int\limits_{K_1}\frac{d\mu}{\overline{PQ_0}^{p-2}}+\int\limits_{K_2}\frac{d\mu}{\overline{PQ_0}^{p-2}},$$

где второе слагаемое, очевидно, имеет конечное значение. Что касается первого слагаемого, то $\int\limits_{K_1}\frac{d\mu}{\overline{PQ_0}^{p-2}}=\int\limits_0^h\frac{dI(t)}{t^{p-2}}$, где $I(t)$ — масса, заключенная внутри шара с центром Q_0 радиуса t. Интегрированием по частям получим

$$\int\limits_{K_1}\frac{d\mu}{\overline{PQ_0}^{p-2}}=\int\limits_{h_0}^h\frac{dI(t)}{t^{p-2}}=\frac{I(h)}{h^{p-2}}+(p-2)\int\limits_0^h I(t)\frac{dt}{t^{p-1}}<\frac{I(h)}{h^{p-2}}+(p-2)C_p h,$$

чем свойство c) доказано. Аналогично доказывается свойство c) в случае $p=2$.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(Q)=u(Q)+\varepsilon v(Q),$$

причем выбором числа ε достигнем того, что в точке Q_1 будет существовать неравенство

$$F(Q_1) > U(Q_1), \tag{3}$$

что возможно осуществить вследствие (2).

Так как на границе Г выполнено неравенство (1), то $F(Q) \leqslant U(Q)$ на Г. Заметим, сверх того, что $F(Q)$ полунепрерывна сверху в области G. Очевидно $\overline{\Delta}^* F(Q)$ не может быть больше или равно нулю всюду в области G, так как в этом случае функция $F(Q)$ была бы субгармонической и, следовательно, неравенство $F(Q) \leqslant U(Q)$, имеющее место на границе области D, было бы справедливо и внутри D, что невозможно вследствие неравенства (3). С другой стороны, обобщенный оператор $\overline{\Delta}^* F(Q)$ может быть отрицательным лишь в точках E, так как вне E имеем $\overline{\Delta}^* u(Q) \geqslant 0$, $\underline{\Delta}^* v(Q) \geqslant 0$. В точках же множества E будет $\overline{\Delta}^* u(Q) > -\infty$, $\underline{\Delta}^* v(Q) = +\infty$; следовательно, в этих точках $\overline{\Delta}^* F(Q) > 0$. Итак, $\overline{\Delta}^* F(Q) \geqslant 0$ всюду в области G.

Следовательно, функция $F(Q)$ является субгармонической в области G, что согласно неравенству (3) невозможно.

Математический институт
при Московском гос. университете
им. М. В. Ломоносова

Поступило
13 III 1941

ЛИТЕРАТУРА

[1] Saks S., On the operators of Blaschke and Privaloff for subharmonic functions, Матем. сборн., 9 (1941), 451–456.

[2] Privaloff I., On a theorem of S. Saks, Матем. сборн., 9 (1941), 457–460.

[3] Brelot M., Étude des fonctions subharmoniques au voisinage d'un point, Paris, Hermann, 1934.

[4] Привалов И. И., Приложения понятия гармонической меры множества к некоторым проблемам теории функций, Матем. сборн., 3 (1938), 527—533.

I. PRIVALOV. SUR LA DÉFINITION D'UNE FONCTION SUBHARMONIQUE

RÉSUMÉ

Dans le présent article le théorème suivant est démontré.

Si E_1 est un ensemble de points borné et fermé situé dans l'espace à p dimensions et de capacité nulle, alors chaque fonction $u(Q)$ uniforme au voisinage de E_1 bornée supérieurement et semicontinue supérieurement sera nécessairement subharmonique dans un domaine contenu E_1 pourvu que $\overline{\Delta}^* u(Q) > -\infty$ partout dans ce voisinage et que l'on ait presque partout $\overline{\Delta}^* u(Q) \geqslant 0$.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 5 (1941), 285—296 Série mathématique

А. Л. ШАГИНЯН

К ВОПРОСУ ОБ АППРОКСИМАЦИИ В СРЕДНЕМ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

(*Представлено академиком* **С. Л. Соболевым**)

В работе рассматриваются вопросы аппроксимации функций комплексного переменного в среднем полиномами и рациональными функциями. Устанавливаются критерии полноты и неполноты в зависимости от характера области. В конце рассматривается одновременная аппроксимация в среднем в двух соприкасающихся областях.

Пусть B — любая односвязная область, с конечной внутренней площадью, на плоскости комплексной переменной $z=x+iy$. Отнесем к классу F_2 все функции, однозначные и регулярные в B и удовлетворяющие условию

$$\iint_B |f(z)|^2 \, dx \, dy < \infty. \tag{1}$$

Совокупность всевозможных полиномов будем называть полной в классе F_2, если любая функция $f(z)$ из F_2 допускает аппроксимацию в среднем:

$$\inf \iint_B |f(z) - Q_n(z)|^2 \, dx \, dy = 0, \tag{2}$$

где $\{Q_n(z)\}$ — последовательность соответствующим образом подобранных полиномов.

Для ограниченных областей со связным дополнением — в так называемых областях Каратеодори — имеет место полнота полиномов в классе F_2 [1]. В случае областей, не принадлежащих классу Каратеодори, доказано, что полнота зависит от метрических свойств областей [2, 3].

Ниже мы приводим некоторые результаты относительно аппроксимации в среднем рациональными функциями. В § 1 мы показываем, что существует область, отличная от единичного круга, внутри которой имеет место полнота системы полиномов и замыкание которой совпадает с единичным кругом *. Более того, существует область, замыкание которой совпадает со всей плоскостью, внутри которой все-таки имеет место полнота. Аппроксимация в случае второй области отличается от первой тем, что в этом случае полиномиальные приближения пред-

* Мысль о существовании таких областей высказал в устной беседе М. В. Келдыш.

ставляют некоторые рациональные функции с полюсом на границе области.

В § 2 приводится класс неограниченных областей, внутри которых система полиномов не полна.

В § 3, как следствие из предыдущего, доказано, что возможность аппроксимации в среднем рациональными функциями, полюсы которых лежат на контуре области, зависит от метрических свойств этих областей как в случае областей Каратеодори, так и в случае любых областей.

В § 4 рассматривается вопрос об одновременной аппроксимации в среднем в нескольких областях, имеющих общие граничные точки.

1

Обозначим через $\varphi(z)$ одну из функций, однолистно и конформно отображающих область B на единичный круг $|w| < 1$. Пусть $\psi(w)$ обратная функция. Приведем два предложения, необходимые нам в дальнейшем.

I. *Для выполнения равенства* (2) *для любой функции из класса* F_2 *необходимо и достаточно, чтобы оно выполнялось для функций* $\{\varphi'(z)[\varphi(z)]^n\}$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$.

Необходимость этого условия очевидна, так как функции $\{\varphi'(z)[\varphi(z)]^n\}$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ принадлежат классу F_2 в B.

Для доказательства достаточности заметим, что так как $f(z) \subset F_2$ в B, то $f[\psi(w)]\psi'(w) \subset F_2$ в $|w| < 1$.

Подберем последовательность полиномов $\{P_n(w)\}$ так, чтобы

$$\inf \iint\limits_{|w|<1} |f[\psi(w)]\psi'(w) - P_n(w)|^2 \, du\, dv = 0$$

или

$$\inf \iint\limits_{B} |f(z) - P_n[\varphi(z)]\varphi'(z)|^2 \, dx\, dy = 0.$$

Если для всех функций $\varphi'(z)[\varphi(z)]^n$ возможна аппроксимация полиномами, то в этом равенстве последовательность функций $\{P_n[\varphi(z)]\varphi'(z)\}$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$, очевидно, можно заменить последовательностью полиномов.

Пусть $\{G_k\}$ — последовательность односвязных областей, содержащих некоторый круг с центром в z_0 и сходящихся, в смысле Каратеодори, к ядру G.

Обозначим через $\varphi_k(z)$ $(\varphi_k(0)=0,\ \varphi'(0) > 0)$ функцию, которая отображает конформно G_k на единичный круг, и пусть $\varphi(z)$ $(\varphi(0)=0,$ $\varphi'(0) > 0)$ отображает G на $|w| < 1$.

II. *Если через* $\vartheta_k(z)$ *обозначить функцию, которая совпадает с* $\varphi_k(z)$ *в общих точках областей* G_k *и* G, *а в остальных точках области* G *равна нулю, то*

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{G} |\varphi'(z)[\varphi(z)]^n - \vartheta'_k(z)[\vartheta_k(z)]^n|^2 \, dx\, dy = 0. \tag{3}$$

Обозначим круговое изображение круга $|w| \leqslant 1-\varepsilon$ $(|\varepsilon|=1)$ в области G через $\overline{G}$. Так как $\{G_k\}$ сходятся к ядру G, то в $\overline{G}$ равномерно

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k'(z)[\varphi_k(z)]^n = \varphi'(z)[\varphi(z)]^n \quad (n=0, 1, 2, \ldots);$$

с другой стороны,

$$\inf \iint |\varphi'(z)\varphi^n(z) - \vartheta_k'(z)\vartheta_k^n(z)|^2\,dx\,dy = 0.$$

Из этих двух замечаний следует равенство (3). Перейдем к нашим построениям.

ТЕОРЕМА 1. *Существует область G, внутри которой система полиномов полна и замыкание которой совпадает со всей плоскостью, тогда как сама она отлична от всей плоскости.*

Эту область мы построим как ядро некоторой сходящейся последовательности областей $\{G_n\}$. За область G_0 мы примем единичный круг.

Из окружности единичного круга проведем радиальные лучи с аргументами $\frac{2\pi p}{2^n}$ $(p=0, 1, 2, \ldots, 2^n-1)$ до окружности радиуса $R_n = n$. Окружим эти отрезки суживающимися к концам полосками, ограниченными достаточно хорошими контурами так, чтобы в области G_n, состоящей из G_{n-1} и из этих полос, имела место полнота. Ширина полосок должна быть достаточно малой, чтобы удовлетворялось условие, которое будет сформулировано ниже.

Обозначим через $\varphi_n(z)$ $(\varphi_n(0)=0,\ \varphi_n'(0)>0)$ функцию, конформно отображающую G_n на единичный круг.

Определим полиномы $P_{n0}(z), P_{n1}(z), \ldots, P_{nn}(z)$ так, чтобы в области G_n имели место неравенства

$$\iint_G |\varphi_n'(z)\varphi_n^k(z) - P_{nk}(z)|^2\,dx\,dy < \frac{1}{2^{n+1}} \quad (k=0, 1, 2, \ldots, n). \tag{4}$$

Пусть $\vartheta_n(z)$ — функция, совпадающая с $\varphi_n(z)$ в G_n и равная нулю вне G_n. Обозначим

$$M_n = \max|P_{nk}(z)| \quad \text{при } |z|=1 \quad (k=0, 1, 2, \ldots, n).$$

Тогда вне единичного круга будут иметь место неравенства ([4])

$$|P_{nk}(z)| < M_n|z|^{s_n} \quad (k=0, 1, 2, \ldots, n), \tag{5}$$

где s_n — наибольшая степень переменной z в многочленах $\{P_{nk}(z)\}$ $(k=0, 1, 2, \ldots, n)$.

Полагая, что упомянутые ранее полоски построены так, что концентрические окружности пересекают границы каждой из них лишь в двух точках, мы будем в дальнейшем достраивать область G_n так, чтобы интеграл

$$M_n \int_1^\infty T_n(\rho)\,\rho^{s_n+1}\,d\rho < \frac{1}{2^{n+1}}, \tag{6}$$

где через $T_n(\rho)$ обозначена сумма центральных углов, соответствующих дугам, которые будут отсекать на окружности $|z|=\rho$ полоски, вводи-

мые в дальнейшем (не входящие в G_n). Для этого достаточно строить полоски, вводимые при переходе от области G_{n+p} и G_{n+p+1}, так, чтобы выполнялось неравенство

$$M_n \int_1^p T_n^{(p)}(\rho)\,\rho^{s_n+1}\,d\rho < \frac{1}{2^{n+p+1}},$$

где $\rho T_n^{(p)}(\rho)$ — сумма дуг, высекаемых этими полосками на окружности радиуса ρ.

Условие (6) ограничивает лишь быстроту суживания и никак не ограничивает форму тех полос, которыми мы будем достраивать G_n.

Если обозначим через $\tilde{G}$ область, которая получится из G_n дополнением ее какими-либо полосками, удовлетворяющими условию (6), то, очевидно, в этой области $\tilde{G}$ будут иметь место неравенства

$$\iint_{\tilde{G}} |\vartheta_n'(z)\,\vartheta_n^k(z) - P_{nk}(z)|^2\,dx\,dy < \frac{1}{2^n}, \tag{7}$$

так как $\vartheta_n(z)=0$ вне G_n, а также в силу (5) и (6), учитывая, что $T_n(\rho)\,\rho\,d\rho$ есть сумма плоских элементов между окружностями $|z|=\rho$ и $|z|=\rho+d\rho$, входящих в G и лежащих вне G_n.

Продолжая этот процесс, мы получим бесконечную последовательность областей $G_1 \subset G_2 \subset \ldots$, каждая из которых содержит предыдущие.

Обозначим предельную область через G. Эта область будет удовлетворять неравенству (5). Следовательно, в G будет иметь место неравенство (7). Вообще, из указанных построений, очевидно, следует, что в области G имеют место неравенства

$$\iint_G |\vartheta_n'(z)\,\vartheta_n^k(z) - P_{nk}(z)|^2\,dx\,dy < \frac{1}{2^n} \quad (k=0, 1, 2, \ldots, n;\ n=1, 2, \ldots). \tag{8}$$

Но по ранее доказанной теореме

$$\lim_{n\to\infty} \iint_G |\varphi'(z)\,\varphi^k(z) - \vartheta_n'(z)\,\vartheta_n^k(z)|^2\,dx\,dy = 0,$$

где $\varphi(z)$ $(\varphi(0)=0,\ \varphi'(0)>0)$ — функция, конформно отображающая G на единичный круг; поэтому из неравенств (7) следует

$$\lim_{n\to\infty} \iint_G |\varphi'(z)\,\varphi^k(z) - P_{nk}(z)|^2\,dx\,dy = 0 \quad (k=0, 1, 2, \ldots),$$

т. е. в G имеет место полнота. Так как, с другой стороны, лучи, соответствующие аргументам $\frac{2\pi p}{2^n}$ $(p, n=0, 1, 2, \ldots)$, расположены всюду плотно, то замыкание G заполняет всю плоскость. В силу неравенств (5) сама область G не может совпадать с полной плоскостью. Наше построение закончено.

Аналогичным образом можем построить область, в которой система полиномов полна и которая при замыкании совпадает с единичным кругом.

2

Укажем теперь класс неограниченных областей, в которых не имеет места полнота системы полиномов.

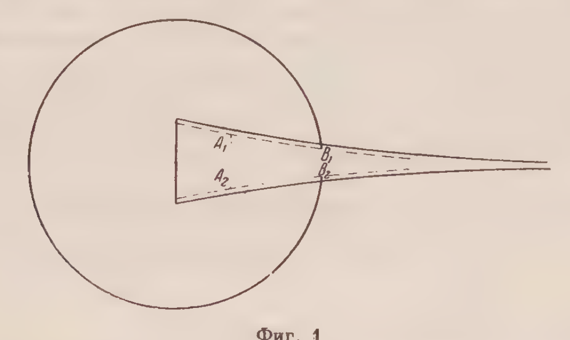
В области, расположенной справа от оси y, ограниченной осью Oy и кривыми $y = ae^{-bx^p}$, $y = ce^{-dx^p}$, $(x \geqslant 0)$, *где a, c — произвольные действительные числа, b, d — произвольные неотрицательные числа и* $p < \frac{1}{2}$, *система полиномов не полна.*

Проведем доказательство для области B, ограниченной осью Oy и кривыми $y_1 = e^{-x^p}$, $y_2 = -e^{-x^p}$ $(x \geqslant 0)$.

Предположим, что в B имеет место полнота. Покажем, что это приводит к противоречию. Проведем кривые

$$y = k_1 y_1 \quad (0 < k_1 < 1); \qquad y = k_2 y_2 \quad (0 < k_2 < 1).$$

Обозначим через $A_1 B_1$ и $A_2 B_2$ отрезки, отсекаемые от этих кривых прямой $x = 1$ и окружностью $|z| = R$. Пусть L означает замкнутый



Фиг. 1

контур, состоящий из прямолинейного отрезка $A_2 A_1$ дуги $A_1 B_1$, кривой $y = k_1 y_1$, большой дуги $B_1 B_2$ окружности $|z| = R$ и дуги $B_2 A_2$ кривой $y = k_2 y_2$ (фиг. 1). Функция $e^{-\varepsilon (z-1)^q}$, где $|\varepsilon| = 1$, $p < q < \frac{1}{2}$, регулярна и однозначна на плоскости с разрезом $1 \leqslant x \leqslant \infty$. Мы докажем невозможность равенства

$$\inf \iint\limits_B \left| \frac{1}{z - \alpha} - P_n(z) \right|^2 dx\, dy = 0, \tag{9}$$

где $\frac{1}{z - \alpha}$, при α, лежащем вне B, очевидно, принадлежит к классу F_2.

Предположим, что равенство (9) выполняется для некоторой последовательности полиномов $\{P_n(z)\}$.

Составим контур L при $R > |\alpha|$. Тогда

$$\int\limits_L e^{\varepsilon (z-1)^q} \left\{ \frac{1}{z - \alpha} - P_n(z) \right\} dz = 2\pi i e^{\varepsilon (\alpha - 1)^q}.$$

Отсюда

$$\int\limits_L | e^{\varepsilon (z-1)^q} | \cdot \left| \frac{1}{z - \alpha} - P_n(z) \right| \cdot |dz| \geqslant 2\pi | e^{\varepsilon (\alpha - 1)^q} |;$$

применяя неравенство Шварца, получаем

$$\int\limits_L e^{\varepsilon(z-1)^q}\left|\frac{1}{z-a}-P_n(z)\right|^2\cdot|dz|\geqslant\delta>0,$$

где

$$\delta=\frac{4\pi^2 e^{2\varepsilon(a-1)^q}}{\int\limits_L|e^{\varepsilon(z-1)^q}|\cdot|dz|}.$$

Очевидно, при соответствующем подборе ε числа δ при различных k_1 и k_2 для кривых L имеют положительную нижнюю границу δ_0. Таким образом, для любых контуров L при $R>|\alpha|$ и любом многочлене $P_n(z)$ имеем оценку

$$\int\limits_L|e^{\varepsilon(z-1)^q}|\cdot\left|\frac{1}{z-a}-P_n(z)\right|^2\cdot|dz|\geqslant\delta_0>0. \qquad (10)$$

Если допустить возможность равенства (9), то при фигурирующих там многочленах $\{P_n(z)\}$ часть интеграла (10) по отрезку A_2A_1 стремится к нулю при $n\to\infty$. С другой стороны, так как $q<\frac{1}{2}$, число ε можем предполагать таким, чтобы при фиксированном $P_n(z)$ часть интеграла (10) равномерно стремилась к нулю на дуге B_1B_2 при $R\to\infty$.

Таким образом, при достаточно большом n получим

$$\int\limits_{A_1B_1+A_2B_2}|e^{\varepsilon(z-1)^q}|\cdot\left|\frac{1}{z-a}-P_n(z)\right|^2\cdot|dz|\geqslant\frac{\delta_0}{2}.$$

Заключаем, что при достаточно большом n

$$\int\limits_l|e^{\varepsilon(z-1)^q}|\cdot\left|\frac{1}{z-a}-P_n(z)\right|^2\cdot|dz|>\frac{\delta_0}{4},$$

где l — дуга A_1B_1 при произвольном k_1, либо дуга A_2B_2 при произвольном k_2.

Для определенности предположим

$$\int\limits_{A_1B_1}|e^{\varepsilon(z-1)^q}|\cdot\left|\frac{1}{z-a}-P_n(z)\right|^2\cdot|dz|>\frac{\delta_0}{4}$$

при любом $0<k_1<1$. Тем более

$$\int\limits_1^\infty|e^{\varepsilon(z-1)^q}|\cdot\left|\frac{1}{z-a}-P_n(z)\right|^2\cdot|dz|>\frac{\delta_0}{4}, \qquad (11)$$

где $d\sigma=|dz|$ и интегрирование совершается по дуге любой кривой $y=ke^{-x^p}$ $(0<k<1)$ между $x=1$ и $x=\infty$.

Пользуясь неравенством (11), оценим интеграл (9) снизу. Заменяя переменное y через k посредством соотношения $y=ke^{-x^p}$, получим

$$\iint\limits_B \left|\frac{1}{z-a} - P_n(z)\right|^2 dx\,dy =$$

$$= \int\limits_{k=0}^{1} dk \int\limits_{x=0}^{\infty} |e^{-x^p}| \cdot \left|\frac{1}{z-a} - P_n(z)\right|^2 dx > \int\limits_0^1 dk \int\limits_1^{\infty} e^{-x^p} \left|\frac{1}{z-a} - P_n(z)\right|^2 dx.$$

Но так как на кривых $y = e^{-x^p}$, очевидно,

$$\left|\frac{dx}{dz}\right| \geqslant \beta > 0, \quad \frac{e^{-x^p}}{|e^{+\varepsilon(z-1)^q}|} \geqslant \gamma > 0$$

при $1 \leqslant x \leqslant \infty$, где β и γ — определенные постоянные, отличные от нуля, то

$$\iint\limits_B \left|\frac{1}{z-a} - P_n(z)\right|^2 dx\,dy > \beta\gamma \int\limits_0^1 dk \int\limits_1^{\infty} \left|\frac{1}{z-a} - P_n(z)\right|^2 \cdot |e^{\varepsilon(z-1)^q}|\, dx > \beta\gamma\,\frac{\delta_0}{4}.$$

Полученная оценка противоречит условию (9), следовательно, наше утверждение доказано. Отметим, что построенная нами область имеет связное дополнение.

Таким образом, приходим к теореме: *в неограниченных областях, принадлежащих даже классу Каратеодори, полнота зависит от метрических свойств этих областей.*

Расхождение этого результата с соответствующим результатом для ограниченных областей объясняется тем, что в случае неограниченных областей полиномиальные приближения представляют из себя приближения рациональными функциями с полюсом на границе.

3

Как следствие предыдущего построения, докажем, что *в односвязных областях, даже если они ограничены и принадлежат классу Каратеодори, возможность аппроксимации вида* (1) *рациональными функциями, полюсы которых лежат на границе области, зависит от метрических свойств этих областей.*

Примером ограниченной области, где указанная аппроксимация невозможна, может служить область, которая получится из части построенной выше области преобразованием $u + iv = w = \frac{1}{z}$ при $x \geqslant 1$. Это будет область, ограниченная кривыми

$$\frac{v}{u^2+v^2} = \exp\left[-\left(\frac{u}{u^2+v^2}\right)^p\right]$$
$$-\frac{v}{u^2+v^2} = \exp\left[-\left(\frac{u}{u^2+v^2}\right)^p\right]$$

при $0 < p < \frac{1}{2}$, $0 \leqslant u \leqslant 1$ и прямой $u = 1$.

В этой области невозможна аппроксимация вида (1) рациональными функциями $P_n\left(\frac{1}{w}\right)$ для произвольных функций из класса F_2, например невозможно равенство

$$\inf \iint_B \left| \frac{w}{1 - wa} - P_n\left(\frac{1}{w}\right) \right|^2 du\, dv = 0,$$

где $\frac{1}{a}$ — аффикс произвольной точки, лежащей вне области. Если бы это равенство имело место, то путем перехода на плоскость $z = \frac{1}{w}$ мы получили бы

$$\inf \iint_{B'} \left| \frac{1}{z - a} - P_n(z) \right|^2 \frac{dx\, dy}{|z|^4} = 0,$$

где B' — часть построенной ранее бесконечной области (фиг. 1) при $x \geqslant 1$.

Легко доказать, что это равенство противоречит неравенству (3).

Аналогично тому, как это сделано в § 1, легко построить область, топологически эквивалентную вышеприведенной, внутри которой возможна аппроксимация (1) для любых $f(w) \subset F_2$ рациональными функциями $P_n\left(\frac{1}{w}\right)$, где $w = 0$ лежит на границе области. При построении такой области можно исходить из очевидного свойства областей класса Каратеодори — в них возможна аппроксимация вида (1) для любых $f(w) \subset F_2$ рациональными функциями с фиксированными полюсами вне этой области.

4

Пусть G_1 и G_2 — произвольные ограниченные области Каратеодори. Определим в $G = G_1 + G_2$ класс B_2 функций

$$F(z) = \begin{cases} f_1(z) & \text{при} \quad z \subset G_1 \\ f_2(z) & \text{при} \quad z \subset G_2, \end{cases}$$

где f_1, f_2 — голоморфные функции с интегрируемым квадратом модуля, определенные соответственно в областях G_1, G_2.

Исследуем вопрос о возможности аппроксимации вида

$$\lim \iint_G |F(z) - P_n(z)|^2 dx\, dy = 0, \tag{12}$$

где $\{P_n(z)\}$ — последовательность полиномов.

Докажем, что *в совокупности любых ограниченных областей Каратеодори, имеющих не более одной общей граничной точки, имеет место полнота полиномов, в смысле* (1), *в классе* B_2. *В случае, когда* G_1 *и* G_2 *имеют более одной граничной точки, полнота зависит от метрических свойств этих областей.*

Если G_1 и G_2 не имеют общих граничных точек, полнота доказывается так же, как и в случае одной области.

Пусть теперь G_1 и G_2 имеют одну общую граничную точку $A(\alpha)$. Равенство (12), очевидно, будет доказано для любых $F(z)$, если доказать его для

$$F_1(z) = \begin{cases} f_1(z) & \text{при} \quad z \subset G_1 \\ 0 & \text{при} \quad z \subset G_2 \end{cases}$$

и

$$F_2(z)=\begin{cases} 0 & \text{при } z\subset G_1 \\ f_2(z) & \text{при } z\subset G_2. \end{cases}$$

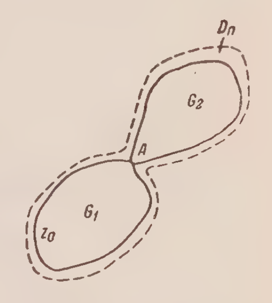
Докажем, что

$$\inf \iint_G |F_1(z)-P_n(z)|^2\,dx\,dy=0,$$

т. е.

$$\inf\left\{\iint_{G_1}|f_1(z)-P_n(z)|^2\,dx\,dy+\iint_{G_2}|P_n(z)|^2\,dx\,dy\right\}=0. \tag{13}$$

Рассмотрим последовательность областей $D_1\supset D_2\supset D\supset\ldots$, покрывающих G_1 и G_2 и сходящихся к $G=G_1+G_2$ (фиг. 2).



Фиг. 2

Пусть $\varphi(z)$ ($\varphi(z_0)=0$, $\varphi'(z_0)>0$) отображает однолистно и конформно G_1 на круг $|w|<1$; $\varphi_n(z)$ ($\varphi_n(z_0)=0$, $\varphi_n'(z_0)>0$), $n=0, 1, 2, \ldots$ — соответствующие функции для D_1, D_2, ... При данном $\varepsilon>0$ подберем полином $Q(z)$ так, чтобы (см. § 1)

$$\iint_{G_1}|f_1(z)-Q(\varphi(z))\,\varphi'(z)|^2\,dx\,dy<\varepsilon.$$

Из теоремы II (§ 1) следует

$$\lim_{n\to\infty}\iint_{G_1}|Q(\varphi(z))\,\varphi'(z)-Q(\varphi_n(z))\,\varphi_n'(z)|^2\,dx\,dy=0.$$

Выбираем настолько большое значение n, чтобы

$$\iint_{G_1}|Q(\varphi(z))\,\varphi'(z)-Q(\varphi_n(z))\,\varphi_n'(z)|^2\,dx\,dy<\varepsilon.$$

Тогда при фиксированных $Q(w)$ и $\varphi_n(z)$ имеем

$$\iint_{G_1}|f_1(z)-Q(\varphi_n(z))\,\varphi_n'(z)|^2\,dx\,dy<4\varepsilon\,. \tag{14}$$

Обозначим через δ_n часть области G_1, в которую переходит G_2 при отображении $w=\varphi_n(z)$. Тогда

$$\iint_{G_2}|Q(\varphi_n \qquad \varphi_n'(z)|^2\,dx\,dy=\iint_{\delta_n}|Q(z)|^2\,dx\,dy.$$

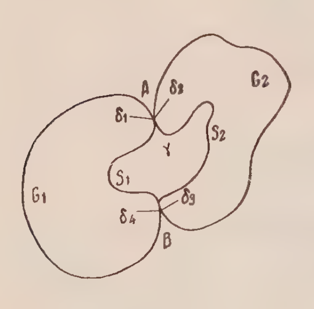
Очевидно, $\lim\limits_{n\to\infty}\delta_n=0$. Поэтому, изменяя в случае необходимости значение n в (14), мы можем достигнуть неравенства

$$\iint_{G_1}|f_1(z)-Q(\varphi_n(z))\,\varphi_n'(z)|^2\,dx\,dy+\iint_{G_2}|Q(\varphi_n(z))|\cdot|\varphi_n'(z)|^2\,dx\,dy<5\varepsilon.$$

Но так как $Q(\varphi_n(z))\,\varphi_n'(z)$ регулярна на замкнутой совокупности $\overline{G}_1+\overline{G}_2$, то по теореме Рунге можем определить полином $P(z)$ так, чтобы

$$\iint_{G_1}| \qquad)-P(z)|^2\,dx\,dy+\iint_{G_2}|P(z)|^2\,dx\,dy<6\varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ было выбрано произвольно, то равенства (13), а следовательно, и (12) доказаны.



Фиг. 3

Приведем теперь пример пары областей $G = G_1 + G_2$, в которых не имеет места полнота.

Возьмем две области Каратеодори, имеющие общие граничные точки A и B (фиг. 3). Предположим, что A и B достижимы изнутри областей G_1 и G_2 нулевыми углами, состоящими из кривых, имеющих в этих точках соприкасание конечного порядка p. Пусть α, β, γ — соответственно аффиксы точек A, B и произвольной точки, лежащей внутри контура BS_2AS_1B (фиг. 3).

Докажем невозможность аппроксимации

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{G_1+G_2} \left| \frac{1}{z-\gamma} - P_n(z) \right|^2 dx\,dy = 0. \qquad (15)$$

Для этого проведем через точки A и B произвольную спрямляемую замкнутую кривую C, состоящую из дуг $(AB)_1$ и $(AB)_2$, расположенных, соответственно, внутри областей G_1, G_2.

При произвольном многочлене $P(z)$ получим

$$\int\limits_C (z-\alpha)^p\,(z-\beta)^p \left\{ \frac{1}{z-\gamma} - P_n(z) \right\} dz = 2\pi i\,(\gamma-\alpha)^p\,(\gamma-\beta)^p;$$

отсюда

$$\int\limits_C |z-\alpha|^p\,|z-\beta|^p \left| \frac{1}{z-\gamma} - P(z) \right| |dz| \geqslant 2\pi\,|(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)|^p,$$

и применяя неравенство Шварца,

$$\int\limits_C |z-\alpha|^{2\beta}\,|z-\beta|^{2\beta} \left| \frac{1}{z-\gamma} - P_n(z) \right|^2 |dz| \geqslant \frac{4\pi^2\,|(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)|^{2\beta}}{L}.$$

где L — длина C.

Если допустим возможность (15), то на каждой замкнутой совокупности внутри $G = G_1 + G_2$

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{z-\gamma} - P_n(z) \right\} = 0.$$

Поэтому, при достаточно большом n, из предыдущего неравенства получим

$$\int\limits_{\delta_1+\delta_2+\delta_3+\delta_4} |z-\alpha|^{2p}\,|z-\beta|^{2p} \left| \frac{1}{z-\gamma} - P_n(z) \right|^2 |dz| \geqslant \frac{2\pi^2\,|\gamma-\alpha|^2\,|\gamma-\beta|^2}{L},$$

где δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 — произвольно малые дуги в G_1 и G_2, упирающиеся в точки A и B.

Из последнего неравенства следует, что хотя бы для одного семейства дуг, например семейства δ_1, имеем

$$\int_{\delta_1} |z-\alpha|^{2p} |z-\beta|^{2p} \left| \frac{1}{z-\gamma} - P_n(z) \right|^2 |dz| > \frac{\pi^2 |(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)|^{2p}}{2L}; \qquad (16)$$

в противном случае, группируя соответствующим образом подобранные дуги δ_k, мы пришли бы к противоречию с указанным неравенством*.

Неравенство (16) противоречит (12). Это легко доказать, оценив интеграл в формуле (12) в окрестности точки A.

Отметим еще следующий пример: *существует пара областей G_1 и G_2 таких, что их замыкания заполняют некоторый квадрат и в их сумме $G = G_1 + G_2$ система полиномов полна.*

Рассмотрим квадрат с вершинами A (0, 0), B (0, 1), C (1, 0), D (1, 1). Прямые $y = \frac{1}{3}$ и $y = \frac{2}{3}$ разобьют его на три части, нижнюю из которых примем за нулевое приближение области G_1, а верхнюю—за нулевое приближение области G_2. Для построения n-ого приближения рассмотрим прямые $x = \frac{P}{2^n}$ и добавим к области $G_1 (G_2)$ прямоугольники с основаниями ширины δ_n, лежащими на прямой $y = \frac{1}{3}$ $\left(y = \frac{2}{3}\right)$ с высотой $\frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$ и с осями на прямых $x = \frac{P}{2^n}$. Если числа δ_n убывают достаточно быстро, то полученные этим процессом области будут удовлетворять поставленным требованиям.

Пусть $P_{nk}(z)$ $(k = 0, 1, \ldots n)$ — полином, удовлетворяющий неравенству

$$\iint_{\Delta_1^{(n)}} |P_{nk}(z)|^2 d\sigma + \iint_{\Delta_2^{(n)}} P_{nk}(z) - z^k|^2 d\sigma < \frac{1}{n},$$

где $\Delta_1^{(n)}$ — часть исходного квадрата, лежащая ниже прямой $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{6 \cdot 2^n}$; $\Delta_2^{(n)}$ — часть, лежащая выше прямой $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{6 \cdot 2^n}$. Обозначим через M_n максимум модулей полиномов P_{nk} в квадрате. Тогда достаточно, чтобы числа δ_{n+p} удовлетворяли неравенствам

$$\delta_{n+p} < \frac{1}{n(M_n + 2^n)^2 \, 2^{2n+p}}.$$

В самом деле, легко убедиться, что из этого неравенства следует

$$\iint_{G_1} |P_{nk}(z)|^2 d\sigma + \iint_{G_2} |P_{nk}(z) - z^k|^2 d\sigma < \frac{2}{n}$$

и, следовательно, полнота системы полиномов в $G_1 + G_2$.

Таким образом утверждение, приведенное в начале параграфа, доказано вполне.

Гос. Ереванский университет

Поступило
28 I 1941

* Ср. нашу заметку ([3]).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Farrell O. J., On approximation to an analytical function by polynomials, Bull. Amer. Mathem. Soc., 40 (1934), 908—914.

[2] Keldych M., Sur l'approximation en moyenne quadrature des fonctions analytiques, Матем. сборн., 5 (1939), 391—401.

[3] Шагинян А. Л., Об аппроксимации полиномами в нежордановых областях, Докл. Ак. Наук СССР, XXVII (1940), 318—321.

[4] Полиа Г. и Сеге Г., Задачи и теоремы из анализа, М.—Л., 1937 [отд. III, зад. 269].

A. ŠAGINJAN. SUR LE PROBLÈME DE L'APPROXIMATION EN MOYENNE DANS LE DOMAINE COMPLEXE

RÉSUMÉ

Soit B un domaine simplement connexe quelconque dont l'aire intérieure est finie et qui est situé dans le plan de la variable complexe $z=x+iy$. Désignons par F_2 la classe de toutes les fonctions uniformes et régulières dans B vérifiant la condition (1) (v. le texte).

L'ensemble de tous les polynomes possibles sera nommé complet dans la classe F_2, si chaque fonction $f(z)$ de F_2 admet une approximation en moyenne

$$\inf \iint_B |f(z)-Q_n(z)|^2\,dx\,dy=0,$$

où $\{Q_n(z)\}$ est une suite de polynomes convenablement choisis.

Pour les domaines bornés dont le complémentaire est connexe—les domaines nommés domaines de Carathéodory — la classe des polynomes est complète dans F_2 ([1]). Dans le cas des domaines qui n'appartiennent pas à la classe de Carathéodory il est démontré que la propriété du système des polynomes d'être complet ou non, dépend des propriétés métriques des domaines ([2,3]).

Dans cet article nous donnons certains résultats concernant l'approximation en moyenne par des fonctions rationnelles. Dans le § 1 nous montrons qu'il existe un domaine qui diffère du cercle unitaire, à l'intérieur duquel le système des polynomes est complet et dont la fermeture coïncide avec le cercle unitaire. D'ailleurs, il existe un domaine dont la fermeture coïncide avec tout le plan et à l'intérieur duquel le système des polynomes est encore complet. L'approximation dans le cas du second domaine diffère de celui du premier en ce que les approximations par polynomes présentent certaines fonctions rationnelles dont le pôle est à la frontière du domaine.

Dans le § 2 on donne une classe de domaines non bornés à l'intéieur de laquelle le système des polynomos n'est pas complet.

Dans le § 3, comme conséquence de ce qui précède, on démontre que la possibilité d'approximer en moyenne par des fonctions rationnelles dont les pôles se trouvent sur le contour du domaine dépend des propriétés métriques de ces domaines dans le cas des domaines de Carathéodory, comme dans celui des domaines quelconques.

Dans le § 4 on considère le problème sur l'approximation en moyenne simultanée dans plusieurs domaines ayant des points frontières communs.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 5 (1941), 297—304 Série mathématique

А. И. ТИХОМИРОВ

ОДНО ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ СКРЕЩЕННОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

(*Представлено академиком* **О. Ю. Шмидтом**)

В работе дается определение скрещенного произведения коммутативного тела и некоторой полугруппы эндоморфизмов. Устанавливаются некоторые свойства таких скрещенных произведений. В частности, установлены необходимые и достаточные условия простоты.

В теории простых алгебр очень большую роль играет введенное Нетером (E. Noether) понятие скрещенного произведения конечного нормального расширения основного поля P с его группой Галуа $G(K, P)$, — понятие, приводящее к единственному пока способу построения простых нормальных алгебр конечного ранга. В настоящей работе* это понятие обобщается на случай произвольного коммутативного поля K и произвольной мультипликативной полугруппы G изоморфных отображений этого поля в себя, причем полугруппа G может быть и бесконечной. Основные теоремы о скрещенных произведениях (нормальность и простота скрещенного произведения, а также описание его подколец — см. M. Deuring, Algebren, 1935, стр. 52 — 55) оказываются при этом следствиями теорем, относящихся к нашему общему случаю, причем даже без предположения об ассоциативности рассматриваемых колец.

Пусть в произвольном коммутативном поле K задана некоторая система G различных изоморфных отображений этого поля в себя или на себя, причем произведение (в смысле умножения отображений) любых двух элементов из G снова принадлежит к G, т. е. G является полугруппой. Элементы из G будут обозначаться через S, T, S_i и т. д., а образ элемента a из K при изоморфизме S — через a^S. В поле K выбираем систему отличных от нуля элементов $a_{S,T}$ для каждой пары изоморфизмов S, T из G. Эта система называется системой факторов конструируемого кольца и будет обозначаться через A.

Ставим теперь в соответствие всякому элементу S из G символ u_S

* Эта работа есть результат участия в семинаре по алгебрам, под руководством А. Г. Куроша и А. И. Узкова в Московском университете в 1940/41 уч. году. Особенно я обязан А. Г. Курошу, указаниями, советами и критикой которого я постоянно пользовался. Приношу ему свою глубокую благодарность.

и образуем модуль линейных форм $\mathfrak{A}=\sum_{S\subset G} u_S K$, в котором, таким образом, предполагается невозможность существования равенств вида $\sum_{i=1}^{n} u_{T_i} b_i = 0$, если не все $b_i = 0$; всякий элемент v из $\mathfrak{A}$ имеет вид $v=\sum_{S\subset G} u_S b_S$, где $b_S \in K$ и лишь конечное число коэффициентов b_S отлично от нуля.

Предположим также, что K служит для $\mathfrak{A}$ областью левых операторов, причем

$$au_S = u_S a^S, \quad a \in K, \quad S \in G, \tag{1}$$

и что $\mathfrak{A}$ удовлетворяет обычным требованиям, предъявляемым к двойному модулю.

Определим теперь в $\mathfrak{A}$ умножение, полагая

$$u_S u_T = u_{ST} a_{S,T}, \tag{2}$$
$$a(u_S u_T) = (au_S)\, u_T, \tag{3}$$
$$(u_S a)\, u_T = u_S (a u_T), \tag{4}$$
$$(u_S u_T)\, a = u_S (u_T a), \quad a \in K, \tag{5}$$

и считая справедливым дистрибутивный закон. Этим $\mathfrak{A}$ превращается в кольцо, которое мы будем называть скрещенным произведением поля K и системы изоморфизмов G при помощи системы факторов A и обозначать через

$$\mathfrak{A} = (A, K, G).$$

Это кольцо будет ассоциативным в том и только в том случае, если элементы системы факторов удовлетворяют соотношениям

$$a_{S,TR}\, a_{T,R} = a_{ST,R}\, a_{S,T}^{R} \tag{6}$$

для произвольно выбранных R, S, T.

В дальнейшем кольцо $\mathfrak{A}$ не будет предполагаться непременно ассоциативным.

ТЕОРЕМА 1. *Кольцо $\mathfrak{A}=(A, K, G)$ обладает единицей в том и только в том случае, если G содержит тождественный автоморфизм E поля K и если сверх того в A справедливы соотношения*

$$a_{S,E} = a_{E,E}, \qquad a_{E,S} = a_{E,E}^{S}. \tag{7}$$

Единицей будет при этом элемент $u_E a_{E,E}^{-1}$.

Доказательство. Заметим, что из условий (1—5) следует для любых v и v' из $\mathfrak{A}$ и любого a из K равенства

$$a(vv') = (av)\, v', \tag{3'}$$
$$(va)\, v' = v\,(av'), \tag{4'}$$
$$(vv')\, a = v\,(v'a). \tag{5'}$$

Если e есть единица кольца $\mathfrak{A}$, то при всяком a из K будет

$$ea = ea\cdot e = e\cdot ae = ae,$$
$$v\cdot ae = va\cdot e = va.$$

Мы будем считать, что поле K содержится в $\mathfrak{A}$, отождествляя ea с a.

Пусть теперь $e=\sum_{i=1}^{m} u_{T_i}b_i$. Тогда из $ea=ae$ после сравнения коэффициентов в равенстве $\sum_{i=1}^{m} u_{T_i}b_ia=\sum_{i=1}^{m} u_{T_i}b_ia^{T_i}$ будем иметь $a=a^{T_i}$, $i=1,2,\ldots,m$; но a был произвольным элементом из K, значит, $T_i=E$, $m=1$ и $e=u_Eb$. Из $eu_E=u_E$ следует далее

$$u_Eb\cdot u_E=u_E\cdot bu_E=u_Ea_{E,E}b=u_E,$$

откуда $b=a_{E,E}^{-1}$. Наконец, из $eu_S=u_S$, $S\in G$, следует

$$u_Ea_{E,E}^{-1}\cdot u_S=u_Sa_{E,S}(a_{E,E}^{-1})^S=u_S,$$

т. е. $a_{E,S}=a_{E,E}^{S}$; аналогично из $u_Se=u_S$ следует $a_{S,E}=a_{E,E}$. Обратное утверждение теоремы проверяется без затруднений.

Заметим, что в ассоциативном случае (7) следует из (6), и поэтому в этом случае для существования единицы в $\mathfrak{A}$ достаточно, чтобы система G содержала E.

ТЕОРЕМА 2. *Если кольцо $\mathfrak{A}=(A,K,G)$ обладает единицей, то элемент u_S в том и только в том случае обладает левым и правым обратными элементами, если S есть автоморфизм поля K и если S^{-1} также содержится в G.*

Доказательство. Пусть $v=\sum_{i=1}^{m} u_{T_i}b_i$ есть левый обратный элемент для элемента u_S. Тогда

$$vu_S=\sum_{i=1}^{m} u_{T_iS}a_{T_i,S}b_i^S=u_Ea_{E,E}^{-1}.$$

Отсюда $T_iS=E$ по крайней мере для одного i; это возможно только в том случае, если S и T — автоморфизмы K. Но $T_iS\neq T_jS$ при $T_i\neq T_j$, следовательно $m=1$, $T_1S=E$, $T_1=S^{-1}$ и $b_1=(a_{S^{-1},S}^{-1}a_{E,E}^{-1})^{S^{-1}}$, откуда $v=u_{S^{-1}}(a_{S^{-1},S}^{-1}a_{E,E}^{-1})^{S^{-1}}$. Аналогично, если v' есть правый обратный элемент для u_S, то $v'=u_{S^{-1}}a_{S,S^{-1}}^{-1}a_{E,E}^{-1}$. Обратно, если $S^{-1}\in G$, то найденные нами выражения для v и v' будут, как легко проверить, служить левым и правым обратными элементами для u_S.

ТЕОРЕМА 3. *Кольцо $\mathfrak{A}=(A,K,G)$ обладает отличным от нуля центром в том и только в том случае, если $E\in G$ и в K существует элемент b, удовлетворяющий условию*

$$b^Sa_{E,S}=ba_{S,E} \tag{8}$$

для всех S из G; центром $\mathfrak{A}$ тогда является аддитивная группа $u_Eb\Delta$, где Δ—подполе K, инвариантное при всех изоморфизмах из G.

Заметим прежде всего, что в случае кольца $\mathfrak{A}$ с единицей $e=u_Ea_{E,E}^{-1}$ условию теоремы в силу (7) удовлетворяет элемент $b=a_{E,E}^{-1}$, и значит, центром $\mathfrak{A}$ в этом случае является поле $e\Delta$.

Доказательство. Пусть $v = \sum_{i=1}^{m} u_{S_i} b_i$, $b_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, m$, есть элемент центра и S — один из изоморфизмов $S_1, \ldots, S_m$, например S_1. Из равенства $v \cdot u_{S_1} c = u_{S_1} c \cdot v$ следует

$$\sum_{i=1}^{m} u_{S_i S_1} a_{S_i, S_1} b_i^{S_1} c = \sum_{i=1}^{m} u_{S_1 S_i} a_{S_1, S_i} b_i c^{S_i} \tag{9}$$

Мы утверждаем, что $S_i S_1 \neq S_j S_1$ при $i \neq j$; действительно, так как $S_i \neq S_j$, то существует такой элемент a из K, что $aS_i \neq aS_j$, но так как S_1 есть изоморфизм, то $aS_i S_1 \neq aS_j S_1$, и следовательно, $S_i S_1 \neq S_j S_1$ и в равенстве (9) слева подобных членов нет. Но справа их также нет, так как в противном случае справа было бы в действительности меньше чем m членов и (9) давало бы линейную зависимость между u_S. Поэтому из сравнения первых членов сумм (9) имеем $b_1^{S_1} c = b_1 c^{S_1}$; но c — произвольный элемент K, следовательно при $c = 1$ мы имеем $b_1^{S_1} = b_1$, откуда, сокращая, получим $c^{S_1} = c$, т. е. $S_1 = E$. Так как этот вывод справедлив для любого S_i, $i = 1, \ldots, m$, то $m = 1$ и $v = u_E b$.

Пусть теперь S — произвольный элемент G; тогда из $vu_S = u_S v$ следует $b^S a_{E,S} = b a_{S,E}$, т. е. должно выполняться условие (8). Наоборот, если элемент b удовлетворяет условию (8), то $u_E b$, как легко проверить, принадлежит к центру.

Пусть $c \in K$ также удовлетворяет условию (8) и $b = cd$; тогда из равенств $c^S a_{E,S} = c a_{S,E}$ и $c^S d^S a_{E,S} = c d a_{S,E}$ следует $d^S = d$ для каждого $S \in G$, т. е. $d \in \Delta$. Легко видеть, что и обратно — всякий элемент bd, где $d \in \Delta$, удовлетворяет условию (8), и значит, $u_E bd$ есть элемент центра кольца $\mathfrak{A}$.

ТЕОРЕМА 4. *Если полугруппа изоморфизмов G содержит тождественный автоморфизм E, то $u_E K$ есть максимальное коммутативное подкольцо (подполе) кольца $\mathfrak{A} = (A, K, G)$.*

Доказательство. Если элемент $v = \sum_{i=1}^{m} u_{T_i} b_i$ перестановочен с произвольным элементом $u_E c$ поля $u_E K$, то из $u_E c \cdot v = v \cdot u_E c$ следует $a_{E,T_i} c^{T_i} = a_{T_i,E} c$. Так как c произвольно, то при $c = 1$ $a_{E,T_i} = a_{T_i,E}$ и $c_{T_i} = c$, откуда $T_i = E$, $m = 1$, $v = u_E b$, т. е. $v \in u_E K$.

Система факторов A' называется ассоциированной с системой факторов A, если факторы a'_{ST} и $a_{S,T}$ связаны соотношением

$$a'_{S,T} = a_{S,T} \frac{c_S^T c_T}{c_{ST}},$$

где c_S и т. д. — произвольные не равные нулю элементы поля K. Очевидно, если A' ассоциирована с A, то, наоборот, A ассоциирована с A'.

ТЕОРЕМА 5. *Если скрещенные произведения $\mathfrak{A} = (A, K, G)$ и $\mathfrak{A}' = (A', K, G')$ операторно изоморфны, то полугруппы G и G' совпадают, а системы факторов A и A' ассоциированы. Наоборот, если A*

и A' ассоциированы, то кольца $\mathfrak{A}=(A,K,G)$ и $\mathfrak{A}'=(A',K,G)$ операторно изоморфны; при этом в качестве области двусторонних операторов рассматривается поле K.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}\cong\mathfrak{A}'$, и этот изоморфизм задан отображениями $u_S \leftrightarrow v' = \sum_{i=1}^{m} u'_{T'_i} c_{T_i}$ элементов базиса кольца $\mathfrak{A}$; тогда из $bu_S = u_S b^S$ следует $bv' = v'b^S$, $b^{T'_i} = b^S$, $T'_i = S$, $m=1$, $S \in G'$, $G' \supseteq G$. Аналогично получается $G \supseteq G'$ и следовательно $G'=G$. Таким образом, $v' = u'_S c_S$, и соответствие принимает вид $u_S \leftrightarrow u'_S c_S$. Произведению $u_S u_T = u_{ST} a_{S,T}$ соответствует произведение $u'_S c_S u'_T c_T = u'_{ST} a'_{S,T} c_S^T c_T = u'_{ST} a_{S,T} c_{ST}$, откуда $a_{S,T} = a'_{S,T} \frac{c_S^T c_T}{c_{ST}}$, т. е. A и A' ассоциированы. Если, наоборот, системы A и A' ассоциированы, то соответствие $u_S \leftrightarrow u'_S c_S$, отображающее $\mathfrak{A}=(A,K,G)$ на $\mathfrak{A}'=(A',K,G)$, как нетрудно видеть, есть операторный изоморфизм.

ТЕОРЕМА 6. *Все подкольца $\mathfrak{B}$ кольца $\mathfrak{A}=(A,K,G)$, для которых K является областью двусторонних операторов, исчерпываются множеством всех подколец вида (A',K,H), где H—полугруппа, содержащаяся в G, а A'—совокупность факторов $a_{S,T}$ из A, у которых S и T входят в H.*

Доказательство. Пусть $u_{T_1}b_1 + \ldots + u_{T_n}b_n = v$, где $b_i \neq 0$, есть произвольный элемент кольца $\mathfrak{B}$. Мы утверждаем, что $u_{T_1}, \ldots, u_{T_n}$ также являются элементами $\mathfrak{B}$. Если $n>1$, то можно указать такой элемент q из поля K, что $q^{T_i} \neq q^{T_j}$ по крайней мере для одной пары изоморфизмов T_i, T_j. Пусть мы так перенумеровали T, что $T_1, T_2, \ldots, T_{i_1}$ теперь — все изоморфизмы из ряда $T_1, T_2, \ldots, T_n$, переводящие q в один и тот же элемент $q^{T_{i_1}}$; $T_{i_1+1}, T_{i_1+2}, \ldots, T_{i_2}$—все изоморфизмы, переводящие q в один и тот же элемент $q^{T_{i_2}}$ и т. д. до T_{i_α}, $i_\alpha = n$. Умножая v слева на $1, q, q^2, \ldots, q^{\alpha-1}$ и обозначая $u_{T_{i_{\beta-1}+1}} b_{i_{\beta-1}+1} + \ldots + u_{T_{i_\beta}} b_{i_\beta}$ через v_β, получим систему равенств

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_\alpha = v,$$

$$v_1 q^{T_{i_1}} + v_2 q^{T_{i_2}} + \ldots + v_\alpha q^{T_{i_\alpha}} = qv,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$v_1 \left(q^{T_{i_1}}\right)^{\alpha-1} + v_2 \left(q^{T_{i_2}}\right)^{\alpha-1} + \ldots + v_\alpha \left(q^{T_{i_\alpha}}\right)^{\alpha-1} = q^{\alpha-1} v,$$

причем все $q^k v$ являются элементами $\mathfrak{B}$. Детерминант этой системы есть детерминант Вандермонда, и он не равен нулю, так как $q^{T_{i_\mu}} \neq q^{T_{i_\nu}}$ при $\mu \neq \nu$. Из этого следует, что эта система разрешима относительно $v_1, \ldots v_\alpha$, которые, таким образом, все принадлежат подкольцу $\mathfrak{B}$. Каждое v_β, как сумма, имеет меньше слагаемых, чем v, и каждое v_β можно подвергнуть тому же процессу и т. д.; в результате окажется, что в $\mathfrak{B}$ содержатся $u_{T_1}, u_{T_2}, \ldots, u_{T_n}$. Следовательно, всевозможные T, служащие индексами у всех u_T из $\mathfrak{B}$, образуют полугруппу $H \subseteq G$ и $\mathfrak{B}=(A',K,H)$.

ТЕОРЕМА 7. *Допустимые двусторонние идеалы кольца* $\mathfrak{A}=(A, K, G)$ *исчерпываются множеством всех подколец* $\mathfrak{a}=(A', K, H)$, *где* H—*такая полугруппа из* G, *что* $GH\subseteq H$, $HG\subseteq H$; *при этом в качестве области двусторонних операторов берётся поле* K.

Доказательство. Если H удовлетворяет требованиям теоремы, то, умножая произвольный элемент $\sum_{i=1}^{m} u_{T_i}a_i$ идеала $\mathfrak{a}$ справа или слева на произвольный элемент $\sum_{j=1}^{n} u_{S_j}b_j$ из кольца $\mathfrak{A}$, получим соответственно элементы $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} u_{T_iS_j}a_{T_i,S_j}a_i^{S_j}b_j$ и $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} u_{S_jT_i}a_{S_j,T_i}b_j^{T_i}a_i$, принадлежащие к идеалу $\mathfrak{a}$, так как T_iS_j и S_jT_i принадлежат к H. Наоборот, если $\sum_{i=1}^{m} u_{T_i}a_i$ есть произвольный элемент допустимого двустороннего идеала $\mathfrak{a}=(A', K, H)$, то вышеприведенные двойные суммы являются элементами $\mathfrak{a}$, и следовательно T_iS_j и S_jT_i должны входить в H, т. е. $HG\subseteq H$, $GH\subseteq H$.

К теоремам 6 и 7 можно добавить следующие замечания.

Замечание 1. Если G содержит тождественный автоморфизм, то теорему 6 можно также сформулировать следующим образом: все подкольца $\mathfrak{B}$ кольца $\mathfrak{A}=(A, K, G)$, удовлетворяющие условию $u_EK\subseteq\mathfrak{B}\subseteq\mathfrak{A}$, исчерпываются множеством всех подколец вида (A', K, H), где полугруппа H удовлетворяет условию $E\subseteq H\subseteq G$, а A' есть совокупность всех факторов $a_{S,T}$ из A, у которых S и T входят в H.

Для того чтобы показать это, надо при доказательстве теоремы 6 слева умножать v не на q^k, а на $u_Eq^k\in\mathfrak{B}$; именно, тогда получится система равенств

$$u_Ev_1+u_Ev_2+\ \dots\ +u_Ev_\alpha=u_Ev\in\mathfrak{B},$$
$$u_Ev_1q^{T_{i_1}}+u_Ev_2q^{T_{i_2}}+\ \dots\ +u_Ev_\alpha q^{T_{i_\alpha}}=u_Eqv\in\mathfrak{B},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$u_Ev_1(q^{T_{i_1}})^{\alpha-1}+u_Ev_2(q^{T_{i_2}})^{\alpha-1}+\ \dots\ +u_Ev_\alpha(q^{T_{i_\alpha}})^{\alpha-1}=u_Eq^{\alpha-1}v\in\mathfrak{B}.$$

Точно так же при решении этой системы относительно u_Ev_β нужно k-ую строку умножить справа на $A_{k\beta}u_E\in\mathfrak{B}$, где $A_{k\beta}$—алгебраическое дополнение элемента, стоящего на пересечении k-ой строки и β-го столбца детерминанта этой системы. Складывая затем все эти равенства, справа мы получим элемент из $\mathfrak{B}$, а слева α сумм вида

$$\sum_{k=0}^{\alpha-1}[u_Ev_\beta(q^{T_{i_\beta}})^k]\,A_{k\beta}u_E=\left\{\sum_{k=0}^{\alpha-1}[u_Ev_\beta(q^{T_{i_\beta}})^k]\,A_{k\beta}\right\}u_E=$$
$$=\left\{u_Ev_\beta\Big[\sum_{k=0}^{\alpha-1}(q^{T_{i_\beta}})^k A_{k\beta}\Big]\right\}u_E$$

[согласно (4′) и дистрибутивному закону]; но все они равны нулю, кроме β-ой, которая, очевидно, равна

$$u_E v_\beta D \cdot u_E = u_{T_{i_{\beta-1}+1}} b'_{i_{\beta-1}+1} + \ldots + u_{T_{i_\beta}} b'_{i_\beta},$$

где все $b' \neq 0$. Продолжение этого процесса дает, что все u_{T_i} входят в $\mathfrak{B}$.

Замечание 2. Если $E \in G$, то рассуждение, приведенное в замечании 1, как легко видеть, позволяет теорему 7 сформулировать как утверждение о произвольных двусторонних идеалах кольца $\mathfrak{A} = (A, K, G)$: всякий двусторонний идеал кольца $\mathfrak{A} = (A, K, G)$, где $G \supset E$, имеет вид (A', K, H), где полугруппа H удовлетворяет условию $GH \subseteq H$, $HG \subseteq H$, и наоборот.

Замечание 3. Если G есть группа, то $\mathfrak{A} = (A, K, G)$ есть простое кольцо, ибо $GH = HG = G$.

В заключение докажем, что замена условия (2) в определении скрещенного произведения, казалось бы, более общим условием $u_S u_T = \sum_{i=1}^{m} u_{R_i} a_i$, где $R_i \in G$ и не все $a_i = 0$, на самом деле не дает ничего нового. Действительно, из равенства $b u_S u_T = u_S u_T b^{ST}$ или $\sum_{i=1}^{m} u_{R_i} b^{R_i} a_i = \sum_{i=1}^{m} u_{R_i} b^{ST} a_i$ следует $b^{ST} = b^{R_i} = \ldots = b^{R_m}$, $ST = R_1 = \ldots = R_m$, $m = 1$ и $u_S u_T = u_{ST} a_{S,T}$.

Механико-математический факультет
Московского гос. университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
12 IV 1941

A. TIHOMIROV. EINE VERALLGEMEINERUNG DES BEGRIFFES DES VERSCHRÄNKTEN PRODUKTES

ZUSAMMENFASSUNG

Es sei K ein kommutativer Körper und G eine Halbgruppe von isomorphen Abbildungen dieses Körpers in sich selbst. Im Körper K wird ein Faktorensystem A gewählt, d. h. ein System von Null verschiedener Elemente $a_{S,T}$ für jedes Paar Isomorphismen S, T von G. Jedem Element S von G wird das Symbol u_S zugeordnet und dann ein Linearformenmodul $\mathfrak{A} = \sum_{S \in G} u_S K$ gebildet, wo die Symbole u_S als linear unabhängig hinsichtlich K angesehen werden. Jedes Element v von $\mathfrak{A}$ hat die Gestalt $v = \sum_{S \subset G} u_S b_S$, in der $b_S \in K$ und die Zahl der von Null verschiedenen Koeffizienten endlich ist.

Es sei ferner das Produkt von links mit den Elementen von K definiert, indem $a u_S = u_S a^S$ gesetzt wird. $\mathfrak{A}$ muss allen Anforderungen genügen, die man dem Doppelmodul auferlegt. Ist nun das Produkt zweier

Elementen von $\mathfrak{A}$ mittels (2), (3), (4), (5) definiert und gilt das distributive Gesetz, so wird der Modul $\mathfrak{A}$ ein Ring, der verschränktes Produkt des Körpers K mit dem System G zum Faktorensystem A genannt wird und als $\mathfrak{A}=(A, K, G)$ bezeichnet wird.

Für derartig gebildete und überhaupt nicht assoziative Ringe werden folgende Theoreme bewiesen.

THEOREM 1. *Ein Ring* $\mathfrak{A}=(A, K, G)$ *besitzt das Einheitselement* e *dann und nur dann, wenn* G *den identischen Automorphismus* E *enthält und ausserdem die Relationen* $a_{S,E}=a_{E,E}$, $a_{E,S}=a^S_{E,E}$ *gelten. Die Einheit* e *ist dabei das Element* $u_E a^{-1}_{E,E}$.

THEOREM 2. *Hat der Ring* $\mathfrak{A}=(A, K, G)$ *die Einheit* e, *so besitzt* u_S *die linke und rechte Inverse dann und nur dann, wenn* S *ein Automorphismus ist und* $S^{-1}\in G$.

THEOREM 3. *Ein verschränktes Produkt* $\mathfrak{A}=(A, K, G)$ *hat ein Zentrum* $\mathfrak{Z}\neq 0$ *dann und nur dann, wenn* G *die Einheit* E *enthält, und es in* K *ein solches Element* b *gibt, das der Bedingung* $b^S a_{E,S}=b a_{S,E}$ *für alle* S *aus* G *genügt; dann ist das Zentrum von* $\mathfrak{A}$ *eine additive Gruppe* $u_E b\Delta$, *in der* Δ *ein bei Isomorphismen von* G *invarianter Teilkörper von* K *ist.*

THEOREM 4. *Enthält* G *das Element* E, *so ist* $u_E K$ *ein maximaler kommutativer Teilring (Teilkörper) von* $\mathfrak{A}=(A, K, G)$.

THEOREM 5. *Sind* $\mathfrak{A}=(A, K, G)$ *und* $\mathfrak{A}'=(A', K, G')$ *operatorisch isomorph, so sind die Halbgruppen* G *und* G' *gleich und die Faktorensysteme* A *und* A' *assoziiert und umgekehrt; als Bereich der zweiseitigen Operatoren wird dabei der Körper* K *betrachtet.*

THEOREM 6. *Jeder Teilring* $\mathfrak{B}$ *von* $\mathfrak{A}=(A, K, G)$, *mit* K *als Bereich von zweiseitigen Operatoren, ist auch ein verschränktes Produkt* (A', K, H), *wo* $H\subseteq G$, $A'\subseteq A$ *sind und umgekehrt.*

THEOREM 7. *Jedes zulässige zweiseitige Ideal vom Ring* $\mathfrak{A}=(A, K, G)$ *mit* K *als Bereich der zweiseitigen Operatoren ist ein Teilring* $\mathfrak{a}=(A', K, H)$, *wo* $H\subseteq G$ *und* $HG\subseteq H$, $GH\subseteq H$ *sind und umgekehrt.*

F o l g e r u n g. Ist G eine Gruppe, so ist $\mathfrak{A}=(A, K, G)$ ein einfacher Ring.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 5 (1941), 305—324 Série mathématique

В. Д. ПОДСЫПАНИН

ОБ ОДНОМ НЕОПРЕДЕЛЕННОМ УРАВНЕНИИ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В статье дается решение в целых числах уравнения $ax^2 - by^4 = \sigma$, где $\sigma = 1, 2, 4, 8, 16$.

1. Построение полей *K*

Цель настоящей работы — дать полное решение в целых числах уравнения

$$ax^2 - by^4 = \sigma,$$

где $\sigma = 1, 2, 4, 8, 16$. Числа a и b при этом надо считать целыми положительными. Без нарушения общности можно считать, что a, b и σ взаимно просты, число a свободно от квадратов, а b от четвертых степеней простых чисел.

Умножая уравнение на соответствующую степень двух, приведем его к виду

$$px^2 - my^4 = 16,$$

где

$$p = \frac{16a}{\sigma}; \qquad m = \frac{16b}{\sigma}.$$

При такой записи общий наибольший делитель чисел m и p может равняться только 1, 2, 4, 8 или 16. Кроме того, p свободно от квадратов, а m свободно от четвертых степеней нечетных простых чисел.

Введем теперь в соответствие каждому решению (x, y) число

$$\mu = \frac{y\sqrt{-m} + \sqrt{-my^2 + 4\sqrt{-m}}}{2}$$

и его сопряженные

$$\mu' = \frac{y\sqrt{-m} - \sqrt{-my^2 + 4\sqrt{-m}}}{2},$$

$$\mu'' = \frac{-y\sqrt{-m} + \sqrt{-my^2 - 4\sqrt{-m}}}{2},$$

$$\mu''' = \frac{-y\sqrt{-m} - \sqrt{-my^2 - 4\sqrt{-m}}}{2}$$

(под корнем квадратным из комплексного числа я подразумеваю его значение с наименьшим положительным аргументом).

Легко видеть, что μ принадлежит некоторому полю K четвертой степени. Это поле тоже будем считать соответствующим решению (x, y).

Как сейчас будет показано, этих полей имеется конечное число даже в предположении, что решений данного уравнения бесконечно много.

В дальнейшем ведется разыскание чисел вида μ в данном конкретном поле. При этом удается доказать, что в данном поле K может существовать, вообще говоря, только одно число μ.

Переходим к разысканию полей K. Пусть

$$\alpha = 4 + y^2\sqrt{-m}, \qquad \alpha' = 4 - y^2\sqrt{-m}.$$

Разложим α на идеалы в поле $R(\sqrt{-m})$, выделив идеалы, входящие в четной степени $\alpha = \mathfrak{a}\mathfrak{b}^2$. Пусть

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_1' \ldots \mathfrak{p}_{s_1}\mathfrak{p}_{s_1}'\mathfrak{q}_1 \ldots \mathfrak{q}_{s_2}\Pi_1 \ldots \Pi_{s_3},$$

где $\mathfrak{p}_i$ — идеалы первого порядка, входящие в $\mathfrak{a}$ вместе со своими сопряженными; $\mathfrak{q}_i$ — идеалы первого порядка, входящие в $\mathfrak{a}$ без своих сопряженных; Π_i — идеалы второго порядка, входящие в $\mathfrak{a}$. Тогда

$$\mathfrak{a}' = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_1' \ldots \mathfrak{p}_{s_1}\mathfrak{p}_{s_1}'\mathfrak{q}_1' \ldots \mathfrak{q}_{s_2}'\Pi_1 \ldots \Pi_{s_3}.$$

Далее, с одной стороны,

$$N(\alpha) = \alpha\alpha' = 16 + my^4 = px^2;$$

с другой стороны,

$$N(\alpha) = N(\mathfrak{a})\,[N(\mathfrak{b})]^2 = p_1^2 \ldots p_{s_1}^2 q_1 \ldots q_{s_2} P_1^2 \ldots P_{s_3}^2 b^2 = q_1 \ldots q_{s_2} C^2.$$

Следовательно, идеалы $\mathfrak{q}$ — делители числа p, идеалы же $\mathfrak{p}$ и Π — общие делители чисел α и α'.

Но всякий общий делитель α и α' делит $\alpha + \alpha' = 8$. Следовательно, $\mathfrak{p}$ и Π — простые делители числа 2 в поле $R(\sqrt{-m})$. И так как вместе с $\mathfrak{p}$ в $\mathfrak{a}$ входит и $\mathfrak{p}'$, то на месте всех $\mathfrak{p}$ и Π может стоять только число 2.

Итак, $\mathfrak{a}$ может принимать лишь конечное число значений. Чтобы получить все эти значения, достаточно выбрать из p все простые числа, которые в поле $R(\sqrt{-m})$ разлагаются на произведение двух идеалов первого порядка, разложить их на множители, а затем полученные идеалы скомбинировать всеми возможными способами. Таким образом мы получим половину всех возможных значений $\mathfrak{a}$. Другая половина получится от умножения каждого из этих идеалов $\mathfrak{a}$ на 2. Поле K можно считать полученным от присоединения к полю рациональных чисел числа $\sqrt{\alpha\sqrt{-m}}$.

Если взять в качестве α два числа, отличающиеся на квадрат числа из $R(\sqrt{-m})$, то мы получим одно и то же поле K.

Из этих соображений ясно, что в качестве идеалов $\mathfrak{b}$ достаточно взять по одному идеалу из каждого класса, так как эквивалентные идеалы $\mathfrak{b}$ определяют одно и то же поле K.

В самом деле, если $\mathfrak{b}_1 \sim \mathfrak{b}$, то $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b}c$, где c — число из поля $R(\sqrt{-m})$; $\alpha_1 = \mathfrak{a}\mathfrak{b}_1^2 = \mathfrak{a}\mathfrak{b}^2c^2$; $\alpha_1 = \alpha c^2$. Однако $\mathfrak{b}$ надо выбирать не из всех классов, а из тех, для которых имеет место

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2 \sim 1, \quad \text{ибо} \quad \alpha = \mathfrak{a}\mathfrak{b}^2 \sim 1.$$

Главный идеал определяет число с точностью до единицы: В поле $R(\sqrt{-m})$ имеются, вообще говоря, только две единицы: ± 1; таким образом идеал α определяет два поля:

$$R\left(\sqrt{\alpha\sqrt{-m}}\right) \quad \text{и} \quad R\left(\sqrt{-\alpha\sqrt{-m}}\right).$$

Однако эти поля будут сопряженными, и если к одному принадлежат μ и μ', то к другому принадлежат μ'' и μ'''. Поэтому достаточно рассмотреть только одно из этих полей.

Если же в $R(\sqrt{-m})$ имеются особенные единицы, то надо рассмотреть все поля, порождаемые главным идеалом (α).

2. О группе поля K

Числа μ, μ', μ'' и μ''' удовлетворяют уравнению

$$z^4 + my^2z^2 + 2myz + m = 0 \tag{1}$$

с дискриминантом $D = 16m^3px^2 > 0$.

Если $m \neq k^2$ и $p \neq 1$, то данное уравнение неприводимо. Действительно, если уравнение (1) приводимо, то μ, а также и $\sqrt{-my^2 + 4\sqrt{-m}}$ — квадратичные иррациональности. Следовательно, $-my^2 + 4\sqrt{-m}$ есть квадрат числа из $R(\sqrt{-m})$. Но если число есть полный квадрат, то и его норма — полный квадрат:

$$N\left(-my^2 + 4\sqrt{-m}\right) = mpx^2;$$

mp будет полным квадратом только в случае, если $a = 1$, $b = k^2$; так как $mp = \frac{16a}{\sigma}$, $\frac{16b}{\sigma} = \frac{16^2}{\sigma^2}ab$; $ab = k^2$.

Так как a и b взаимно просты, и a свободно от квадратов, то $a = 1$, $b = k^2$.

Но уравнения $x^2 - k^2y^4 = \sigma$ легко решаются элементарными приемами. Действительно, запишем уравнение в виде

$$(x - ky^2)(x + ky^2) = \sigma; \tag{2}$$

тогда

$$x - ky^2 = \sigma_1; \qquad x + ky^2 = \sigma_2,$$

где $\sigma_1 = 1, 2, 4, 8, 16$; $\sigma_2 = \frac{\sigma}{\sigma_1}$. А из полученной системы имеем

$$x = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}; \qquad ky^2 = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}.$$

Перебрав все значения для σ_1, получим все решения уравнений такого типа.

Исключив этот случай из рассмотрения, будем полагать в дальнейшем, что дискриминант D не есть полный квадрат.

Поле $R(\mu)$ имеет подполе $R(\sqrt{-m})$. Следовательно, группа Галуа уравнения (1) будет группой восьмого порядка

$$H = 1 + (12)(34) + (13)(24) + (14)(23) + (1324) + (1423) + (12) + (34)$$

или ее делителем. H имеет два транзитивных делителя: четверную группу

$$H_1 = 1 + (12)(34) + (13)(24) + (14)(23)$$

и циклическую группу

$$H_2 = 1 + (1324) + (12)(34) + (1423).$$

Докажем, что группой уравнения (1) не может быть ни H_1 ни H_2. Действительно, если группой Галуа уравнения (1) будет H_1, то дискриминант будет полным квадратом, т. е. случай, который мы исключаем.

Чтобы доказать, что группой Галуа не может быть H_2, рассмотрим нормальное поле

$$R(\mu, \mu', \mu'', \mu''').$$

Это поле имеет три подполя $R(\sqrt{-m})$, $R(\sqrt{mp})$ и $R(\sqrt{-p})$, так как

$$\sqrt{-my^2+4\sqrt{-m}}\sqrt{-my^2-4\sqrt{-m}} = \sqrt{m^2y^4+16m} = \sqrt{mp}.$$

Но этого не могло бы быть, если бы группа Галуа была H_2, так как H_2 имеет только одну подгруппу $1+(12)(34)$.

Отметим еще, что K — чисто мнимое поле, так как оно содержит мнимое квадратичное подполе.

3. Об единицах поля K

По теореме Дирихле всякая единица поля K есть степень основной единицы или произведение степени основной единицы на степень особенной единицы (корня из единицы), если последняя принадлежит полю K. В полях 4-й степени мыслимы следующие особенные единицы: $e^{\frac{2\pi i}{4}}$, $e^{\frac{2\pi i}{6}}$, $e^{\frac{2\pi i}{5}}$, $e^{\frac{2\pi i}{8}}$, $e^{\frac{2\pi i}{12}}$. Из них первые две принадлежат к квадратичному подполю поля K, т. е. к $R(\sqrt{-m})$. Три последних не могут принадлежать ни к одному из наших полей K, так как $R\left(e^{\frac{2\pi i}{5}}\right)$ — область 4-й степени с циклической группой Галуа, а $R\left(e^{\frac{2\pi i}{8}}\right)$ и $R\left(e^{\frac{2\pi i}{12}}\right)$ — области 4-й степени с четверной группой Галуа.

В дальнейшем нам понадобятся единицы поля K, обладающие свойством: $\varepsilon\varepsilon' = +1$, где штрих означает подстановку, не меняющую чисел подполя. Докажем, что если такие единицы существуют, то все они представляют степень одной «основной» единицы ε_0, обладающей при этом свойством $\varepsilon_0\varepsilon_0' = +1$, независимо от наличия в поле особенных единиц. При доказательстве разберем отдельно три случая: 1) поле K не содержит особенных единиц, 2) $e^{\frac{2\pi i}{3}} \subset K$; 3) $e^{\frac{2\pi i}{4}} \subset K$.

1. В случае отсутствия особенных единиц это вполне очевидно, так как $\varepsilon = \pm\varepsilon_0^a$; $\varepsilon' = \pm\varepsilon_0'^a$. Если $\varepsilon\varepsilon' = +1$, то $(\varepsilon_0\varepsilon_0')^a = +1$, $\varepsilon_0\varepsilon_0' = \pm 1$. Если окажется, что $\varepsilon_0\varepsilon_0' = -1$, то за «основную» единицу берем ε_0^2.

2. Теперь положим, что $e^{\frac{2\pi i}{3}}=\omega\subset K$. Тогда $\varepsilon=\pm\varepsilon_0^a\omega^b$; $\varepsilon'=\pm\varepsilon_0'^a\omega^b$. И если $\varepsilon\varepsilon'=+1$, то $\varepsilon_0^a\varepsilon_0'^a\omega^{2b}=+1$; $(\varepsilon_0\varepsilon_0')^a=\omega^{-2b}$; $\varepsilon_0\varepsilon_0'=+\omega^c$, где $c=0, 1, 2$. Если $\varepsilon_0\varepsilon_0'=+1$, то $\omega^{2b}=+1$; $b=0$, что и требовалось доказать.

Если же $\varepsilon_0\varepsilon_0'=\omega$, то за основную единицу можно взять $\varepsilon_1=\varepsilon_0\omega$ (так как основная единица может быть выбрана с точностью до особенной). Тогда $\varepsilon_1\varepsilon_1'=\varepsilon_0\varepsilon_0'\omega^2=+1$ и

$$\varepsilon=\varepsilon_0^a\omega^b=\varepsilon_1^a\omega^{b-a}; \qquad \varepsilon\varepsilon'=\varepsilon_1^a\varepsilon_1'^a\omega^{2b-2a}=+1,$$

откуда

$$\omega^{2b-2a}=+1;\ b\equiv a \pmod 3;\ \varepsilon=\varepsilon_1^a,$$

что и требовалось доказать.

Аналогично этому для случая $\varepsilon_0\varepsilon_0'=\omega^2$ берем за основную единицу $\varepsilon_2=\varepsilon_0\omega^2$. Если же $\varepsilon_0\varepsilon_0'=-1$, $-\omega$ или $-\omega^2$, то единицы ε будут степенями квадрата основной единицы.

3. Так же и в случае $e^{\frac{2\pi i}{4}}=i\subset K$. Действительно, тогда $\varepsilon=\varepsilon_0^a i^b$; $\varepsilon'=\varepsilon_0'^a i^b$; $\varepsilon\varepsilon'=(\varepsilon_0\varepsilon_0')^a$. Если $\varepsilon_0\varepsilon_0'=+1$, то $i^{2b}=+1$; b — четное и потому $\varepsilon=\pm\varepsilon_0^a$. Если же $\varepsilon_0\varepsilon_0'=-1$, то за основную единицу возьмем $\varepsilon_1=\varepsilon_0 i$, тогда $\varepsilon_1\varepsilon_1'=+1$; $\varepsilon=\pm\varepsilon_1^a$.

Также и в случае $\varepsilon_0\varepsilon_0'=i$ имеем $\varepsilon\varepsilon'=(\varepsilon_0\varepsilon_0')^a i^{2b}=i^{2b+a}=+1$, т. е. $a=2a_1$; $b\equiv a_1 \pmod 2$. Берем за «основную» единицу $\varepsilon_1=\varepsilon_0^2 i$, тогда $\varepsilon_1\varepsilon_1'=+1$; $\varepsilon=\varepsilon_1^a i^{b-a_1}=\pm\varepsilon_1^a$.

Также и в случае $\varepsilon_0\varepsilon_0'=-i$ берем за «основную» единицу $\varepsilon_1=\varepsilon_0^2 i^3$.

Итак, всякая единица ε, обладающая свойством $\varepsilon\varepsilon'=+1$, есть $\pm\varepsilon_0^a$, где ε_0 — соответствующим образом выбранная основная единица или ее квадрат, — может быть умноженной на некоторую степень особенной единицы.

Кроме того, мы в дальнейшем будем считать, что всякая единица $\varepsilon=+\varepsilon_0^a$, где $a>0$. Чтобы так считать, необходимо положить, что поле K имеет 4 основных единицы. Эти единицы будут: $\varepsilon_0, -\varepsilon_0, \varepsilon_0^{-1}, -\varepsilon_0^{-1}$. Тогда каждая единица есть положительная степень одной из указанных выше четырех.

4. О числах μ

Как было показано в § 1, разыскание решений нашего неопределенного уравнения сводится к разысканию некоторых чисел μ в определенном поле K. В данном параграфе установим связь этих чисел с единицами поля K.

Легко проверить следующие свойства чисел μ:

1° $\mu+\mu'+\mu''+\mu'''=0$, т. е. Spur $\mu=0$;

2° $\mu\mu'+\mu''\mu'''=0$;

3° $\mu+\mu'=y\sqrt{-m}$; $\mu''+\mu'''=-y\sqrt{-m}$;

$$\mu\mu'=-\sqrt{-m};\ \mu''\mu'''=\sqrt{-m};$$

4° числа μ и μ' удовлетворяют уравнению

$$\mu^2 - y\sqrt{-m}\,\mu - \sqrt{-m} = 0. \qquad (3)$$

В дальнейшем будем искать числа, удовлетворяющие уравнению (3). Найдя такое число, мы определим y как коэффициент при $\mu\sqrt{-m}$. Зная же y, легко найти x. Из уравнения (3) следует, что $\varepsilon = \frac{\mu^2}{\sqrt{-m}} = y\mu + 1$ есть целое число. Кроме того,

$$\varepsilon\varepsilon' = \frac{(\mu\mu')^2}{-m} = \frac{-m}{-m} = +1.$$

Значит, ε — единица поля K, причем единица рассмотренного в предыдущем параграфе типа.

Рассмотрим далее отдельно два случая: $K = R(\sqrt[4]{-m})$ и $K \neq R(\sqrt[4]{-m})$.

5. Случай $K = R(\sqrt[4]{-m})$

Этот случай может иметь место только, если $p = 1,\ 4,\ 16$. Действительно, если $K = R(\sqrt[4]{-m})$, то дискриминант уравнения (1) может отличаться только на полный квадрат от дискриминанта уравнения $x^4 + m = 0$, т. е. от $4^4 m^3$. Отсюда ясно, что p — полный квадрат, т. е. $p = 1,\ 4,\ 16$.

Следовательно, данный случай может иметь место только для уравнений $x^2 - my^4 = \sigma_1^2$, где $\sigma_1 = 1,\ 2,\ 4$. Но эти уравнения можно свести к уравнениям, решение которых известно. Имеем

$$x^2 - \sigma_1^2 = my^4,$$

или

$$(x + \sigma_1)(x - \sigma_1) = my^4.$$

Общий наибольший делитель $x - \sigma_1$ и $x + \sigma_1$ делит $2\sigma_1$, т. е. может быть только $1,\ 2,\ \ldots,\ 2\sigma_1$. И мы можем написать

$$x + \sigma_1 = \lambda_1 u^4; \qquad x - \sigma_1 = \lambda_2 v^4$$

или

$$\lambda_1 u^4 - \lambda_2 v^4 = 2\sigma_1.$$

Но

$$\lambda_1 \lambda_2 = m,\ 2^4 m,\ \ldots,\ (2\sigma_1)^4 m.$$

Отсюда легко найти все возможные значения λ_1 и λ_2 — это будут различные делители чисел $m,\ 2^4 m,\ \ldots,\ (2\sigma_1)^4 m$.

Уравнения $\lambda_1 u^4 - \lambda_2 v^4 = 2\sigma_1$ уже решены Д. К. Фаддеевым *. Кроме того, если $\lambda_1 \neq 1, 2$, то их можно решить, полагая $u^2 = t$ и применяя метод, изложенный дальше. Если же $\lambda_1 = 1$ или 2, то прием можно повторить.

Поскольку случая $K = R(\sqrt[4]{-m})$ можно избежать, в дальнейшем будем полагать, что $K \neq R(\sqrt[4]{-m})$.

---

* См. Д. К. Фаддеев, Об уравнении $ax^4 - by^4 = \pm\sigma$, где $\sigma = 1,\ 2,\ 4,\ 8$, Ученые зап. Института им. Герцена, т. XXVIII, 1939.

6. Случай $K \neq R(\sqrt[4]{-m})$

В этом случае $\varepsilon \neq \varepsilon_0^{2n}$ (см. § 4), так как иначе мы имели бы, что $\sqrt{-m} = \mu^2\varepsilon_0^{-2n}$; $\sqrt[4]{-m} = \mu\varepsilon_0^{-n}$, т. е. $\sqrt[4]{-m} \subset K$. Итак, $\varepsilon = \varepsilon_0^{2n+1}$.

Введем в рассмотрение новое число $\mu_0 = \mu\varepsilon_0^{-n}$. Тогда $\mu_0^2 = \mu^2\varepsilon_0^{-2n} = \varepsilon_0\sqrt{-m}$; $\mu_0^{2n} = \varepsilon_0^n(\sqrt{-m})^n$; $\mu_0^{2n+1} = \mu(\sqrt{-m})^n$, т. е.

$$\mu = \frac{\mu_0^{2n+1}}{(\sqrt{-m})^n}. \tag{4}$$

Итак, все μ получаются по формуле (4), где μ_0 — вполне определенное для данного поля число, равное $\sqrt{\varepsilon_0\sqrt{-m}}$, которое в случае существования μ должно принадлежать полю K.

Предположим теперь, что существует число μ, удовлетворяющее уравнению (3). Будем искать, какому уравнению удовлетворяет в этом случае μ_0.

С одной стороны, $\mu\mu' = -\sqrt{-m}$; с другой стороны,

$$\mu\mu' = \frac{(\mu_0\mu_0')^{2n+1}}{(\sqrt{-m})^{2n}}; \text{ т. е. } (\mu_0\mu_0')^{2n+1} = (-\sqrt{-m})^{2n+1}.$$

Кроме того,

$$(\mu_0\mu_0')^{2n} = (\varepsilon_0\varepsilon_0')^n(-\sqrt{-m})^{2n} = (-\sqrt{-m})^{2n}.$$

Сопоставляя оба результата, получим

$$\mu_0\mu_0' = -\sqrt{-m}.$$

Переходя ко вторым сопряженным, получим $\mu_0''\mu_0''' = \sqrt{-m}$. Величина $\alpha = \mu_0 + \mu_0'$ не меняется от подстановки, обозначенной штрихом, т. е.

$$\alpha \subset R(\sqrt{-m}).$$

Пусть далее $m = 2^\rho m_1^3 m_2^2 m_3$, где m_1, m_2 и m_3 — числа попарно взаимно простые и свободные от квадратов; $\rho = 0$ или 4, причем в последнем случае m_1, m_2 и m_3 — нечетные. Тогда можно считать, что $\alpha = \frac{a + b_1\sqrt{-m_1m_3}}{2}$.

Докажем, что b_1 делится на $2^{\frac{\rho}{2}} m_1 m_2$, т. е. что

$$\alpha = \frac{a + b\sqrt{-m}}{2}.$$

Заметим, что $\alpha^2 = (\mu_0 + \mu_0')^2 = \mu_0^2 + \mu_0'^2 + 2\mu_0\mu_0' = \varepsilon_0\sqrt{-m} + \varepsilon_0'\sqrt{-m} - 2\sqrt{-m} = \sqrt{-m}(\varepsilon_0 + \varepsilon_0' - 2)$, т. е. α^2 делится на $\sqrt{-m}$. Другими словами,

$$\frac{a^2 - m_1m_3b_1^2 + 2ab_1\sqrt{-m_1m_3}}{4} \text{ делится на } 2^{\frac{\rho}{2}} m_1m_2\sqrt{-m_1m_3}. \tag{4'}$$

Если $\rho=4$, то ab_1 делится на 4, но так как a и b_1 одинаковой четности, то $a=2a_2$, $b_1=2b_2$. Имеем:

$$(a_2^2-m_1m_3b_2^2)+2a_2b_2\sqrt{-m_2m_3} \text{ делится на } 4,$$

откуда или a_2 или b_2 делится на 2. Однако они должны быть одинаковой четности, ибо $a_2^2-m_1m_3b_2^2$ — четное число. Следовательно, b_2 — четное, b_1 делится на 4.

Докажем затем, что b_1 делится на m_2 (при любом ρ). Из условия (4′) имеем

$$m_2/ab_1 \quad \text{и} \quad m_2\Big/\frac{a^2-m_1m_3b_1^2}{2}.$$

Пусть p_2 — простое число, входящее в m_2. Тогда или a или b_1 делится на p_2.

Пусть p_2/a; тогда, если $p_2=2$, то и $2/b_1$ (a и b_1 одинаковой четности). Если же $p_2\neq 2$, то $p_2/m_1m_3b_1^2$, т. е. p_2/b_1. И так как m_2 свободно от квадратов, то b_1 делится на m_2.

Аналогично доказывается, что b_1 делится на m_1. Следовательно, b_1 делится на $2^{\frac{\rho}{2}}m_1m_2$, и мы можем написать $\alpha=\frac{a+b\sqrt{-m}}{2}$, где a и b — целые числа.

Итак, в случае, если существует μ, то μ_0 и μ_0' должны удовлетворять уравнению

$$\mu_0^2-\frac{a+b\sqrt{-m}}{2}\mu_0-\sqrt{-m}=0. \tag{5}$$

В дальнейшем нам понадобятся числа $\frac{\mu'}{\mu}$, $\frac{\mu''}{\mu}$ и $\frac{\mu'''}{\mu}$. Докажем, что эти числа — целые алгебраические.

$$\frac{\mu}{\mu'}+\frac{\mu'}{\mu}=\frac{\mu^2+\mu'^2}{\mu\mu'}=\frac{(\mu+\mu')^2}{\mu\mu'}-2=-y^2\sqrt{-m}-2 \text{ — целое число.}$$

Следовательно, $\frac{\mu'}{\mu}$ — целое число, значит, единица поля K, так как $N\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)=1$ и $\mu'\subset K$. Далее, $\frac{\mu''}{\mu}+\frac{\mu'''}{\mu}=\frac{\mu''+\mu'''}{\mu}=\frac{-(\mu+\mu')}{\mu}=-1-\frac{\mu'}{\mu}$ — целое число и $\frac{\mu''\mu'''}{\mu^2}=\frac{\sqrt{-m}}{\mu^2}=\varepsilon^{-1}$ — целое число.

А если сумма и произведение двух алгебраических чисел — целые алгебраические числа, то и исходные числа — целые алгебраические. Но

$$\frac{\mu'}{\mu}=\left(\frac{\mu_0'}{\mu_0}\right)^{2n+1}; \quad -\frac{\mu''}{\mu}=\left(\frac{\mu_0''}{\mu_0}\right)^{2n+1}; \quad -\frac{\mu'''}{\mu}=\left(\frac{\mu_0'''}{\mu_0}\right)^{2n+1}.$$

Отсюда ясно, что $\frac{\mu_0'}{\mu_0}$, $\frac{\mu_0''}{\mu_0}$ и $\frac{\mu_0'''}{\mu_0}$ — целые алгебраические числа, причем $\frac{\mu_0'}{\mu_0}$ — единица поля K.

7. Основная теорема

ТЕОРЕМА. *Если в поле K существует число* μ, *удовлетворяющее уравнению* $\mu^2 - y\sqrt{-m}\,\mu - \sqrt{-m} = 0$, *и если* $\mu = \frac{\mu_0^{2n+1}}{(\sqrt{-m})^2}$, *то в уравнении для* μ_0

$$\mu_0^2 - \frac{a+b\sqrt{-m}}{2}\mu_0 - \sqrt{-m} = 0$$

$ab = 0, \ -2, \ -3, \ -5, \ -6, \ -8.$

Доказательство. Предположим сначала, что n — четное число. Рассмотрим число

$$\lambda = (\mu_0^{2n+1} + \mu_0''^{2n+1})(\mu_0^{2n+1} + \mu_0'''^{2n+1}).$$

Имеем

$$\begin{aligned}\lambda &= \mu_0^{2n+1}\mu_0^{2n+1} + \mu_0^{2n+1}\mu_0''^{2n+1} + \mu_0^{2n+1}\mu_0'''^{2n+1} + \mu_0''^{2n+1}\mu_0'''^{2n+1} = \\ &= \mu_0^{2n+1}(\mu_0^{2n+1} + \mu_0''^{2n+1} + \mu_0'''^{2n+1} - \mu_0'^{2n+1}) = \\ &= \mu_0^{2n+1}(\mathrm{Spur}\ \mu_0^{2n+1} - 2\mu_0'^{2n+1}) = -2\mu_0^{2n+1}\mu_0'^{2n+2},\end{aligned}$$

так как $\mathrm{Spur}\ \mu_0^{2n+1} = \mathrm{Spur}\ \mu(\sqrt{-m})^n = \mu(\sqrt{-m})^n + \mu'(\sqrt{-m})^n + \mu''(-\sqrt{-m})^n + \mu_0'''(-\sqrt{-m})^n = (\sqrt{-m})^n\ \mathrm{Spur}\ \mu = 0$, ибо n — четное и $\mathrm{Spur}\ \mu = 0$. С другой стороны,

$$\lambda = \mu_0^{4n}(\mu_0 + \mu_0'')(\mu_0 + \mu_0''')\left(1 - \frac{\mu_0''}{u_0} + \frac{\mu_0''^2}{\mu_0^2} - \ldots\right)\left(1 - \frac{\mu_0'''}{\mu_0} + \frac{\mu_0'''^2}{\mu_0^2} - \ldots\right).$$

Так как $\frac{\mu_0''}{\mu_0}$ и $\frac{\mu_0'''}{\mu_0}$ — целые алгебраические числа, то λ делится на

$$\begin{aligned}&\mu_0^{4n}(\mu_0 + \mu_0'')(\mu_0 + \mu_0''') = \mu_0^{4n}(\mu_0^2 + \mu_0\mu_0'' + \mu_0''\mu_0''' + \mu_0\mu_0''') = \\ &= \mu_0^{4n}(\mu_0^2 + \mu_0\mu_0'' + \mu_0\mu_0''' - \mu_0\mu_0') = \mu_0^{4n+1}(\mu_0 + \mu_0' + \mu_0'' + \mu_0''' - 2\mu_0') = \\ &= \mu_0^{4n+1}(a - 2\mu_0'),\end{aligned}$$

ибо

$$\begin{aligned}\mathrm{Spur}\ \mu_0 &= (\mu_0 + \mu_0') + (\mu_0'' + \mu_0''') = (\mu_0 + \mu_0') + (\mu_0 + \mu_0')'' = \\ &= \frac{a+b\sqrt{-m}}{2} + \frac{a-b\sqrt{-m}}{2} = a\end{aligned}$$

(подстановка «два штриха» переводит числа поля $R(\sqrt{-m})$ в сопряженные).

Но так как μ_0' ассоциировано с μ_0, то отсюда следует, что $2\mu_0^{4n+2}$ делится на $\mu_0^{4n+1}(a - 2\mu_0')$, т. е. $2\mu_0$ делится на $a - 2\mu_0'$. Переходя к сопряженным, получим, что $2\mu_0'$ делится на $a - 2\mu_0$, или $4\mu_0\mu_0' = 4\sqrt{-m}$ делится на $(a - 2\mu_0')(a - 2\mu_0) = -ab\sqrt{-m} - 4\sqrt{-m}$. Откуда 4 делится на $ab + 4$;

$$ab + 4 = 4, \ 2, \ 1, \ -1, \ -2, \ -4,$$

т. е. $ab = 0, \ -2, \ -3, \ -5, \ -6, \ -8$, что и требовалось доказать.

Аналогичным образом мы придем к тому же результату в случае n нечетного, рассмотрев число

$$\lambda = (\mu_0^{2n+1} - \mu_0''^{2n+1})(\mu_0^{2n+1} - \mu_0'''^{2n+1}).$$

8. Случай $ab \neq 0$

Рассмотрим сначала случаи, когда $ab \neq 0$. Отметим, что если a нечетное, то b тоже должно быть нечетным, так как иначе $\frac{a+b\sqrt{-m}}{2}$ не будет целым. Если же a четное и b нечетное, то m по той же причине должно делиться на 4.

Кроме того, легко видеть, что μ_0, μ_0', μ_0'' и μ_0''' удовлетворяют уравнению

$$z^4 - az^3 + \frac{a^2+mb^2}{4} z^2 + mbz + m = 0.$$

Дискриминант этого уравнения будет

$$D = \left[\left(\frac{a^2+mb^2}{4} \right)^2 + 4m(ab+4) \right] m^2 (ab+4)^2 = D' (mab+4m)^2.$$

Подсчитаем его для случаев, когда a и b четные:

1) $a = \pm 2$, $b = \mp 4$; тогда
$D' = (1+4m)^2 + 4m(-8+4) = (1+4m)^2 - 16m = (1-4m)^2$;

2) $a = \pm 4$, $b = \mp 2$; тогда $D' = (4+m)^2 - 16m = (4-m)^2$,

т. е. в этих случаях дискриминант поля K — полный квадрат. А такая возможность уже исключена в § 2.

Теперь рассмотрим случаи, когда a — четное, b — нечетное.

1) $a = \pm 2$, $b = \mp 1$, $m = 4m_1$; $\alpha = \pm(1 - \sqrt{-m_1})$; $\alpha^2 = 1 - m_1 - 2\sqrt{-m_1}$; α^2 делится на $2\sqrt{-m_1}$, $2/1-m_1$; m_1 — нечетное; $1-m_1$ делится на $\sqrt{-m_1}$, $m_1 = 1$; $D' = 36$ — полный квадрат.

2) $a = \pm 8$; $b = \mp 1$; $m = 4m$; $D' = (4-m_1)^2$ — полный квадрат.

3) $a = \pm 2$; $b = \mp 3$, $\alpha = \pm(1 - 3\sqrt{-m_1})$; $\alpha^2 = 1 - 3m_1 - 6\sqrt{-m_1}$; $2/1-3m_1$; m_1 — нечетное; $1-3m_1$ делится на $\sqrt{-m_1}$; $m_1 = 1$; $D' = 68 = 4 \cdot 17$; $mp = 17k^2$; $p = 17 \cdot 4$. Это приводит к уравнению

$$17x^2 - y^4 = 4.$$

4) $a = \pm 6$; $b = \mp 1$. Этот случай приводит к тому же уравнению.

Если a и b нечетные, то $\frac{a+b\sqrt{-m}}{2}$ будет целым только в случаях $m = 3$ и $m = 27$. В этих случаях $D' = 21$ (для $m = 3$) и $D' = 9 \cdot 21$ (для $m = 27$), что приводит к уравнениям:

$$7x^2 - 3y^4 = 16; \quad 28x^2 - 3y^4 = 16; \quad 112x^2 - 3y^4 = 16;$$
$$7x^2 - 27y^4 = 16; \quad 28x^2 - 27y^4 = 16; \quad 112x^2 - 27y^4 = 16.$$

Из них первые три не имеют решений, в чем можно убедиться, рассматривая их как сравнения по модулю 16. Три последних можно привести к уравнению

$$7x^2 - 27y^4 = 1.$$

Отложим рассмотрение этих уравнений и перейдем к последнему случаю $ab = 0$, разбив его на два: $a = 0$ и $b = 0$.

9. Случай $a=0$

В этом случае уравнение для μ_0 принимает вид

$$\mu_0^2-b\sqrt{-m}\,\mu_0-\sqrt{-m}=0,$$

т. е. само μ_0 удовлетворяет уравнению искомого типа.

Докажем, что в данном поле, вообще говоря, чисел μ больше нет.

ТЕОРЕМА. *Если μ_0 удовлетворяет уравнению*

$$\mu_0^2-b\sqrt{-m}\,\mu_0-\sqrt{-m}=0, \tag{6}$$

то $\mu=\frac{\mu_0^{2n+1}}{(\sqrt{-m})^n}$ *в случае $n>0$ не может удовлетворять уравнению*

$$\mu^2-y\sqrt{-m}\,\mu-\sqrt{-m}=0, \tag{7}$$

за исключением случая $m=14$, $b=1$, которому соответствует уравнение $15x^2-7y^4=8$.

Доказательство. Прежде всего напомним формулу Варинга для разложения сумм степеней корней уравнения. Нам она будет нужна только для квадратного уравнения.

Если z_1 и z_2 — корни уравнения $z^2-cz-d=0$, то

$$z_1^{2n+1}+z_2^{2n+1}=\sum_{q=0}^{n}\alpha_q d^{n-q}c^{2q+1}, \tag{8}$$

где

$$\alpha_q=\frac{(n+q)!\,(2n+1)}{(2q+1)!\,(n-q)!}$$

Применяя эту формулу к уравнению (6), имеем

$$\mu_0^{2n+1}+\mu_0'^{2n+1}=\sum_{q=0}^{n}\alpha_q b^{2q+1}(\sqrt{-m})^{n+q+1}.$$

Но если $\mu=\frac{\mu_0^{2n+1}}{(\sqrt{-m})^n}$ удовлетворяет уравнению (7), то должно быть

$$(\mu+\mu')(\sqrt{-m})^n=\mu_0^{2n+1}+\mu_0'^{2n+1}=y(\sqrt{-m})^{n+1},$$

т. е. при n четном вещественная часть $\mu_0^{2n+1}+\mu_0'^{2n+1}$ должна равняться нулю, а при n нечетном — мнимая. При $n=2k$ это дает

$$\alpha_1 b^3(-m)^{k+1}+\alpha_3 b^7(-m)^{k+2}+\ldots+\alpha_{2k-1}b^{4k-1}(-m)^{2k}=0,$$

или сокращая на $b^3(-m)^{k+1}\neq 0$,

$$\alpha_1+\alpha_3 b^4(-m)+\ldots+\alpha_{2k-1}b^{4k-4}(-m)^{k-1}=0,$$

или

$$\alpha_1+\alpha_3(-mb^4)+\alpha_5(-mb^4)^2+\ldots+\alpha_{2k-1}(-mb^4)^{k-1}=0.$$

Аналогично при $n=2k+1$ имеем

$$\alpha_1 b^3(-m)^{k+1}+\alpha_3 b^7(-m)^{k+2}+\ldots+\alpha_{2k+1}b^{4k+3}(-m)^{2k+1}=0,$$

или

$$\alpha_1 + \alpha_3(-mb^4) + \alpha_5(-mb^4)^2 + \ldots + \alpha_{2k+1}(-mb^4)^{2k+1} = 0,$$

т. е. такое же равенство, только продолженное до α_n-го члена, а не до α_{n-1}-го. Однако при доказательстве его невозможности это не будет играть роли.

Итак, должно быть

$$\frac{(2n+1)(n+1)n}{3!} + \\ + \frac{(2n+1)(n+3)(n+2)(n+1)\ n(n-1)(n-2)}{7!}(-mb^4) + \ldots = 0. \quad (9)$$

Данное равенство очевидно невозможно, если mb^4 делится на простое число $p > 7$, так как тогда первый член делится на меньшую степень p, чем все остальные. То же самое будет, если mb^4 делится на 2^2, 3^2, 5^2 или 7^2.

Случаи же, когда mb^4 делится только на 2, 3, 5, 7 и в первых степенях, разберем подробнее.

Очевидно, что если mb^4 делится на $p = 2, 3, 5, 7$, то все члены, начиная со второго, делятся на p, т. е. и первый член должен делиться на p. Но он равен $\frac{(2n+1)(n+1)n}{3!}$, а числа $(2n+1)$, $(n+1)$ и n попарно взаимно просты. Следовательно, на p делится только одно из этих чисел. Пусть одно из этих чисел точно делится на p^π; докажем, что тогда, вообще говоря, все остальные члены делятся на высшую степень p.

Представим общий член суммы в виде

$$\alpha_{2q+1}(-mb^4)^q = \frac{(2n+1)(n+2q+1)(n+2q)\ldots(n-2q)}{(4q+3)!}(-mb^4)^q;$$

p входит в знаменатель в степени

$$\left[\frac{4q+3}{p}\right] + \left[\frac{4q+3}{p^2}\right] + \ldots \leqslant \frac{4q+3}{p} + \frac{4q+3}{p^2} + \ldots$$

$$\ldots < 4q+3\frac{\frac{1}{p}}{1-\frac{1}{p}} = \frac{4q+3}{p-1}.$$

В числитель p входит в степени, не меньшей, чем

$$\pi - 1 + \left[\frac{n+2q+1-n+2q+1}{p}\right] \geqslant \frac{4q+2}{p} + \pi - 2,$$

так как на p^π делится один из множителей числителя и члены, делящиеся на p, встречаются через каждые p чисел. Отсюда надо отнять единицу за счет множителя n или $n+1$. Кроме того $(mb^4)^q$ делится на p^q.

Итак, q-й член суммы делится на степень p, не меньшую, чем

$$\pi + \frac{4q+2}{p} + q - 2 - \frac{4q+3}{p-1}.$$

Пусть $p = 3$, тогда q-й член делится на степень 3-х, не меньшую, чем $\pi + \frac{2q-17}{6}$, т. е., начиная с 9-го, все члены делятся на $3^{\pi+1}$. Но

легко видеть, подсчитывая точнее множители, делящиеся на 3, что 2-й, 3-й, 4-й, 5-й, 6-й, 7-й и 8-й члены тоже делятся на $3^{\pi+1}$. Итак, mb^4 не делится на 3.

Остаются следующие возможные значения mb^4:

$$mb^4 = 1,\ 2,\ 5,\ 7,\ 10,\ 14,\ 35,\ 70.$$

Если $p=5$, то q-й член делится на степень 5, не меньшую, чем $\pi+\frac{16q-47}{2}$, т. е. все члены, начиная с 4-го, делятся на $5^{\pi+1}$. Легко видеть, что и третий член тоже делится на $5^{\pi+1}$. Что же касается второго члена, то он может делиться только на 5^{π}. Чтобы в таком случае удовлетворялось равенство (9), необходимо, чтобы имело место сравнение

$$\frac{(2n+1)(n+1)n}{3!}-\frac{(2n+1)(n+3)(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{7!}5M\equiv 0 \pmod{5^{\pi+1}},$$

где $M=\frac{mb^4}{5}$ — целое число.

Пусть $n=5^{\pi}n_1$, где $(n_1, 5)=1$. Тогда, сокращая обе части и модуль на 5^{π}, получим

$$n_1+n_1M\equiv 0 \pmod 5 \quad \text{или} \quad M\equiv -1 \pmod 5).$$

То же получается и в предположении $n+1=5^{\pi}n_1$. В предположении же $2n+1=5^{\pi}n_1$ уже второй член делится на $5^{\pi+1}$.

Случаи $mb^4=5$, 10, 35 исключаются.

Аналогично рассуждаем при $p=7$. В этом случае q-й член делится на степень 7, не меньшую, чем $\pi+\frac{38q-93}{42}$, т. е., начиная с $q=3$, все члены делятся на $7^{\pi+1}$. И так же, как для $p=5$, должно иметь место сравнение

$$\frac{(2n+1)(n+1)n}{3!}-\frac{(2n+1)(n+3)(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{6!}M\equiv 0 \pmod{7^{\pi+1}},$$

которое дает $M\equiv 3 \pmod 7$, если $n\equiv 0 \pmod{7^{\pi}}$ или $n+1\equiv 0 \pmod{7^{\pi}}$ и $M\equiv 2 \pmod 7$, если $2n+1\equiv 0 \pmod{7^{\pi}}$.

Случай $mb^4=7$ исключается.

Подобным же образом поступаем при $p=2$. Здесь, если первый член точно делится на 2^{π}, то второй делится точно на 2^{π}, третий точно на $2^{\pi+1}$, четвертый точно на $2^{\pi+1}$, пятый на $2^{\pi+3}$ и т. д. Но сумма 3-го и 4-го членов делится на $2^{\pi+3}$. Получаем сравнение

$$\frac{(2n+1)(n+1)n}{3!}+\frac{(2n+1)(n+3)(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{7!}2M\equiv 0 \pmod{2^{\pi+3}},$$

которое, аналогично предыдущим случаям, дает

$$M\equiv -1 \pmod 8.$$

Случаи $mb^4=2$, 70 исключаются.

Остаются два случая*: $mb^4=14$ и $mb^4=1$. Они возможны лишь при $m=14$, $b=1$ и $m=1$, $b=1$. Первый случай дает $m=14$, $y=1$, $px^2-14=16$; $p=30$, что по сокращении на 2 приводит к уравнению

$$15x^2-7y^4=8;$$

второй случай — к уравнению

$$17x^2-y^4=16.$$

Но это уравнение попадает в число исключений из следующей теоремы.

10. Случай $b=0$

ТЕОРЕМА. *Если* μ_0 *удовлетворяет уравнению*

$$\mu_0^2-a\mu_0-\sqrt{-m}=0,$$

то $\mu=\frac{\mu_0^{2n+1}}{(\sqrt{-m})^n}$ *не может удовлетворять уравнению*

$$\mu^2-y\sqrt{-m}-\mu-\sqrt{-m}=0,$$

за исключением случая $m=1$, $a=1$, *которому соответствует уравнение* $17x^2-y^4=16$, *и случая* $m=125$, $a=5$, *которому соответствует уравнение* $21x^2-125y^4=16$.

Доказательство. Как и при доказательстве предыдущей теоремы, имеем

$$(\mu+\mu')(\sqrt{-m})^n=\mu_0^{2n+1}+\mu_0'^{2n+1}=y(\sqrt{-m})^{n+1}.$$

Это опять дает, что при n четном вещественная часть $\mu_0^{2n+1}+\mu_0'^{2n+1}$ должна равняться нулю, а при n нечетном — мнимая. По формуле Варинга имеем

$$\mu_0^{2n+1}+\mu_0'^{2n+1}=\sum_{q=0}^{n}\alpha_q(-\mu_0\mu_0')^{n-q}(\mu_0+\mu_0')^{2q+1}=\sum_{q=0}^{n}\alpha_q a^{2q+1}(\sqrt{-m})^{n-q}.$$

Если $n=2k$, то $\alpha_0 a(-m)^k+\alpha_2 a^5(-m)^{k+1}+\ldots+\alpha_{2k}a^{4k+1}=0$, или

$$\alpha_0(-m)^k+\alpha_2 a^4(-m)^{k-1}+\ldots+\alpha_{2k}a^{4k}=0.$$

Если $n=2k+1$, то также

$$\alpha_0(-m)^k+\alpha_2 a^4(-m)^{k-1}+\ldots+\alpha_{2k}a^{4k}=0. \tag{10}$$

Пусть a содержит множитель, не входящий в m. Тогда равенство (10) невозможно, ибо первый член суммы делится на меньшую степень этого множителя, чем все остальные. Значит, $m=am_1$ и равенство (10) переходит в

$$\alpha_0(-m_1)^k+\alpha_2 a^3(-m_1)^{k-1}+\ldots+\alpha_{2k}a^{3k}=0.$$

Если a содержит множитель, не входящий в m_1, то и это равенство невозможно по той же причине. Имеем

$$m_1=am_2; \qquad m=a^2m_2.$$

---

* В цитированной работе Д. К. Фаддеева без доказательства утверждается, что равенство (9) возможно лишь при $mb^4=14$. Не возражая против справедливости этого утверждения, я его полностью не доказываю, так как случай $mb^4=1$, как будет видно дальше, не дает новых исключений.

Равенство (10) принимает вид

$$\alpha_0(-m_2)^k+\alpha_2(-m)^{k-1}a^2+\ldots+\alpha_{2k}a^{2k}=0.$$

И в этом равенстве необходимо положить, что

$$m_2=am_3;\ \ m=a^3m_3;$$

тогда

$$\alpha_0(-m_3)^k+\alpha_2 a(-m_3)^{k-1}+\ldots+\alpha_{2k}a^k=0,$$

или

$$\frac{2n+1}{1}(-m_3)^k+\frac{(2n+1)(n+2)(n+1)n(n-1)}{5!}a(-m_3)^{k-1}+\ldots=0. \quad (11)$$

Пусть m_3 не делится на a. Тогда равенство (11) невозможно, если a делится на простое число $p>5$ или на $2^2, 3^2, 5^2$, так как тогда первый член суммы делится на меньшую степень p, чем остальные.

То же имеет место и в том случае, если a делится на 2 или на 3, так как $2n+1$ не делится на 2; m_3 — нечетное (оно взаимно просто с a); $(2n+1)(-m_3)^k$ — нечетное; остальные члены четные.

Если же a делится на 3, то тогда все последующие члены также делятся на большую степень 3, чем первый.

Равенство возможно только в случаях, если $a=5$ или m_3 делится на a. В последнем случае $m=a^4m_4$ и равенство (10) переходит в

$$\alpha_0(-m_4)^k+\alpha_2(-m_4)^{k-1}+\ldots+\alpha_{2k}=0,$$

где $2k=n$ или $n-1$.

Если $2k=n$, то $\alpha_n=1$ и равенство возможно лишь в случае $m_4=1$, так как иначе все члены делятся на m_4, кроме последнего.

Если же $\alpha_k=n-1$, то имеем

$$\frac{2n+1}{1}-\frac{(2n+1)(2n-3)(2n-4)}{3!}m_4+$$
$$+\frac{(2n+1)(2n-5)(2n-6)(2n-7)(2n-8)}{7!}m_4^2+\ldots=0. \quad (12)$$

Если m_4 делится на простое число $p>3$ или на 9, то равенство невозможно, так как каждый следующий член делится на высшую (по сравнению с первым членом) степень p.

При $p=2$ имеем то же самое, так как $2n+1$ не делится на 2.

Окончательно, равенство (12) может иметь место лишь при $m_4=1$ и $m_4=3$.

В случае же $a=5$, $m=125m_3$, где $(m_3, 5)=1$, мы получим равенство

$$\frac{2n+1}{1}\cdot 5^k-\frac{(2n+1)(2n-3)(2n-4)}{3!}m_3 5^{k-1}+\ldots=0,$$

которое по тем же причинам может иметь место лишь при $m_3=1,3$.

Рассмотрим эти исключения и вычислим дискриминанты уравнений для μ_0. Получим следующую таблицу:

$m_3=1$	$a=5$	$m=125$	$D'=5^3\cdot 21$
$m_3=3$	$a=5$	$m=375$	$D'=5^3\cdot 53$
$m_4=1$	$a=1$	$m=1$	$D'=17$
$m_4=1$	$a=2$	$m=16$	$D'=17\cdot 16$
$m_4=3$	$a=1$	$m=3$	$D'=49$
$m_4=3$	$a=2$	$m=48$	$D'=49\cdot 16$

Отсюда видно, что два последних случая не представляют интереса, так как D' — полный квадрат. Второй случай приводит к уравнению

$$53x^2-375y^4=16,$$

которое не имеет решений, в чем можно убедиться, рассматривая его как сравнение по mod 16. Отдельные случаи приводятся к уже упомянутым исключениям.

Осталось рассмотреть уравнения, которые представляют исключения из той или другой теоремы. Уравнения эти следующие:

$$\begin{array}{ll} 7x^2-27y^4 = 1 & (\text{из § 7}) \\ 17x^2-y^4 = 4 & (\text{из § 7}) \\ 15x^2-7y^4 = 8 & (\text{из § 8}) \\ 21x^2-125y^4=16 & (\text{из § 9}) \\ 17x^2-y^4 =16 & (\text{из § 9}) \end{array}$$

Из них последнее остается нерешенным. Решение остальных привожу в следующих параграфах, причем я буду разыскивать не все решения этих уравнений, а только те, которые соответствуют «затруднительному» полю.

11. Об уравнении $7x^2-27y^4=1$

Для данного уравнения надо разобрать случай, когда μ_0 и μ_0' удовлетворяют уравнению

$$\mu_0^2 \pm \frac{3-\sqrt{-27}}{2}\mu_0-3\sqrt{-3}=0,$$

т. е. уравнению

$$\mu_0^2 \pm 3\omega\mu_0-3\sqrt{-3}=0,$$

где

$$\omega=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}=e^{\frac{2\pi i}{3}}.$$

Применяя формулу Варинга, получим

$$\mu_0^{2n+1}+\mu_0'^{2n+1}=\sum_{q=0}^{n}\alpha_q(\sqrt{-27})^{n-q}(\pm 3\omega)^{2q+1}=y(\sqrt{-27})^{n+1},$$

или

$$\pm\sum_{q=0}^{n}\alpha_q(\sqrt{-3})^{3n+q+2}\,\omega^{2q+1}=y(\sqrt{-3})^{3n+3},$$

т. е. при n четном вещественная часть суммы должна равняться нулю, а при n нечетном — мнимая.

Заметим, что $(\sqrt{-3})^{3n+q+2}$ является числом вещественным или чисто мнимым, а ω^{2q+1} имеет вещественную часть, равную 1, когда $2q+1$ делится на 3, и равную $-\frac{1}{2}$, когда $2q+1$ не делится на 3. Аналогично и мнимая часть ω^{2q+1} равна нулю, когда $2q+1$ делится на 3, и равна $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, когда $2q+1$ не делится на 3. Поэтому вещественная часть произ-

ведения $(\sqrt{-3})^{3n+q+2}\ \omega^{2q+1}$ равна $(\sqrt{-3})^{3n+q+2}$ или $\pm\frac{1}{2}(\sqrt{-3})^{3n+q+3}$ или же нулю. Мнимая часть тоже равна $(\sqrt{-3})^{3n+q+2}$ или $\pm\frac{1}{2}(\sqrt{-3})^{3n+q+3}$ или же нулю.

Учтя это, пишем для $n=2k$

$$R[\alpha_0(-3)^{3k+1}\omega+\alpha_1(-3)^{3k+1}\sqrt{-3}+$$
$$+\alpha_2(-3)^{3k+2}\omega^2+\alpha_3(-3)^{3k+2}\omega\sqrt{3}+\ldots]=0,$$

где R означает вещественную часть. Или

$$\alpha_0\left(-\frac{1}{2}\right)(-3)^{3k+1}+\alpha_2\left(-\frac{1}{2}\right)(-3)^{3k+2}+\alpha_3\left(+\frac{1}{2}\right)(-3)^{3k+2}+$$
$$+\alpha_4(-3)^{3k+3}+\ldots=0.$$

Или, умножая на 2 и деля на $(-3)^{3k+1}$, имеем

$$\alpha_0-3\alpha_2-3^2\alpha_3-2\cdot 3^2\alpha_4-3^3\alpha_5-\ldots-2\alpha_n(-3)^k=0.$$

Так как каждый член делится на 3, то и $\alpha_0=2n+1$ делится на 3.

Пусть $\alpha_0=2n+1$ точно делится на 3^π, тогда второй член, равный $-3\alpha_2=-3\frac{(2n+1)(n+2)(n+1)n(n-1)}{5!}$, делится на $3^{\pi+1}$.

Что же касается основных членов, то так как

$$\alpha_q=\frac{(n+q)!\,(2n+1)}{(2q+1)!\,(n-q)!}=A(2n+1)\frac{1}{\max(n-q,\ 2q+1)},$$

где A — целое число, множитель 3 может потеряться только за счет последнего члена знаменателя. Однако эту потерю с избытком возместит входящая множителем степень числа 3 во всех членах, кроме, может быть, члена $-2\cdot 3^2\alpha_4$.

Действительно, последние члены знаменателя во всех слагаемых, начиная с $-3^2\alpha_3$, будут 7, 9, 11, 13 и т. д. до $2n+1$. Соответствующие степени 3-х, 2, 2, 3, 3 и т. д., т. е. если в некоторое слагаемое входит множитель 3^l, то последний член знаменателя будет $\pm 1+4l$. Но $3^l>1+4l$, если $l>2$. Если же $l=2$, то последний член будет равен 7 или 9; 7 не делится на 3; 9 делится как раз на 3, т. е. на соответствующую степень 3. Итак, все члены в этом случае делятся на $3^{\pi+1}$, кроме первого, который точно делится на 3^π, и, может быть, четвертого, который тоже может делиться только на 3^π.

Для того, чтобы вся сумма равнялась нулю, необходимо, чтобы $\alpha_0-18\alpha_4$ делилось на $3^{\pi+1}$, т. е. $2C_{n+4}^8-1$ делилось бы на 3.

Так как $2n+1$ делится на 3, то и $2n-2$ делится на 3, т. е. $n=3n_1+1$, и мы имеем

$$\frac{(3n_1+5)(3n_1+4)(n_1+1)(3n_1+2)(3n_1+1)n_1(3n_1-1)(3n_1-2)}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 78}\equiv 1 \pmod 3,$$

или

$$n_1^2+n_1-1\equiv 0 \pmod 3.$$

Последнее сравнение не имеет решений.

Итак, видно, что все слагаемые, кроме двух, делятся на $3^{\pi+1}$, в то

время как сумма двух оставшихся делится только на 3^{π}, т. е. вся сумма не равна нулю.

Аналогично при $n=2k+1$ имеем

$$\alpha_0(-3)^{3k+2}\left(-\frac{1}{2}\right)+\alpha_2(-3)^{3k+3}\left(-\frac{1}{2}\right)+\alpha_3(-3)^{3k+4}\left(\frac{1}{2}\right)+\ldots=0,$$

что по умножении на -2 и делении на $(-3)^{3k+2}$ дает то же равенство, что и для n четного, а невозможность последнего уже доказана. Отсюда следует, что данное уравнение не имеет решений, соответствующих указанному выше полю.

12. Об уравнении $17x^2-y^4=4$

Рассматривая уравнение как сравнение по mod 16, получим, что x и y четные. Заменяя x на $2x$ и y на $2y$, получим $17x^2-4y^4=1$ или

$$17x^2=4y^4+1.$$

Разложим это уравнение в поле $R(\sqrt{-1})$

$$(4+i)(4-i)x^2=(2y^2+i)(2y^2-i).$$

Так как $2y^2+i$ не делится на 2, то $2y^2+i$ и $2y^2-i$ взаимно просты, и мы можем написать

$$2y^2+i=(4\pm i)(u+vi)^2 i^k.$$

При $k=0$ это дает

$$\pm y^2=2u^2-2v^2\pm uv,$$
$$1=u^2-v^2+8uv.$$

Из второго уравнения следует, что u — нечетное, v делится на 4, но в таком случае $2u^2-2v^2\pm uv\equiv\pm 2 \pmod 4$ и не может быть равно y^2. При $k=1$ имеем:

$$2y^2=u^2-v^2+8uv;$$
$$1=2(2u^2-2v^2-uv),$$

что явно невозможно.

Аналогичные равенства получаются и в предположениях $k=2$ или 3. Уравнение вообще не имеет решений.

13. Об уравнении $15x^2-7y^4=8$

Для данного уравнения необходимо найти решения, соответствующие полю $R(\mu_0)$, где μ_0 удовлетворяет уравнению

$$\mu_0^2-\sqrt{-14}\,\mu_0-\sqrt{-14}=0.$$

Одно из таких решений дает само μ_0, а именно $y=1$, $x=1$. Другое решение дает $\mu_1=\frac{\mu_0^7}{(\sqrt{-14})^3}$, удовлетворяющее уравнению

$$\mu_1^2+91\sqrt{-14}\,\mu_1-\sqrt{-14}=0.$$

Решения, соответствующие μ_1, будут $y=91$, $x=5657$. Докажем, что, кроме этих двух, нет других решений данного уравнения, соответствующих упомянутому выше полю.

Действительно, по формуле (9) имеем

$$\frac{(2n+1)(n+1)n}{3!} - \frac{(2n+1)(n+3)(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{7!}14 + \ldots = 0.$$

Первое решение получается при $n=0$, второе при $n=3$. Объединим первые два члена:

$$\frac{(2n+1)(n+1)n\,[60-(n+3)(n+2)(n-1)(n-2)]}{5!3} +$$
$$+ \frac{(2n+1)(n+5)\ldots(n-4)}{11!}14^2 + \ldots = 0.$$

Чтобы вся сумма равнялась нулю, необходимо, чтобы первый член делился на 7, т. е.

$$(2n+1)(n+1)n\,[60-(n+3)(n+2)(n-1)(n-2)] \equiv 0 \pmod 7.$$

Следовательно, или

$$2n+1 \equiv 0 \pmod 7,$$

или же

$$60-(n+3)(n+2)(n-1)(n-2) \equiv 0 \pmod 7,$$

так как в § 8 было показано, что в данном случае

$$n(n+1) \not\equiv 0 \pmod 7$$

Оба сравнения приводят к решению $n \equiv 3 \pmod 7$. Но если $n \equiv 3 \pmod 7$, то $2n+1 = 7(2n_1+1)$ и

$$\mu = \frac{\mu_0^{7(2n_1+1)}}{(\sqrt{-14})^{7n_1+3}} = \left(\frac{\mu_0^7}{(\sqrt{-14})^3}\right)^{2n_1+1} : (\sqrt{-14})^{n_1} = \frac{\mu_1^{2n_1+1}}{(\sqrt{-14})^{n_1}}.$$

Но μ_1 удовлетворяет уравнению

$$\mu_1^2 + 91\sqrt{-14}\,\mu_1 - \sqrt{-14} = 0.$$

Поэтому к нему применима теорема § 8, и μ будет соответствовать решению только в случае $n_1 = 0$.

14. Об уравнении $21x^2 - 125y^4 = 16$

Здесь необходимо найти решения, соответствующие полю $R(\mu_0)$, где μ_0 удовлетворяет уравнению

$$\mu_0^2 - 5\mu - \sqrt{-125} = 0.$$

Одно из решений дает $\mu_1 = \frac{\mu_0^5}{(\sqrt{-125})^2}$, удовлетворяющее уравнению

$$\mu_1^2 - 5\sqrt{-125}\,\mu_1 - \sqrt{-125} = 0.$$

Соответствующее решение будет $y=5$, $x=61$. Докажем, что других решений нет. По формуле (11) имеем

$$\frac{(2n+1)}{1}(-1)^k + \frac{(2n+1)(n+2)(n+1)n(n-1)}{5!}5(-1)^{k-1} + \ldots = 0,$$

т. е.

$$2n+1 \equiv 0 \pmod 5; \quad n \equiv 2 \pmod 5; \quad n = 5n_1 + 2.$$

Имеем

$$\mu = \frac{\mu_0^{5(2n_1+1)}}{(\sqrt{-125})^{5n_1+2}} = \frac{\mu_1^{2n_1+1}}{(\sqrt{-125})^{n_1}},$$

что по теореме § 8 возможно лишь в случае $n_1 = 0$.

15. Выводы

Решение неопределенного уравнения $ax^2 - by^4 = 1, 2, 4, 8, 16$ выполняется при помощи следующих операций.

1° Нахождение всех полей K.

2° Нахождение основной единицы ε_0 каждого поля. При наличии особенных единиц в поле K выбираем ε_0 так, чтобы $\varepsilon_0\varepsilon_0' = +1$.

3° В случае, если $K \neq R(\sqrt[4]{-m})$, рассматриваем число $\mu_0 = \sqrt{\varepsilon_0\sqrt{-m}}$. Если $\mu_0 \subset K$ и удовлетворяет уравнению $\mu_0^2 - y\sqrt{-m}\,\mu_0 - \sqrt{-m} = 0$, то y будет решением данного уравнения. В противном случае решений, соответствующих данному полю, нет.

4° Если $K = R(\sqrt[4]{-m})$, то уравнение должно быть сведено к уравнениям типа $ax^4 - by^4 = 1, 2, 4, 8$. Последние уравнения уже решены Д. К. Фадеевым.

5° Все изложенное выше допускает исключение для уравнений, перечисленных в конце § 9. Из них уравнение $17x^2 - y^4 = 16$ остается нерешенным.

В заключение считаю своим долгом выразить глубокую благодарность Д. К. Фаддееву, указавшему мне тему для данной работы и давшему ряд ценных указаний.

Дагестанский педагогический институт

Поступило 14 IV 1941

W. D. PODSIPANIN. ÜBER EINE UNBESTIMMTE GLEICHUNG WO $\sigma = 1, 2, 4, 8, 16$ IST

Um die Gleichung $ax^2 - by^4 = 1, 2, 4, 8, 16$ mit ganzen Zahlen zu lösen, müssen Einheiten besonderer Gestalt in einigen Körpern vierten Grades, die man bei alleiniger Kenntnis von a, b und σ konstruieren kann, gefunden werden. In der Arbeit wird gezeigt, dass, mit Ausnahme einer endlichen Anzahl, die Einheit von der gesuchten Gestalt nur die Grundeinheit des entsprechenden Körpers sein kann.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 5 (1941), 325—351 Série mathématique

Н. А. РОЗЕНСОН

О РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ КЛАССА I

ЧАСТЬ II

(*Представлено академиком* **С. Н. Бернштейном**)

В работе получены формулы для основных совместных инвариантов обеих фундаментальных квадратичных дифференциальных форм, изучены свойства некоторых римановых пространств класса I и даны необходимые и достаточные условия для того, чтобы n-мерное риманово пространство имело класс I в том случае, когда ранг второй фундаментальной формы не меньше 3.

Настоящая работа является непосредственным продолжением статьи «О римановых пространствах класса I» ([1]), в которой даны некоторые необходимые условия для n-мерных римановых пространств класса I. Там введены в рассмотрение n независимых совместных инвариантов первой и второй фундаментальных квадратичных форм $p_1, p_2, \ldots, p_n$ и даны выражения для p с четными значками и для p_n через дифференциальные инварианты второго порядка риманова пространства.

Здесь получены следующие результаты: 1) выведены формулы для p с нечетными значками; 2) на основании этих формул изучены свойства некоторых римановых пространств класса I, для которых существуют известные соотношения между составляющими тензора кривизны и метрического тензора; 3) даны необходимые и достаточные условия в явном виде и инвариантной форме для n-мерных римановых пространств класса I в том случае, когда ранг второй фундаментальной квадратичной формы не меньше 3. Эти условия выражены уравнениями, имеющими четвертую (в исключительном случае—шестую) степень относительно составляющих тензора кривизны.

Необходимые и достаточные условия для того случая, когда ранг второй фундаментальной квадратичной формы равен 2, будут даны в отдельной статье.

1. Вычисление $p_1, p_2, \ldots, p_n$ основных совместных инвариантов обеих фундаментальных дифференциальных квадратичных форм

Положим, что* $a^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta}$. В таком случае $p_1, p_2, \ldots, p_n$ будут совместными инвариантами обеих фундаментальных дифференциальных квадра-

* См. ([1]), стр. 182.

тичных форм. Любой другой совместный инвариант этих форм является функцией от этих инвариантов. Можно показать, что если этот совместный инвариант—целая рациональная функция от коэффициентов второй квадратичной формы, то он представляет собой целую рациональную функцию от $p_1, p_2 \ldots, p_n$. Будем называть $p_1, p_2, \ldots, p_n$ основными инвариантами гиперповерхности $(n+1)$-мерного эвклидова пространства и поставим себе задачу выразить эти инварианты через составляющие тензора кривизны $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ и метрического тензора $g^{\alpha\beta}$ риманова пространства класса I, для которого $\Omega_{\alpha\beta}$ являются коэффициентами второй фундаментальной квадратичной формы. Нами были вычислены p_s при четном s [см. (26^{I})] *:

$$p_s = -\frac{{}^{(s)}W_1}{2^{\frac{s}{2}-1} s(s-1)} \left\{ \begin{array}{ll} s=2, 4, \ldots, n & \text{при четном } n, \\ s=2, 4, \ldots, n-1 & \text{при нечетном } n. \end{array} \right. \tag{1}$$

Обратимся теперь к вычислению p_s с нечетными значками. Как видно из равенства (14^{I}),

$$^{(k)}U_\alpha{}^\delta = \Omega_\alpha{}^\lambda (\Omega_{\lambda\underbrace{\cdots\cdots}_{k-2}}{}^{\delta} + p_1 \Omega_{\lambda\underbrace{\cdots\cdots}_{k-3}}{}^{\delta} + \ldots + p_{k-2}\Omega_\lambda{}^\delta + p_{k-1}\delta_\lambda{}^\delta).$$

Но так как из (16^{I}) следует, что

$$^{(s)}W_1 = 2^{\frac{s}{2}-1}(s-1)\,{}^{(s)}U_1 \quad (s=2, 3, \ldots, n), \tag{2}$$

то на основании равенства (13^{I}) имеем**

$$^{(s)}U_1 = -sp_s \quad (s=1, 2, \ldots, n). \tag{3}$$

Следовательно,

$$p_{k-1} = -\frac{{}^{(k-1)}U_1}{k-1}$$

и

$$^{(k)}U_\alpha{}^\delta = \Omega_\alpha{}^\lambda \left({}^{(k-1)}U_\lambda{}^\delta - \frac{{}^{(k-1)}U_1}{k-1}\delta_\lambda{}^\delta \right) \quad (k=2, \ldots, n). \tag{4}$$

Составим тензор 4-го ранга:

$$^{(k,\,l)}\overline{U}_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta} = {}^{(k)}U_\alpha{}^\gamma\,{}^{(l)}U_\beta{}^\delta - {}^{(k)}U_\beta{}^\gamma\,{}^{(l)}U_\alpha{}^\delta. \tag{5}$$

Так как при $k>1$, $l>1$

$$^{(k)}U_\alpha{}^\gamma = \Omega_\alpha{}^\lambda\left({}^{(k-1)}U_\lambda{}^\gamma - \frac{{}^{(k-1)}U_1}{k-1}\delta_\lambda{}^\gamma \right); \qquad {}^{(l)}U_\beta{}^\delta = \Omega_\beta{}^\mu \left({}^{(l-1)}U_\mu{}^\delta - \frac{{}^{(l-1)}U_1}{l-1}\delta_\mu{}^\delta \right);$$

$$^{(k)}U_\beta{}^\gamma = \Omega_\beta{}^\lambda\left({}^{(k-1)}U_\lambda{}^\gamma - \frac{{}^{(k-1)}U_1}{k-1}\delta_\lambda{}^\gamma \right); \qquad {}^{(l)}U_\alpha{}^\delta = \Omega_\alpha{}^\mu \left({}^{(l-1)}U_\mu{}^\delta - \frac{{}^{(l-1)}U_1}{l-1}\delta_\mu{}^\delta \right),$$

то при указанных значениях k и l

$$^{(k,\,l)}\overline{U}_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta} = R_{\alpha\beta}{}^{\lambda\mu}\left({}^{(k-1)}U_\lambda{}^\gamma - \frac{{}^{(k-1)}U_1}{k-1}\delta_\lambda{}^\gamma \right)\left({}^{(l-1)}U_\mu{}^\delta - \frac{{}^{(l-1)}U_1}{l-1}\delta_\mu{}^\delta \right). \tag{6}$$

---

* Значок $^{\mathrm{I}}$ у номера формулы означает здесь и в дальнейшем, что формула приводится из статьи ([1]).

** Ввиду того, что $^{(1)}U_\alpha{}^\delta = \Omega_\alpha{}^\delta$, $^{(1)}U_1 = \Omega_1 = -p_1$.

Так как $^{(1)}U_\alpha^{\ \gamma} = \Omega_\alpha^{\cdot\gamma}$, то при $l > 1$

$$\left.\begin{aligned} {}^{(1,\,l)}\overline{U}_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma\delta} &= R_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma\mu}\left({}^{(l-1)}U_\mu^{\ \delta} - \frac{{}^{(l-1)}U_1}{l-1}\,\delta_\mu^{\ \delta}\right); \\ {}^{(l,\,1)}\overline{U}_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma\delta} &= R_{\alpha\beta}^{\ \ \lambda\delta}\left({}^{(l-1)}U_\lambda^{\ \gamma} - \frac{{}^{(l-1)}U_1}{l-1}\,\delta_\lambda^{\ \gamma}\right). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Наконец,

$$^{(1,1)}\overline{U}_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma\delta} = R_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma\delta}. \tag{8}$$

На основании этих формул, а также равенств (16^{I}) и (5), можем заключить, что $^{(k,\,l)}\overline{U}_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma\delta}$ в том случае, когда k и l оба четные или оба нечетные числа, будет целой рациональной функцией от $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ и $g^{\lambda\mu}$ и явное выражение для нее может быть написано с помощью формул (9^{I}).

Выразим $^{(s,\,m-s)}\overline{U}_1 = {}^{(s,\,m-s)}\overline{U}_{\alpha\beta}^{\ \ \beta\alpha}$ через совместные инварианты обеих фундаментальных квадратичных форм, считая, что m и s удовлетворяют условиям $0 < s < m \leqslant n$:

$$\begin{aligned} {}^{(s,\,m-s)}\overline{U}_1 = {} & (\underbrace{\Omega_{\alpha\cdots\cdots}^{\cdot\cdots\cdot\gamma}}_{s-1} + p_1 \underbrace{\Omega_{\alpha\cdots\cdots}^{\cdot\cdots\cdot\gamma}}_{s-2} + \ldots + p_{s-2}\,\Omega_\alpha^{\cdot\gamma} + p_{s-1}\,\Omega_\alpha^{\ \gamma})\,(\underbrace{\Omega_{\gamma\cdots\cdots}^{\cdot\cdots\cdot\alpha}}_{m-s-1} + \\ & + p_1 \underbrace{\Omega_{\gamma\cdots\cdots}^{\cdot\cdots\cdot\alpha}}_{m-s-2} + \ldots + p_{m-s-2}\,\Omega_\gamma^{\cdot\alpha} + p_{m-s-1}\,\Omega_\gamma^{\ \alpha}) - {}^{(s)}U_1\ {}^{(m-s)}U_1 = \\ = {} & \Omega_m + p_1\Omega_{m-1} + \ldots + p_{m-s-2}\,\Omega_{s+2} + p_{m-s-1}\,\Omega_{s+1} + \\ & + p_1\,(\Omega_{m-1} + p_1\Omega_{m-2} + \ldots + p_{m-s-2}\,\Omega_{s+1} + p_{m-s-1}\Omega_s) + \ldots \\ & + p_{s-2}\,(\Omega_{m-s+2} + p_1\Omega_{m-s+1} + \ldots + p_{m-s-2}\,\Omega_4 + p_{m-s-1}\,\Omega_3) + \\ & + p_{s-1}\,(\Omega_{m-s+1} + p_1\Omega_{m-s} + \ldots \\ & \qquad + p_{m-s-2}\,\Omega_3 + p_{m-s-1}\,\Omega_2) - s\,(m-s)\,p_s\,p_{m-s} = \\ = {} & -p_{m-s}\,\Omega_s - p_{m-s+1}\,\Omega_{s-1} - \ldots - p_{m-1}\,\Omega_1 - mp_m - \\ & - p_1\,(p_{m-s}\,\Omega_{s-1} + p_{m-s+1}\,\Omega_{s-2} + \ldots + (m-1)\,p_{m-1}) - \ldots \\ & - p_{s-2}\,(p_{m-s}\,\Omega_2 + p_{m-s+1}\,\Omega_1 + (m-s+2)\,p_{m-s+2}) - \\ & - p_{s-1}\,(p_{m-s}\,\Omega_1 + (m-s+1)\,p_{m-s+1}) - s\,(m-s)\,p_s\,p_{m-s} = \\ = {} & -p_{m-s}\,(\Omega_s + p_1\Omega_{s-1} + \ldots + p_{s-2}\,\Omega_2 + p_{s-1}\,\Omega_1) - \\ & - p_{m-s+1}\,(\Omega_{s-1} + p_1\Omega_{s-2} + \ldots + p_{s-2}\,\Omega_1 + (m-s+1)\,p_{s-1}) - \\ & - p_{m-1}\,(\Omega_1 + (m-1)\,p_1) - mp_m - s\,(m-s)\,p_s\,p_{m-s} = \\ = {} & sp_{m-s}\,p_s - [m-2\,(s-1)]\,p_{m-s+1}\,p_{s-1} - [m-2\,(s-2)]\,p_{m-s+2}\,p_{s-2} - \\ & - (m-2)\,p_{m-1}\,p_1 - mp_m - s\,(m-s)\,p_s p_{m-s}. \end{aligned}$$

В результате имеем

$$\begin{aligned} {}^{(s,\,m-s)}\overline{U}_1 = {} & -s\,(m-s-1)\,p_{m-s}\,p_s - [m-2\,(s-1)]\,p_{m-s+1}\,p_{s-1} - \\ & - [m-2\,(s-2)]\,p_{m-s+2}\,p_{s-2} - \ldots - (m-2)\,p_{m-1}\,p_1 - mp_m \end{aligned} \tag{9}$$

$$(0 < s < m \leqslant n).$$

Заменив s на $s+1$, получаем

$$\begin{aligned} {}^{(s+1,\,m-s-1)}\overline{U}_1 = {} & -(s+1)\,(m-s-2)\,p_{m-s-1}\,p_{s+1} - (m-2s)\,p_{m-s}\,p_s - \\ & - [m-2\,(s-1)]\,p_{m-s+1}\,p_{s-1} - [m-2\,(s-2)]\,p_{m-s+2}\,p_{s-2} - \\ & - \ldots - (m-2)\,p_{m-1}\,p_1 - mp_m. \end{aligned}$$

Вычтя из полученного равенства равенство (9), имеем

$$ {}^{(s+1,\, m-s-1)}\overline{U}_1 - {}^{(s,\, m-s)}\overline{U}_1 = -(s+1)(m-s-2)\, p_{m-s-1}\, p_{s+1} + \\ +(m-s)(s-1)\, p_{m-s}\, p_s \,. \qquad (10) $$

Полагая, что $0 < s \leqslant n < m \leqslant 2n$, $m - s \leqslant n$, приходим аналогичным путем к следующему равенству:

$$ {}^{(s,\, m-s)}\overline{U}_1 = -s(m-s-1)\, p_{m-s}\, p_s - [m-2(s-1)]\, p_{m-s+1}\, p_{s-1} - \\ -[m-2(s-2)]\, p_{m-s+2}\, p_{s-2} - \ldots - [m-2(m-n)]\, p_n\, p_{m-n} \qquad (11) \\ (0 < s \leqslant n < m \leqslant 2n,\ m-s \leqslant n). $$

Находим

$$ {}^{(s+1,\, m-s-1)}\overline{U}_1 = -(s+1)(m-s-2)\, p_{m-s-1}\, p_{s+1} - (m-2s)\, p_{m-s}\, p_s - \\ -[m-2(s-1)]\, p_{m-s+1}\, p_{s-1} - [m-2(s-2)]\, p_{m-s+2}\, p_{s-2} - \\ - \ldots - [m-2(m-n)]\, p_n\, p_{m-n} \,. $$

Вычитая из полученного равенства равенство (11), получаем формулу (10). Следовательно, эта формула справедлива, если $1 \leqslant s \leqslant n-1$, $1 < m - s \leqslant n$.

Считаем теперь, что m — четное число. Тогда числа $m - s$ и s оба четные или оба нечетные. То же самое можно сказать о числах $s+1$ и $m-s-1$. На основании вышесказанного замечаем, что левая часть равенства (10) является целой рациональной функцией от $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ и $g^{\lambda\mu}$. Полагаем $m = 2s$. Имеем

$$ {}^{(s+1,\, s-1)}\overline{U}_1 - {}^{(s,\, s)}\overline{U}_1 = -(s+1)(s-2)\, p_{s-1}\, p_{s+1} + s(s-1)\, p_s^2 . \qquad (12) $$

Давая s значения $3, 5, \ldots, (n-1)$ в случае четного n и $3, 5, \ldots, (n-2)$ в случае нечетного n и пользуясь формулами (1), получаем выражения для p_s^2 (при указанных значениях s) через инварианты риманова пространства*, т. е. через совместные инварианты $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ и $g^{\lambda\mu}$. Считая в равенстве (11) $s = n$, $m = 2n$, находим

$$ p_n^2 = \frac{{}^{(n,\, n)}\overline{U}_1}{n(1-n)} \,. \qquad (13) $$

Эту формулу можно получить также, исходя из (28^{I}) и (16^{I}).

Полагая теперь в формуле (10), что s — четное число, удовлетворяющее неравенствам $2 \leqslant s \leqslant n-1$, мы имеем возможность вычислить все произведения $p_k\, p_l$, где k и l — нечетные, не равные друг другу числа, бóльшие единицы. Отсюда следует, что выбор знака у одного из p_s с нечетным значком (не равного нулю) однозначно определяет знаки других p_s с нечетными значками (не равных нулю; $s > 1$).

Полагая в равенстве (9) $s = 1$, имеем

$$ {}^{(1,\, m-1)}\overline{U}_1 = -(m-2)\, p_{m-1}\, p_1 - m p_m \,. \qquad (14) $$

Пользуясь этой формулой, можем выразить через инварианты риманова пространства произведения $p_1 p_3$, $p_1 p_5$, $\ldots$, $p_1 p_{n-1}$ в случае четного n и произведения $p_1 p_3$, $p_1 p_5$, $\ldots$, $p_1 p_{n-2}$ в случае нечетного n.

* Через дифференциальные инварианты 2-го порядка.

Наконец, положим в равенстве (11) $m=n+1$. Имеем

$$^{(1,\,n)}\overline{U}_1=(1-n)\,p_1p_n\,. \tag{15}$$

В случае нечетного n с помощью этой формулы можем выразить произведение p_1p_n через инварианты риманова пространства. Таким образом, мы видим, что если только не все p_k с нечетными значками, бо́льшими единицы, равны нулю, то можно, выбрав знак у какого-нибудь из не обращающихся в нуль инвариантов p_k, однозначно определить p_1, и задача вычисления основных инвариантов обеих фундаментальных квадратичных форм будет полностью решена (p_s с нечетными значками определяются с точностью до знака; знак одного из них однозначно определяет знаки остальных).

Рассмотрим теперь тот случай, когда $p_3, p_5, \ldots$ одновременно равны нулю, и опять поставим задачу вычисления p_1. Составим скалярный инвариант* $R_\alpha^{\ \beta}\ {}^{(1,\,k)}\overline{U}_{\beta\lambda}^{\ \ \lambda\alpha}$:

$$\begin{aligned}
R_\alpha^{\ \beta}\ {}^{(1,\,k)}\overline{U}_{\beta\lambda}^{\ \ \lambda\alpha} &= R_\alpha^{\ \beta}\left(\Omega_\beta^{\ \lambda}\ {}^{(k)}U_\lambda^{\ \alpha}-\Omega_1\ {}^{(k)}U_\beta^{\ \alpha}\right)=\\
&=\left(\Omega_{\alpha\cdot}^{\ \cdot\beta}+p_1\Omega_\alpha^{\ \beta}\right)\Big[\Omega_{\beta\underbrace{\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot}_{k}}^{\ \cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,\alpha}+p_1\Omega_{\beta\underbrace{\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot}_{k-1}}^{\ \cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,\alpha}+\ldots+p_{k-2}\Omega_{\beta\cdot\cdot}^{\ \cdot\cdot\alpha}+p_{k-1}\Omega_{\beta\cdot}^{\ \cdot\alpha}+\\
&\qquad+p_1\Big(\Omega_{\beta\underbrace{\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot}_{k-1}}^{\ \cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,\alpha}+p_1\Omega_{\beta\underbrace{\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot}_{k-2}}^{\ \cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,\alpha}+\ldots+p_{k-2}\,\Omega_{\beta\cdot}^{\ \cdot\alpha}+p_{k-1}\,\Omega_\beta^{\ \alpha}\Big)\Big]=\\
&=\Omega_{k+3}+p_1\Omega_{k+2}+\ldots+p_{k-1}\,\Omega_4+2p_1\left(\Omega_{k+2}+p_1\Omega_{k+1}+\ldots\right.\\
&\qquad\left.+\,p_{k-1}\,\Omega_3\right)+p_1^{\,2}\left(\Omega_{k+1}+p_1\Omega_k+\ldots+p_{k-1}\,\Omega_2\right)=\\
&=-\left(p_k\,\Omega_3+p_{k+1}\,\Omega_2+p_{k+2}\,\Omega_1+(k+3)\,p_{k+3}\right)-2p_1\left(p_k\,\Omega_2+\right.\\
&\qquad\left.+\,p_{k+1}\,\Omega_1+(k+2)\,p_{k+2}\right)-p_1^{\,2}\left(p_k\,\Omega_1+(k+1)\,p_{k+1}\right)=\\
&=p_k\left[p_2\,\Omega_1+3p_3+2p_1p_2\right]+p_{k+1}\left(2p_2-kp_1^{\,2}\right)-\\
&\qquad\qquad-(2k+3)\,p_1p_{k+2}-(k+3)\,p_{k+3}\,,
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
R_\alpha^{\ \beta}\ {}^{(1,\,k)}\overline{U}_{\beta\lambda}^{\ \ \lambda\alpha}&=(p_1p_2+3p_3)\,p_k+(2p_2-kp_1^{\,2})\,p_{k+1}-\\
&\qquad-(2k+3)\,p_1p_{k+2}-(k+3)\,p_{k+3}.
\end{aligned} \tag{16}$$

Считаем k нечетным числом, удовлетворяющим неравенствам $1<k\leqslant \leqslant n-1$ ($p_s=0$ при $s>n$). Тогда левая часть равенства (16) будет целым рациональным инвариантом риманова пространства. Кроме того, так как мы предположили, что $p_3=p_5=\ldots=0$, то $p_k=p_{k+2}=0$. Следовательно,

$$R_\alpha^{\ \beta}\ {}^{(1,\,k)}\overline{U}_{\beta\lambda}^{\ \ \lambda\alpha}=(2p_2-kp_1^2)\,p_{k+1}-(k+3)\,p_{k+3}\,. \tag{17}$$

Придавая k значения $3, 5, \ldots$, находим из равенства (17) выражения для $p_1^2p_4$, $p_1^2p_6, \ldots$ в виде целых рациональных инвариантов риманова пространства. Если $p_4, p_6, \ldots$ не равны одновременно нулю, то мы можем определить p_1 с точностью до знака*.

* $R_\alpha^{\ \beta}$ — тензор Риччи. В этом случае ни один из инвариантов p_4, p_6, ... не равен нулю (см. ниже).

Таким образом, если исключить тот особенный случай, когда все p_s при $s>2$ равны нулю, мы можем определить $p_1, p_2, \ldots, p_n$ с точностью до знака при некотором p_{2k-1}. Самая возможность получения этого результата вытекает из того обстоятельства, что в этом общем случае $\Omega_{\alpha\beta}$ определяются с точностью до знака ([2,3]). В этом случае гиперповерхность неизгибаема.

2. Необходимые и достаточные условия для того, чтобы риманово пространство класса I имело не более k главных нормальных кривизн, отличных от нуля

Так как первая фундаментальная квадратичная форма $ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta$ положительно определенная, то можно привести в соответствие некоторой заданной точке пространства такую систему координат, что в указанной точке и в выбранной системе координат выполняются равенства $g^{11}=g^{22}=\ldots=g^{nn}=1$; $g^{\alpha\beta}=0$ при $\alpha \neq \beta$; $\Omega_{\alpha\beta}=0$ при $\alpha \neq \beta$.

Заметим, что $\Omega_{11}, \Omega_{22}, \ldots, \Omega_{nn}$ — числа вещественные, равные главным нормальным кривизнам риманова пространства класса I — V_n — в указанной точке. При этих значениях $g^{\alpha\beta}$ и $\Omega_{\alpha\beta}$ имеем следующие выражения для $p_1, p_2, \ldots, p_n$ (см. (19^{I})):

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= -\sum_{\gamma=1}^{n} \Omega_{\gamma\gamma}, \\ p_2 &= \sum_{\gamma<\delta} \Omega_{\gamma\gamma}\,\Omega_{\delta\delta}, \\ p_3 &= -\sum_{\gamma<\delta<\varepsilon} \Omega_{\gamma\gamma}\,\Omega_{\delta\delta}\,\Omega_{\varepsilon\varepsilon}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_n &= (-1)^n\,\Omega_{11}\,\Omega_{22}\ldots\Omega_{nn}, \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

т. е. $p_1, p_2, \ldots, p_n$ являются основными симметрическими функциями главных нормальных кривизн V_n. Так как $\Omega_{11}, \Omega_{22}, \ldots, \Omega_{nn}$ — корни уравнения $z^n + p_1 z^{n-1} + \ldots + p_{n-1} z + p_n = 0$, то для того, чтобы n-мерное риманово пространство класса I имело не более k главных нормальных кривизн, отличных от нуля, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$p_{k+1}=0, \quad p_{k+2}=0, \ldots, p_n=0. \tag{19}$$

Напишем эти условия в виде соотношений между $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ и $g^{\lambda\mu}$, пользуясь формулами (16^{I}), (1) и (12).

Имеем следующие системы уравнений для четырех возможных ниже перечисленных случаев:

1° k и n четные

I $\quad {}^{(s)}W_1 = 0 \quad (s = k+2,\ k+4, \ldots, n);$

II
$$ {}^{(s)}W_\alpha{}^\lambda\, {}^{(s+2)}W_\lambda{}^\alpha + \frac{2(s+1)}{s-1} R_{\alpha\beta}{}^{\lambda\mu}\, {}^{(s)}W_\lambda{}^\alpha\, {}^{(s)}W_\mu{}^\beta = 0 $$
$$ (s = k+2,\ k+4, \ldots, n-2); $$

III
$$ {}^{(k)}W_\alpha{}^\lambda\, {}^{(k+2)}W_\alpha{}^\lambda + \frac{2(k+1)}{k-1} R_{\alpha\beta}{}^{\lambda\mu} \left({}^{(k)}W_\lambda{}^\alpha - \frac{{}^{(k)}W_1}{k} \delta_\lambda{}^\alpha \right) \cdot $$
$$ \cdot \left({}^{(k)}W_\mu{}^\beta - \frac{{}^{(k)}W_1}{k} \delta_\mu{}^\beta \right) = 0. $$

2° k нечетное, n четное

I $\quad {}^{(s)}W_1 = 0 \quad (s = k+1,\ k+3, \ldots, n);$

II
$$ {}^{(s)}W_\alpha{}^\lambda\, {}^{(s+2)}W_\lambda{}^\alpha + \frac{2(s+1)}{s-1} R_{\alpha\beta}{}^{\lambda\mu}\, {}^{(s)}W_\lambda{}^\alpha\, {}^{(s)}W_\mu{}^\beta = 0 $$
$$ (s = k+1,\ k+3, \ldots, n-2). $$

3° k четное, n нечетное

I $\quad {}^{(s)}W_1 = 0 \quad (s = k+2,\ k+4, \ldots, n-1);$

II
$$ {}^{(s)}W_\alpha{}^\lambda\, {}^{(s+2)}W_\lambda{}^\alpha + \frac{2(s+1)}{s-1} R_{\alpha\beta}{}^{\lambda\mu}\, {}^{(s)}W_\lambda{}^\alpha\, {}^{(s)}W_\mu{}^\beta = 0 $$
$$ (s = k+2,\ k+4, \ldots, n-1;\ {}^{(n+1)}W_\lambda{}^\alpha = 0); $$

III
$$ {}^{(k)}W_\alpha{}^\lambda\, {}^{(k+2)}W_\lambda{}^\alpha + \frac{2(k+1)}{k-1} R_{\alpha\beta}{}^{\lambda\mu} \left({}^{(k)}W_\lambda{}^\alpha - \frac{{}^{(k)}W_1}{k} \delta_\lambda{}^\alpha \right) \cdot $$
$$ \cdot \left({}^{(k)}W_\mu{}^\beta - \frac{{}^{(k)}W_1}{k} \delta_\mu{}^\beta \right) = 0. $$

4° k и n нечетные

I $\quad {}^{(s)}W_1 = 0 \quad (s = k+1,\ k+3, \ldots, n-1);$

II
$$ {}^{(s)}W_\alpha{}^\lambda\, {}^{(s+2)}W_\lambda{}^\alpha + \frac{2(s+1)}{s-1} R_{\alpha\beta}{}^{\lambda\mu}\, {}^{(s)}W_\lambda{}^\alpha\, {}^{(s)}W_\mu{}^\beta = 0 $$
$$ (s = k+1,\ k+3, \ldots, n-1;\ {}^{(n+1)}W_\lambda{}^\alpha = 0). \tag{20} $$

Для риманова пространства класса I, имеющего именно* k главных нормальных кривизн, отличных от нуля, справедливы равенства (19) и неравенство $p_k \neq 0$. Мы получаем эти условия в виде зависимостей между $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ и $g^{\lambda\mu}$, присоединяя к одной из четырех систем уравнений (20) неравенство ${}^{(k)}W_1 \neq 0$ в случае четного k или неравенство

* Считаем $k > 1$. Заметим, что в другом, более сложном виде такие условия даны в статье Томаса (³).

$$^{(k-1)}W_{\alpha}{}^{\lambda}\ ^{(k+1)}W_{\lambda}{}^{\alpha}+\frac{2k}{k-2}R_{\alpha\beta}{}^{\lambda\mu}\left(^{(k-1)}W_{\lambda}{}^{\alpha}-\frac{^{(k-1)}W_1}{k-1}\delta_{\lambda}{}^{\alpha}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(^{(k-1)}W_{\mu}{}^{\beta}-\frac{^{(k-1)}W_1}{k-1}\delta_{\mu}^{\beta}\right)\neq 0$$

в случае нечетного k.

Как известно, для того чтобы риманово пространство класса I было эвклидовым, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы $\|\Omega_{\alpha\beta}\|$ был меньше 2, т. е. чтобы выполнялись равенства*

$$p_2=0, \quad p_3=0, \ldots, p_n=0. \tag{21}$$

Положив в (20) $k=1$, получаем необходимые и достаточные условия для того, чтобы n-мерное пространство класса I было эвклидовым, в виде следующих уравнений для скалярных совместных инвариантов $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ и $g^{\lambda\mu}$:

1° n четное

$$\left.\begin{array}{ll}\text{I} & ^{(s)}W_1=0 \quad (s=2, 4, \ldots, n);\\ \text{II} & ^{(s)}W_{\alpha}{}^{\lambda}\ ^{(s+2)}W_{\lambda}{}^{\alpha}+\frac{2(s+1)}{s-1}R_{\alpha\beta}{}^{\lambda\mu}\ ^{(s)}W_{\lambda}{}^{\alpha}\ ^{(s)}W_{\mu}{}^{\beta}=0\\ & \qquad (s=2, 4, \ldots, n-2).\end{array}\right\} \tag{22}$$

2° n нечетное

$$\left.\begin{array}{ll} & ^{(s)}W_1=0 \quad (s=2, 4, \ldots, n-1;\ ^{(n+1)}W_{\lambda}{}^{\alpha}=0);\\ \text{II} & ^{(s)}W_{\sigma}{}^{\lambda}\ ^{(s-2)}W_{\lambda}{}^{\alpha}+\frac{2(s+1)}{s-1}R_{\alpha\beta}{}^{\lambda\mu}\ ^{(s)}W_{\lambda}{}^{\alpha}\ ^{(s)}W_{\mu}{}^{\beta}=0\\ & \qquad (s=2, 4, \ldots, n-1).\end{array}\right\} \tag{23}$$

Рассмотрим в качестве примера трехмерное риманово пространство класса I. В этом случае нами было найдено выражение: $p_3^2=\sigma_3^2=$ $=\frac{1}{3}R_3-\frac{1}{4}R_1R_2+\frac{1}{24}R_1^3$ (см. (33$^{\text{I}}$)). Кроме того, для всякого пространства класса I, $p_2=-\frac{1}{2}\,^{(2)}W_1=-\frac{1}{2}R_1$. Отсюда следует, что система равенств $p_2=0$, $p_3=0$ эквивалентна системе

$$R_1=0, \qquad R_3=0. \tag{24}$$

Таким образом, равенства (24) представляют необходимые и достаточные условия для того, чтобы трехмерное риманово пространство класса I было эвклидовым.

Положим теперь в (22) $n=4$. Получим следующие три уравнения,

* Эти равенства должны быть выполнены в каждой точке изучаемого пространства.

выражающие необходимые и достаточные условия для того, чтобы четырехмерное риманово пространство класса I было эвклидовым:

$$R_1=0; \qquad Q_2-4R_2+R_1^2=0\,^*; \qquad R_\alpha^{\ \lambda}\ {}^{(4)}W_\lambda^{\ \alpha}+6R_{\alpha\beta}^{\ \ \lambda\mu}\ R_\lambda^{\ \alpha}\ R_\mu^{\ \beta}=0.$$

Воспользовавшись равенством ${}^{(4)}W_\lambda^{\ \alpha}=\frac{1}{2}\ {}^{(4)}W_1\delta_\lambda^{\ \alpha}$, справедливым для любого четырехмерного пространства класса I**, и введя обозначение $R_{\alpha\beta}^{\ \ \lambda\mu}\ R_\lambda^{\ \delta}\ R_\mu^{\ \beta}=P_3$, получаем указанные условия в следующем виде:

$$R_1=0; \qquad Q_2=4R_2; \qquad P_3=0. \tag{25}$$

Можно указать и другие условия в виде равенства нулю некоторого тензора 2-го ранга, необходимые и достаточные для того, чтобы n-мерное риманово пространство класса I имело не более k главных нормальных кривизн, отличных от нуля. Из формул ($16^{\rm I}$) и (4) следует, что равенство нулю тензора ${}^{(s)}W_\alpha^{\ \lambda}$ влечет за собой и равенство нулю ${}^{(t)}W_\alpha^{\ \lambda}$ (где $t>s$), ${}^{(s)}W_1$, ${}^{(t)}W_1$. Но тогда, на основании*** ($13^{\rm I}$), $p_s, p_{s+1}, \ldots, p_n$ обращаются в нули, и риманово пространство класса I имеет не более $s-1$ главных нормальных кривизн, отличных от нуля. Таким образом, мы заключаем, что равенства

$${}^{(k+1)}W_\alpha^{\ \lambda}=0 \tag{26}$$

представляют достаточные условия для того, чтобы риманово пространство класса I имело не более k главных нормальных кривизн, отличных от нуля. Докажем, что эти условия являются и необходимыми. С этой целью вычислим ${}^{(s)}W_\alpha^{\ \lambda}$ при частных значениях $\Omega_{\alpha\beta}$ и $g^{\lambda\mu}$ (см. стр. 330).

Замечаем, что

$${}^{(s)}W_\alpha^{\ \lambda}=0, \quad \text{если} \quad \alpha\neq\lambda; \ {}^{(s)}W_\alpha^{\ \alpha}={}^{(s)}W_{\alpha\alpha}=2^{\frac{s}{2}-1}(s-1)\ {}^{(s)}U_{\alpha\alpha}\,^{****}.$$

Но

$${}^{(s)}U_{\alpha\alpha}=\Omega_{\alpha\alpha}\ {}^{(\alpha)}p_{s-1}\,^{*****}, \tag{27}$$

где

$${}^{(\alpha)}p_{s-1}=(-1)^{s-1}\sum_{\substack{\gamma_1<\gamma_2<\ldots<\gamma_{s-1}\\ \gamma_1\neq\alpha,\ \gamma_2\neq\alpha,\ldots,\ \gamma_{s-1}\neq\alpha}}\Omega_{\gamma_1\gamma_1}\Omega_{\gamma_2\gamma_2}\ldots\Omega_{\gamma_{s-1}\gamma_{s-1}}. \tag{28}$$

Следовательно,

$${}^{(s)}W_{\alpha\alpha}=2^{\frac{s}{2}-1}(s-1)\ \Omega_{\alpha\alpha}\ {}^{(\alpha)}p_{s-1} \tag{29}$$

---

* См. ($34^{\rm I}$).

** См. ($20^{\rm I}$).

*** Считаем, что $s>1$.

**** Нет суммирования по α.

***** См. (1), стр. 187.

и

$$^{(k+1)}W_{\alpha\alpha}=2^{\frac{k-1}{2}}k\Omega_{\alpha\alpha}\,^{(\alpha)}p_k. \quad (30)$$

Из этой формулы можно видеть, что если пространство имеет в каждой точке не более k главных нормальных кривизн, отличных от нуля, то $^{(k+1)}W_{\alpha\alpha}=0$. Действительно, в этом случае или $\Omega_{\alpha\alpha}=0$, или $^{(\alpha)}p_k=0$. Отсюда мы заключаем, что в любой точке и в любой системе координат $^{(k+1)}W_\alpha^{\ \lambda}=0$, что и требовалось доказать.

В том случае, когда k — нечетное число, равенства (26) представляют необходимые и достаточные условия для того, чтобы риманово пространство класса I имело не более k главных нормальных кривизн, отличных от нуля, в виде уравнений в тензорной форме, связывающих $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ и $g^{\lambda\mu}$.

Очевидно, в случае четного k условия такого вида даются системой уравнений

$$^{(k+2)}W_\alpha^{\ \lambda}=0; \qquad R_{\alpha\beta}^{\ \ \lambda\mu}\left(^{(k)}W_\lambda^{\ \alpha}-\frac{^{(k)}W_1}{k}\delta_\lambda^{\ \alpha}\right)\left(^{(k)}W_\mu^{\ \beta}-\frac{^{(k)}W_1}{k}\delta_\mu^{\ \beta}\right)=0 \quad (31)$$

(см. условия (20), случаи 1° и 3°).

В частности, положив в (26) $k=1$, получаем в тензорной форме необходимые и достаточные условия для того, чтобы риманово пространство класса I было эвклидовым*.

$$R_\alpha^{\ \lambda}=0. \quad (32)$$

Для того чтобы $p_3=0,\ldots,p_n=0$ (этот случай мы рассматривали выше), необходимым и достаточным является существование равенств

$$^{(4)}W_\alpha^{\ \lambda}=0; \qquad P_3+R_1R_2-\frac{R_1^3}{4}=0. \quad (33)$$

3. О свойствах тензора $^{(n-1)}W_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma\delta}$, составленного для n-мерного риманова пространства класса I

Докажем, что составляющие тензора $^{(n-1)}W_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma\delta}$ в случае n-мерного риманова пространства класса I удовлетворяют уравнениям

$$^{(n-1)}W_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma\delta}=-\frac{1}{n-2}\left(^{(n-1)}W_\alpha^{\ \gamma}\delta_\beta^{\ \gamma}-{}^{(n-1)}W_\beta^{\ \gamma}\delta_\alpha^{\ \delta}+{}^{(n-1)}W_\beta^{\ \delta}\delta_\alpha^{\ \gamma}-\right.$$
$$\left.-{}^{(n-1)}W_\alpha^{\ \delta}\delta_\beta^{\ \gamma}\right)+\frac{^{(n-1)}W_1}{(n-2)(n-1)}\left(\delta_\alpha^{\ \gamma}\delta_\beta^{\ \delta}-\delta_\beta^{\ \gamma}\delta_\alpha^{\ \delta}\right), \quad (34)$$

где значки при построении тензоров $^{(k)}W_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma\delta}$, $^{(k)}W_\alpha^{\ \gamma}$ подняты посредством симметричного тензора $a^{\lambda\mu}$ [см. формулы ($9^{\rm I}$), ($11^{\rm I}$), ($12^{\rm I}$)].

Предполагаем вначале, что $a^{\lambda\mu}$ — коэффициенты положительно определенной квадратичной формы. В таком случае, как известно, можно, задав некоторую точку рассматриваемого пространства, выбрать такую систему координат, чтобы в этой системе, в заданной точке, выполня-

* Этот результат известен. См. Eisenhart ([4]), p. 200.

лись равенства $a^{11}=a^{22}=\ldots=a^{nn}=1$; $a^{\alpha\beta}=0$ при $\alpha\neq\beta$; $\Omega_{\alpha\beta}=0$ при $\alpha\neq\beta$. Из (14^{I}) видно, что при указанных частных значениях $\Omega_{\alpha\beta}$ и $a^{\lambda\mu}$ сумма *

$$ {}^{(k-1)}U_{\alpha}^{\ \gamma}\ \Omega_{\beta}^{\ \delta}+{}^{(k-2)}U_{\alpha}^{\ \gamma}\ \Omega_{\beta.}^{\ \ .\delta}+\ldots+{}^{(1)}U_{\alpha}^{\ \gamma}\ \Omega_{\beta\underbrace{\cdots\cdots}_{k-2}}^{\ \ \cdots\cdots\delta} \qquad (35)$$

не равна нулю лишь тогда, когда $\gamma=\alpha$ и $\delta=\beta$. Сделав предположение о существовании последних равенств **, мы получим для суммы (35) выражение

$$ {}^{(k-1)}U_{\alpha\alpha}\Omega_{\beta\beta}+{}^{(k-2)}U_{\alpha\alpha}\Omega_{\beta\beta}^{\ \ 2}+\ldots+{}^{(1)}U_{\alpha\alpha}\Omega_{\beta\beta}^{\ \ k-1}$$

(в ${}^{(s)}U_{\alpha\alpha}$, $\Omega_{\beta\beta}$ нет суммирования по значкам α и β). Пользуясь (27), мы можем эту сумму переписать в виде***

$$\Omega_{\alpha\alpha}\Omega_{\beta}\ \left(\Omega_{\beta\beta}^{\ \ k-2}+{}^{(\alpha)}p_1\Omega_{\beta\beta}^{\ \ k-3}+\ldots+{}^{(\alpha)}p_{k-2}\right)=\Omega_{\alpha\alpha}\Omega_{\beta\beta}\ {}^{(\alpha,\beta)}p_{k-2},$$

где

$$ {}^{(\alpha,\beta)}p_{k-2}=(-1)^{k-2}\sum_{\substack{\gamma_1<\gamma_2<\ldots<\gamma_{k-2}\\ \gamma_1\neq\alpha,\ \gamma_2\neq\alpha,\ldots,\gamma_{k-2}\neq\alpha,\ \gamma_1\neq\beta,\ \gamma_2\neq\beta,\ldots,\gamma_{k-2}\neq\beta}}\Omega_{\gamma_1\gamma_1}\Omega_{\gamma_2\gamma_2}\ldots\Omega_{\gamma_{k-2}\gamma_{k-2}}. \qquad (36)$$

Из (15^{I}) вытекает, что

$$ {}^{(k)}W_{\alpha\beta\alpha\beta}=-{}^{(k)}W_{\alpha\beta\beta\alpha}=2^{\frac{k}{2}-1}\Omega_{\alpha\alpha}\Omega_{\beta\beta}\ {}^{(\alpha,\beta)}p_{k-2};\ \ (\alpha\neq\beta) \qquad (37)$$

Следовательно,

$$ {}^{(n-1)}W_{\alpha\beta\alpha\beta}=-{}^{(n-1)}W_{\alpha\beta\beta\alpha}=2^{\frac{n-3}{2}}\Omega_{\alpha\alpha}\Omega_{\beta\beta}\ {}^{(\alpha,\beta)}p_{n-3},$$

$$ {}^{(n-1)}W_{\alpha\alpha}=2^{\frac{n-3}{2}}(n-2)\,\Omega_{\alpha\alpha}\ {}^{(\alpha)}p_{n-2} \qquad [\text{см. } (29)]$$

и

$$ {}^{(n-1)}W_{\alpha\beta}=0, \quad \text{если} \quad \alpha\neq\beta.$$

Наконец,

$$ {}^{(n-1)}W_1=-2^{\frac{n-3}{2}}(n-2)(n-1)\,p_{n-1} \quad (\text{см. } (13^{I})).$$

С другой стороны, заключаем, что при указанных частных значениях $\Omega_{\alpha\beta}$ и $a^{\lambda\mu}$ уравнения (34) сводятся или к тождествам (в обеих частях равенства имеем нули) или к равенствам такого вида:

$$ {}^{(n-1)}W_{\alpha\beta\alpha\beta}=-\frac{1}{n-2}\left({}^{(n-1)}\underset{\alpha\neq\beta}{W_{\alpha\alpha}}+{}^{(n-1)}W_{\beta\beta}\right)+\frac{{}^{(n-1)}W_1}{(n-2)(n-1)}. \qquad (38)$$

---

* Для доказательства (34) вычисляем правую часть равенства (15^{I}) при этих значениях $a^{\lambda\mu}$ и $\Omega_{\alpha\beta}$.

** Считаем, что $\alpha\neq\beta$; при $\alpha=\beta$, как видно из равенств (15^{I}), ${}^{(k)}W_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma\delta}$ обращается в нуль.

*** См. [1], стр. 187.

Подставив полученные значения для ${}^{(n-1)}W_{\alpha\beta\alpha\beta}$, ${}^{(n-1)}W_{\alpha\alpha}$, ${}^{(n-1)}W_{\beta\beta}$, ${}^{(n-1)}W_1$, имеем в левой части равенства (38)

$$2^{\frac{n-3}{2}} \Omega_{\alpha\alpha}\Omega_{\beta\beta}\ {}^{(\alpha,\beta)}p_{n-3}$$

и в правой части

$$-2^{\frac{n-3}{2}} (\Omega_{\alpha\alpha}\ {}^{(\alpha)}p_{n-2} + \Omega_{\beta\beta}\ {}^{(\beta)}p_{n-2} + p_{n-1}).$$

Но легко убедиться в том, что при $\alpha \neq \beta$

$$p_{n-1} = -\Omega_{\alpha\alpha}\ {}^{(\alpha)}p_{n-2} - \Omega_{\beta\beta}\ {}^{(\beta)}p_{n-2} - \Omega_{\alpha\alpha}\Omega_{\beta\beta}\ {}^{(\alpha,\beta)}p_{n-3}.$$

Это непосредственно следует из таких очевидных равенств:

$$p_{n-1} = -\Omega_{\alpha\alpha}\ {}^{(\alpha)}p_{n-2} + {}^{(\alpha)}p_{n-1}; \qquad {}^{(\alpha)}p_{n-1} = -\Omega_{\beta\beta}\ {}^{(\alpha,\beta)}p_{n-2};$$
$${}^{(\beta)}p_{n-2} = -\Omega_{\alpha\alpha}\ {}^{(\alpha,\beta)}p_{n-3} + {}^{(\alpha,\beta)}p_{n-2}.$$

Таким образом, равенства (34) выполняются в некоторой точке и соответствующей частной системе координат. Но так как они имеют тензорную форму, то они справедливы в любой точке и любой системе координат. Мы предполагали вначале, что $a^{\lambda\mu}$ — коэффициенты положительно определенной квадратичной формы, но так как обе части равенств (34) являются целыми рациональными функциями от $a^{\lambda\mu}$, мы можем это ограничение снять и считать $a^{\lambda\mu}$ произвольным контравариантным симметричным тензором 2-го ранга.

Предположим теперь, что n — нечетное число. В таком случае равенства (34) представляют собой необходимые условия для того, чтобы риманово пространство n измерений имело класс I в виде уравнений в тензорной форме, связывающих составляющие тензора кривизны и произвольного контравариантного симметричного тензора 2-го ранга $a^{\lambda\mu}$ и имеющих степень $\frac{n-1}{2}$ относительно составляющих тензора кривизны.

Заметим, что в случае трехмерного риманова пространства равенства (34) справедливы при любом классе пространства [см. (25^{I})].

4. О некоторых пространствах класса I

Предположим, что для некоторого n-мерного риманова пространства класса I выполняются равенства

$${}^{(k)}W_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta} = \frac{{}^{(k)}W_1}{n(1-n)} (\delta_\alpha{}^\gamma\ \delta_\beta{}^\delta - \delta_\beta{}^\gamma\ \delta_\alpha{}^\delta) \tag{39}$$

при некотором определенном k, удовлетворяющем неравенствам $2 < k < n$. Значки подняты посредством метрического тензора $g^{\alpha\beta}$. Ставится задача выяснить, каковы особенности рассматриваемого пространства как гиперповерхности $(n-1)$-мерного эвклидова пространства. С этой целью рассмотрим* ${}^{(k+2)}W_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta}$. Так как

* См. (9^{I}).

$$^{(k+2)}W_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta} = R_{\alpha\beta}{}^{\lambda\mu}\Big[{}^{(k)}W_{\lambda\mu}{}^{\gamma\delta} + \frac{1}{k-1}\big({}^{(k)}W_{\lambda}{}^{\gamma}\,\delta_{\mu}{}^{\delta} - {}^{(k)}W_{\lambda}{}^{\delta}\,\delta_{\mu}{}^{\gamma} + {}^{(k)}W_{\mu}{}^{\delta}\,\delta_{\lambda}{}^{\gamma} - {}^{(k)}W_{\gamma}{}^{\mu}\,\delta_{\lambda}{}^{\delta}\big) - \frac{^{(k)}W_1}{(k-1)k}\big(\delta_{\lambda}{}^{\gamma}\,\delta_{\mu}{}^{\delta} - \delta_{\mu}{}^{\gamma}\,\delta_{\lambda}{}^{\delta}\big)\Big],$$

то на основании равенств (39) и равенств, непосредственно получающихся из них,

$$^{(k)}W_{\alpha}{}^{\gamma} = \frac{^{(k)}W_1}{n}\,\delta_{\alpha}{}^{\gamma}, \tag{40}$$

находим, что

$$^{(k+2)}W_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta} = \frac{2R_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta}\ {}^{(k)}W_1}{n(1-n)(k-1)k}\left[k^2 - k + 2k(1-n) - n(1-n)\right] = \frac{2R_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta}\ {}^{(k)}W_1(n-k)(n-1-k)}{n(1-n)(k-1)k}.$$

Отсюда следует, что

$$^{(k+2)}W_{\alpha}{}^{\gamma} = \frac{2R_{\alpha}{}^{\gamma}\ {}^{(k)}W_1(n-k)(n-1-k)}{n(1-n)(k-1)k}.$$

Но

$$^{(k)}W_{\alpha}{}^{\gamma} = 2^{\frac{k}{2}-1}(k-1)\ {}^{(k)}U_{\alpha}{}^{\gamma}; \qquad {}^{(k)}W_1 = 2^{\frac{k}{2}-1}(k-1)\ {}^{(k)}U_1;$$

$$^{(k+2)}W_{\alpha}{}^{\gamma} = 2^{\frac{k}{2}}(k+1)\ {}^{(k+2)}U_{\alpha}{}^{\gamma}.$$

Следовательно,

$$^{(k+2)}U_{\alpha}{}^{\gamma} = \frac{R_{\alpha}{}^{\gamma}(n-k)(n-1-k)\ {}^{(k)}U_1}{n(1-n)k(k+1)}. \tag{41}$$

С другой стороны, из (40) следует, что $^{(k)}U_{\alpha}{}^{\gamma} = \frac{^{(k)}U_1}{n}\delta_{\alpha}{}^{\gamma}$. В таком случае

$$^{(k+1)}U_{\alpha}{}^{\gamma} = \Omega_{\alpha}{}^{\lambda}\left({}^{(k)}U_{\lambda}{}^{\gamma} - \frac{^{(k)}U_1}{k}\delta_{\lambda}{}^{\gamma}\right) = -\frac{n-k}{nk}\ {}^{(k)}U_1\Omega_{\alpha}{}^{\gamma},$$

$$^{(k+1)}U_1 = -\frac{n-k}{nk}\ {}^{(k)}U_1\Omega_1;$$

$$^{(k+2)}U_{\alpha}{}^{\gamma} = \Omega_{\alpha}{}^{\lambda}\left({}^{(k+1)}U_{\lambda}{}^{\gamma} - \frac{^{(k)}U_1}{k+1}\delta_{\lambda}{}^{\gamma}\right) = -\frac{n-k}{nk}\ {}^{(k)}U_1\left(\Omega_{\alpha\cdot}{}^{\cdot\gamma} + \frac{1}{k+1}p_1\Omega_{\alpha}{}^{\gamma}\right),$$

или

$$^{(k+2)}U_{\alpha}{}^{\gamma} = -\frac{n-k}{nk}\ {}^{(k)}U_1\left[R_{\alpha}{}^{\gamma} - \frac{k}{k+1}p_1\Omega_{\alpha}{}^{\gamma}\right]. \tag{42}$$

Сравнивая выражения для $^{(k+2)}U_{\alpha}{}^{\gamma}$, данные формулами (41) и (42), и считая, что $n > k$, $^{(k)}U_1 \neq 0$ (в рассматриваемой области), имеем

$$\frac{(n-1-k)R_{\alpha}{}^{\gamma}}{(1-n)(k+1)} = -R_{\alpha}{}^{\gamma} + \frac{k}{k+1}p_1\Omega_{\alpha}{}^{\gamma},$$

или

$$R_{\alpha}{}^{\gamma} = \frac{n-1}{n}p_1\Omega_{\alpha}{}^{\gamma}. \tag{43}$$

Отсюда следует, что

$$R_1 = \frac{n-1}{n} p_1 \Omega_1 = -\frac{n-1}{n} \Omega_1{}^2 = \Omega_2 + p_1 \Omega_1 = \Omega_2 - \Omega_1{}^2$$

и

$$\Omega_2 = \frac{1}{n} \Omega_1{}^2, \tag{44}$$

Но

$$\Omega_2 - \frac{1}{n} \Omega_1{}^2 = (\Omega_\alpha{}^\gamma - \frac{1}{n} \Omega_1 \delta_\alpha{}^\gamma)(\Omega_\gamma{}^\alpha - \frac{1}{n} \Omega_1 \delta_\gamma{}^\alpha).$$

Следовательно,

$$\Omega_\alpha{}^\gamma = \frac{1}{n} \Omega_1 \delta_\alpha{}^\gamma, \tag{45}$$

т. е. пространство имеет постоянную кривизну ($\Omega_1 = -p_1 \neq 0$, так как иначе согласно (43) $R_\alpha{}^\gamma \doteq {}^{(2)}W_\alpha{}^\gamma = 0$, а тогда ${}^{(k)}U_1 = 0$, что противоречит поставленному условию).

Рассмотрим теперь тот случай, когда ${}^{(k)}U_1 = 0$ в каждой точке некоторой области. В этом случае (39) и (40) обращаются соответственно в

$${}^{(k)}W_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta} = 0 \tag{46}$$

и

$${}^{(k)}W_\alpha{}^\gamma = 0. \tag{47}$$

Из (47) следует, что не только p_k, но и $p_{k+1}, \ldots, p_n$ обращаются в нули, и пространство имеет не более $k-1$ главных нормальных кривизн, отличных от нуля в каждой точке рассматриваемой области.

Докажем, что для всякого пространства класса I, обладающего этим свойством, справедливы равенства (46). При частных значениях $\Omega_{\alpha\beta}$ и $g^{\lambda\mu}$ эти равенства, на основании (37), примут вид

$$\Omega_{\alpha\alpha} \Omega_{\beta\beta} {}^{(\alpha,\beta)} p_{k-2} = 0. \quad (\alpha \neq \beta) \tag{48}$$

Мы замечаем, что, если имеется не более $(k-1)$ величин Ω_{ss}, отличных от нуля, то равенства (48) удовлетворяются (один из множителей обязательно обращается в нуль). Следовательно, справедливы и равенства (46) в любой точке и в любой системе координат, что и требовалось доказать.

Отметим, что для пространства класса I из равенств ${}^{(k)}W_\alpha{}^\gamma = 0$ следуют равенства ${}^{(k)}W_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta} = 0$. Итак, доказана следующая

ТЕОРЕМА 1. *Если для n-мерного риманова пространства класса* I *выполняются равенства* (39) *при некотором $k < n$, то или пространство имеет не более $k-1$ главных нормальных кривизн, отличных от нуля (в том случае, когда ${}^{(k)}W_1 = 0$; наоборот, для всякого такого пространства справедливы равенства* (39)), *или пространство имеет постоянную кривизну (в том случае, когда ${}^{(k)}W_1 \neq 0$). Первая часть теоремы справедлива и при $k = n$.*

Заметим, что при четном k обе части равенств (39) являются целыми рациональными функциями от составляющих тензора кривизны $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ и контравариантного метрического тензора $g^{\lambda\mu}$.

Обратимся теперь к изучению свойств таких римановых пространств n измерений класса I, для которых при некотором $k < n$ справедливы равенства

$$^{(k)}W_\alpha{}^\gamma = \frac{^{(k)}W_1}{n}\delta_\alpha{}^\gamma. \tag{49}$$

Значки попрежнему подняты посредством тензора $g^{\alpha\beta}$. При частных значениях $\Omega_{\alpha\beta}$ и $g^{\lambda\mu}$ эти уравнения имеют вид

$$\Omega_{\alpha\alpha}\ ^{(\alpha)}p_{k-1} = -\frac{kp_k}{n}. \tag{50}$$

В том случае, когда какая-нибудь кривизна равна нулю в данной точке, из (50) следует, что $p_k = 0$, $^{(k)}W_\alpha{}^\gamma = 0$ и пространство имеет в этой точке не более $k-1$ главных нормальных кривизн, отличных от нуля. Предположим теперь, что ни одна из кривизн не равна нулю. Обозначим их через $z_1, z_2, \ldots, z_n$ и докажем, что среди них имеется не более k различных, т. е. что справедлива

ТЕОРЕМА 2. *Если для n-мерного риманова пространства класса* I *выполняются равенства* (49) *при некотором* $k < n$ *и* $^{(k)}W_1 \neq 0$, *то ни одна из главных нормальных кривизн не равна нулю и среди них имеется не более k различных кривизн.*

Доказываем теорему от противного. Предположим, что имеется по крайней мере $k+1$ не равных друг другу кривизн. Пусть это кривизны $z_1, z_2, \ldots, z_{k+1}$. Равенства (50) можно переписать в следующем виде:

$$z_i\ ^{(i)}p_{k-1} = -\frac{kp_k}{n}. \tag{51}$$

Отсюда следует, что

$$z_i\ ^{(i)}p_{k-1} = z_j\ ^{(j)}p_{k-1} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n). \tag{52}$$

Но $^{(i)}p_{k-1} = -z_j\ ^{(i,j)}p_{k-2} + {}^{(i,j)}p_{k-1}$; $^{(j}p_{k-1} = -z_i\ ^{(i,j)}p_{k-2} + {}^{(i,j)}p_{k-1}$ $(i \neq j)$. Подставив это в равенства (52), находим

$$(z_i - z_j)\ ^{(i,j)}p_{k-1} = 0. \tag{53}$$

Полагая, что $i = 1$, $j = 2, 3, \ldots, k+1$, получаем систему уравнений

$$^{(1,2)}p_{k-1} = 0; \quad ^{(1,3)}p_{k-1} = 0, \ldots, {}^{(1,k+1)}p_{k-1} = 0. \tag{54}$$

Но $^{(1,2)}p_{k-1} = -z_3\ ^{(1,2,3)}p_{k-2} + {}^{(1,2,3)}p_{k-1}$; $^{(1,3)}p_{k-1} = -z_2\ ^{(1,2,3)}p_{k-2} + {}^{(1,2,3)}p_{k-1}$ и т. д. Пользуясь этими равенствами и (54), имеем

$$^{(1,2,3)}p_{k-2} = 0, \quad ^{(1,2,4)}p_{k-2} = 0, \quad ^{(1,2,k+1)}p_{k-2} = 0. \tag{55}$$

Аналогичным путем приходим к следующим двум уравнениям:

$$^{(1,2,3,\ldots,k)}p_1 = 0, \qquad ^{(1,2,3,\ldots,k-1,k+1)}p_1 = 0. \tag{56}$$

Вычитая одно равенство из другого, получаем $z_k = z_{k+1}$, что противоречит сделанному нами предположению. Отсюда следует, что пространство класса I, для которого выполнены равенства (49), не может иметь более k главных нормальных кривизн, что и требовалось доказать.

Заметим, что при четном k уравнения (49) представляют зависи-

мости в тензорной форме между $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ и $g^{\lambda\mu}$ степени $\frac{k}{2}$ относительно составляющих тензора кривизны.

Предположим, наконец, что для n-мерного риманова пространства класса I, при некотором $k < n-1$, выполняются равенства $(n \geqslant 4)$

$$
\begin{aligned}
{}^{(k)}W_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta} = -\frac{1}{n-2}\left({}^{(k)}W_{\alpha}{}^{\gamma}\,\delta_{\beta}{}^{\delta} - {}^{(k)}W_{\alpha}{}^{\delta}\,\delta_{\beta}{}^{\gamma} + {}^{(k)}W_{\beta}{}^{\delta}\,\delta_{\alpha}{}^{\gamma} - {}^{(k)}W_{\beta}{}^{\gamma}\,\delta_{\alpha}{}^{\delta}\right) + \\
+ \frac{{}^{(k)}W_1}{(n-2)(n-1)}\left(\delta_{\alpha}{}^{\gamma}\,\delta_{\beta}{}^{\delta} - \delta_{\alpha}{}^{\delta}\,\delta_{\beta}{}^{\gamma}\right) \qquad (57)
\end{aligned}
$$

(при $k=n-1$ и $k=n$ эти равенства обращаются в тождества). Ставится задача — выяснить свойства этого пространства как гиперповерхности $(n+1)$-мерного эвклидова пространства. При рассматриваемых нами частных значениях $\Omega_{\alpha\beta}$ и $g^{\lambda\mu}$ равенства (57) обращаются в тождества или в уравнения вида

$$
\Omega_{\alpha\alpha}\Omega_{\beta\beta}\;{}^{(\alpha,\beta)}p_{k-2} = -\frac{k-1}{n-2}\left(\Omega_{\alpha\alpha}\;{}^{(\alpha)}p_{k-1} + \Omega_{\beta\beta}\;{}^{(\beta)}p_{k-1}\right) - \frac{(k-1)k}{(n-2)(n-1)}\,p_k \qquad (58)
$$
$$
(\alpha \neq \beta)
$$

(заметим, что такие равенства выполняются для всякого конформно-эвклидова пространства класса I).

Рассмотрим сначала случай, когда две каких-нибудь кривизны равны нулю. Тогда [как видно из (58)] $p_k = 0$ и $\Omega_{\beta\beta}\;{}^{(\beta)}p_{k-1} = 0$ (при всех β). Отсюда следует, что в любой системе координат ${}^{(k)}W_{\alpha}{}^{\gamma} = 0$ и пространство имеет в данной точке не более $k-1$ отличных от нуля главных нормальных кривизн. Наоборот, для всякого такого пространства справедливы в этой точке равенства (46), а следовательно и (57).

Предположим теперь, что одна из главных нормальных кривизн риманова пространства класса I, например, $\Omega_{\alpha\alpha}$ равна нулю, причем выполняются равенства (57). Тогда из (58) имеем

$$
\left.
\begin{aligned}
\Omega_{\beta\beta}\;{}^{(\alpha,\beta)}_{\beta\neq\alpha}p_{k-1} &= -\frac{k}{n-1}\;{}^{(\alpha)}p_k = \Omega_{\gamma\gamma}\;{}^{(\alpha,\gamma)}_{\gamma\neq\alpha}p_{k-1}, \\
\Omega_{\beta\beta}\Omega_{\gamma\gamma}\;{}^{(\alpha,\beta,\gamma)}p_{k-2} &= \frac{(k-1)k}{(n-1)(n-2)}\;{}^{(\alpha)}p_k, \quad \beta \neq \gamma, \quad \beta \neq \alpha, \quad \gamma \neq \alpha.
\end{aligned}
\right\} \qquad (59)
$$

Но

$$
\begin{aligned}
{}^{(\alpha,\beta)}p_{k-1} &= -\Omega_{\gamma\gamma}\;{}^{(\alpha,\beta,\gamma)}p_{k-2} + {}^{(\alpha,\beta,\gamma)}p_{k-1}, \\
{}^{(\alpha,\beta)}p_{k-1} + \Omega_{\gamma\gamma}\;{}^{(\alpha,\beta,\gamma)}p_{k-2} &= {}^{(\alpha,\beta,\gamma)}p_{k-1}.
\end{aligned}
$$

Складывая равенства (59), находим

$$
\Omega_{\beta\beta}\;{}^{(\alpha,\beta,\gamma)}p_{k-1} = -\frac{k(n-k-1)}{(n-2)(n-1)}\;{}^{(\alpha)}p_k = \Omega_{\gamma\gamma}\;{}^{(\alpha,\beta,\gamma)}p_{k-1}.
$$

Отсюда следует, что или $\Omega_{\beta\beta} = \Omega_{\gamma\gamma}$ или ${}^{(\alpha,\beta,\gamma)}p_{k-1} = 0$. Но если справедливо второе равенство, то ${}^{(\alpha)}p_k = 0$, а так как $\Omega_{\beta\beta} \neq 0$ (предполагается, что $\Omega_{\alpha\alpha}$ единственная равная нулю кривизна), то ${}^{(\alpha,\beta)}p_{k-1} = 0$ и ${}^{(k)}W_{\lambda}{}^{\mu} = 0$. Но в таком случае мы имеем не более $k-1$ главных нормальных кривизн, отличных от нуля, а мы считали, что их $n-1$.

Приходим к невозможному неравенству $n-1 \leqslant k-1$. Следовательно, $\Omega_{\beta\beta} = \Omega_{\gamma\gamma}$. Нами доказана следующая

ТЕОРЕМА 3. *Если у n-мерного риманова пространства класса* I, *для которого при некотором $k < n-1$ $(n \geqslant 4)$ выполняются равен-*

ства (57), *одна и только одна главная нормальная кривизна в некоторой точке равна нулю, то все остальные кривизны равны друг другу. Наоборот, для всякого пространства класса* I, *у которого кривизны в некоторой точке обладают указанными выше свойствами, в этой точке справедливы равенства* (57).

Наконец, предположим, что ни одна из главных нормальных кривизн n-мерного риманова пространства класса I не равна нулю и при некотором $k < n-1$ $(n \geqslant 4)$ справедливы равенства (57). На основании (58) находим

$$\Omega_{\alpha\alpha}[\Omega_{\beta\beta}\,{}^{(\alpha,\beta)}p_{k-2} - \Omega_{\gamma\gamma}\,{}^{(\alpha,\gamma)}p_{k-2}] = -\frac{k-1}{n-2}(\Omega_{\beta\beta}\,{}^{(\beta)}p_{k-1} - \Omega_{\gamma\gamma}\,{}^{(\gamma)}p_{k-1}). \quad (60)$$

Предположим сначала, что $k=2$; изучим свойства конформно-эвклидова пространства класса I $(n \geqslant 4)$. Допустим, что пространство имеет в данной точке M (в той точке, в которой $\Omega_{\alpha\beta}$ и $g^{\lambda\mu}$ имеют указанные выше частные значения) по крайней мере две различные главные нормальные кривизны z_1 и z_2. Из (60) имеем

$$\Omega_{\alpha\alpha}(\Omega_{\beta\beta} - \Omega_{\gamma\gamma}) = -\frac{1}{n-2}(\Omega_{\beta\beta}\,{}^{(\beta)}p_1 - \Omega_{\gamma\gamma}\,{}^{(\gamma)}p_1).$$

Но

$${}^{(\beta)}p_1 = -\Omega_{\gamma\gamma} + {}^{(\beta,\gamma)}p_1, \quad \text{где } {}^{(\beta,\gamma)}p_1 = -\sum_{\lambda \neq \beta,\gamma}\Omega_{\lambda\lambda}, \quad {}^{(\gamma)}p_1 = -\Omega_{\beta\beta} + {}^{(\beta,\gamma)}p_1.$$

Следовательно,

$$\Omega_{\alpha\alpha}(\Omega_{\beta\beta} - \Omega_{\gamma\gamma}) = -\frac{1}{n-2}(\Omega_{\beta\beta} - \Omega_{\gamma\gamma})\,{}^{(\beta,\gamma)}p_1.$$

Полагаем

$$\Omega_{\beta\beta} = z_1, \qquad \Omega_{\gamma\gamma} = z_2, \qquad \Omega_{\alpha\alpha} = z_3.$$

В таком случае

$$z_3(z_1 - z_2) = -\frac{1}{n-2}\,{}^{(1,2)}p_1(z_1 - z_2) = z_4(z_1 - z_2) = \ldots = z_n(z_1 - z_2).$$

Иначе говоря, если z_1 и z_2 — две не равные друг другу главные нормальные кривизны, то все остальные главные нормальные кривизны равны между собой. Так как $n \geqslant 4$, то кратность z_3 равна по крайней мере двум. Ввиду того, что $z_1 \neq z_2$, кривизна z_3 не равна по крайней мере одной из двух кривизн z_1, z_2. Предположим, что $z_3 \neq z_2$. Полагаем

$$\Omega_{\alpha\alpha} = z_3, \qquad \Omega_{\beta\beta} = z_2, \qquad \Omega_{\gamma\gamma} = z_3;$$

$$z_3(z_2 - z_3) = -\frac{1}{n-2}\,{}^{(2,3)}p_1(z_2 - z_3);$$

$${}^{(2,3)}p_1 = -(n-2)z_3 = -[(n-3)z_3 + z_1].$$

Следовательно, $z_1 = z_3$. Заключаем, что конформно-эвклидово пространство класса I не может иметь в каждой точке более двух различных главных нормальных кривизн, причем (если они не равны между собой) кратность одной из них равна $n-1$ и другой 1. Наоборот, для всякого такого пространства справедливы равенства (58) при $k=2$, т. е. оно является конформно-эвклидовым пространством.

Предположим теперь, что $k > 2$. Допустим сначала, что пространство имеет в данной точке по крайней мере $k+2$ различных главных

нормальных кривизн. Обозначим их через $z_1, z_2, \ldots, z_{k+2}$ $(k+2>4)$. Из (60) получаем

$$z_1(z_2\,{}^{(1,2)}p_{k-2}-z_3\,{}^{(1,3)}p_{k-2})=-\frac{k-1}{n-2}(z_2\,{}^{(2)}p_{k-1}-z_3\,{}^{(3)}p_{k-1}).$$

Но

$$^{(1,2)}p_{k-2}=-z_3\,{}^{(1,2,3)}p_{k-3}+{}^{(1,2,3)}p_{k-2};$$
$$^{(1,3)}p_{k-2}=-z_2\,{}^{(1,2,3)}p_{k-3}+{}^{(1,2,3)}p_{k-2};$$
$$^{(2)}p_{k-1}=-z_3\,{}^{(2,3)}p_{k-2}+{}^{(2,3)}p_{k-1};\qquad {}^{(3)}p_{k-1}=-z_2\,{}^{(2,3)}p_{k-2}+{}^{(2,3)}p_{k-1}.$$

Пользуясь этими соотношениями, имеем

$$z_1(z_2-z_3)\,{}^{(1,2,3)}p_{k-2}=-\frac{k-1}{n-2}(z_2-z_3)\,{}^{(2,3)}p_{k-1}$$

или

$$z_1\,{}^{(1,2,3)}p_{k-2}=-\frac{k-1}{n-2}\,{}^{(2,3)}p_{k-1}=z_4\,{}^{(4,2,3)}p_{k-2}.$$

Отсюда находим, что ${}^{(1,2,3,4)}p_{k-2}=0$, и, рассуждая так же, как выше, приходим к выводу, что пространство не может иметь в данной точке более $k+1$ различных главных нормальных кривизн. Но так как $k<n-1$, то $k+1<n$ и кратность по крайней мере одной из главных нормальных кривизн, например z_1, не меньше 2. Предположим, что пространство имеет в данной точке именно $k+1$ различных главных нормальных кривизн. Считая в (60) $\Omega_{\alpha\alpha}=z_1=\Omega_{\beta\beta}$; $\Omega_{\gamma\gamma}=z_2$, находим

$$z_1\,{}^{(1,1,2)}p_{k-2}=-\frac{k-1}{n-2}\,{}^{(1,2)}p_{k-1}=z_3\,{}^{(3,1,2)}p_{k-2}.$$

Следовательно, ${}^{(1,1,2,3)}p_{k-2}=0$.

Аналогичным путем приходим к выводу, что пространство, для которого справедливы равенства (57), при некотором $k<n-1$, имеет в каждой точке не более чем k различных главных нормальных кривизн.

5. Необходимые и достаточные условия для римановых пространств класса I

В этом параграфе даны необходимые и достаточные условия для того, чтобы n-мерное риманово пространство было пространством класса I. Задача отыскания таких условий в форме зависимостей между составляющими тензора кривизны была впервые поставлена Вейзе ([2]). Исходя из обобщенных уравнений Гаусса и Кодацци, впервые полученных Фоссом ([5]), Вейзе приходит к необходимости рассматривать два случая, которые могут встретиться при решении указанной задачи: так называемый регулярный случай α и сингулярный случай β. В случае α дано полное решение задачи. Вейзе указаны необходимые и достаточные условия в виде уравнений, связывающих $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$; нужно отметить, что эти уравнения (седьмой степени относительно $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$) не имеют инвариантной формы. В случае β вопрос остается открытым.

Указанная задача рассматривалась также Томасом ([3]). Им была дана чрезвычайно важная теорема, гласящая, что в том случае, когда ранг

некоторой матрицы из составляющих тензора кривизны риманова пространства n измерений * не меньше 4, уравнения Кодацци являются следствиями уравнений Гаусса. Ранг этой матрицы Томас называет типовым числом пространства. Он дает решение задачи в том случае, когда типовое число $\tau > 2$; вернее говоря, необходимые и достаточные условия не приведены им в явной форме, но могут быть получены путем алгебраического исключения. Случай $\tau = 2$ у Томаса не разобран (при $\tau = 0$ и $\tau = 1$ пространство эвклидово и, следовательно, имеет класс нуль).

В настоящей статье дано решение задачи в явном виде, в инвариантной форме при $\tau > 2$. Уравнения, выражающие необходимые и достаточные условия для риманова пространства класса I, в этом случае имеют, вообще говоря, четвертую степень, в виде исключения — шестую степень относительно составляющих тензора кривизны.

Случай первый: $p_3 \neq 0$

Для того чтобы n-мерное риманово пространство было пространством класса I, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись обобщенные уравнения Гаусса

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \Omega_{\alpha\gamma}\Omega_{\beta\delta} - \Omega_{\alpha\delta}\Omega_{\beta\gamma} \tag{61}$$

и Кодацци

$$\Omega_{\alpha\beta,\gamma} = \Omega_{\alpha\gamma,\beta} \tag{62}$$

и чтобы ранг матрицы $\|\Omega_{\alpha\beta}\|$ был больше 1 **. Ставим себе задачу получить необходимые и достаточные условия для риманова пространства класса I в виде уравнений в тензорной форме, связывающих составляющие тензора кривизны и метрического тензора. Предположим сначала, что уравнения (61) выполнены. Согласно принятым обозначениям имеем

$$^{(k)}U_{\alpha}{}^{\delta} = \Omega_{\alpha \underbrace{\cdots\cdots}_{k-1}}{}^{\cdots\cdots\delta} + p_1 \Omega_{\alpha \underbrace{\cdots\cdots}_{k-2}}{}^{\cdots\cdots\delta} + \ldots + p_{k-2}\,\Omega_{\alpha .}{}^{.\delta} + p_{k-1}\,\Omega_{\alpha}{}^{\delta}.$$

С другой стороны,

$$R_{\alpha\lambda\mu}{}^{\delta}\,{}^{(k-2)}U^{\lambda\mu}$$
$$= (\Omega_{\alpha\mu}\Omega^{\delta}_{\lambda} - \Omega_{\alpha}{}^{\delta}\,\Omega_{\lambda\mu})\,(\underbrace{\Omega^{\lambda\cdots\cdots\mu}_{\cdots\cdots}}_{k-3} + p_1 \underbrace{\Omega^{\lambda\cdots\cdots\mu}_{\cdots\cdots}}_{k-4} + \ldots + p_{k-4}\,\Omega^{\lambda.\mu}_{.} + p_{k-3}\,\Omega^{\lambda\mu})$$
$$= \Omega_{\alpha \underbrace{\cdots\cdots}_{k-1}}{}^{\cdots\cdots\delta} + p_1 \Omega_{\alpha \underbrace{\cdots\cdots}_{k-2}}{}^{\cdots\cdots\delta} + \ldots + p_{k-3}\,\Omega_{\alpha ..}{}^{..\delta} - \Omega_{\alpha}{}^{\delta}\,(\Omega_{k-1} + p_1\Omega_{k-2} + \ldots + p_{k-3}\Omega_2)$$
$$= \underbrace{\Omega^{\alpha\cdots\cdots\delta}_{\cdots\cdots}}_{k-1} + p_1 \Omega_{\alpha \underbrace{\cdots\cdots}_{k-2}}{}^{\cdots\cdots\delta} + \ldots + p_{k-3}\,\Omega_{\alpha ..}{}^{..\delta} + \Omega_{\alpha}{}^{\delta}\,(p_{k-2}\,\Omega_1 + (k-1)\,p_{k-1}).$$

---

* Ранг этой матрицы для риманова пространства класса I совпадает с рангом второй фундаментальной квадратичной формы.

** О том, что эти условия являются необходимыми и достаточными, см. Levi-Civita ([6]). Доказательство дано также в упомянутой статье Томаса.

Следовательно,

$$ {}^{(k)}U_\alpha^{\ \delta} - R_{\alpha\lambda\mu}^{\ \ \ \ \delta}\ {}^{(k-2)}U^{\lambda\mu} = p_{k-2}R_\alpha^{\ \delta} - (k-2)\,p_{k-1}\,\Omega_\alpha^{\ \delta}, $$

или

$$ (k-2)\,p_{k-1}\,\Omega_\alpha^{\ \delta} = R_{\alpha\lambda\mu}^{\ \ \ \ \delta}\ {}^{(k-2)}U^{\lambda\mu} - {}^{(k)}U_\alpha^{\ \delta} + p_{k-2}R_\alpha^{\ \delta}. \tag{63} $$

При $k=4$ имеем

$$ 2p_3\Omega_\alpha^{\ \delta} = R_{\alpha\lambda\mu}^{\ \ \ \ \delta}\ R^{\lambda\mu} - {}^{(4)}U_\alpha^{\ \delta} - \frac{1}{2}\,R_1R_\alpha^{\ \delta}; \tag{64} $$

$p_3^{\,2}$ находится из формулы (12) при $s=3$:

$$ p_3^{\,2} = \frac{1}{6}\,R_\alpha^{\ \gamma}\ {}^{(4)}U_\gamma^{\ \alpha} - \frac{1}{12}\,R_1\ {}^{(4)}U_1 + \frac{1}{6}\,R_{\alpha\beta}^{\ \ \ \lambda\mu}\left(R_\lambda^{\ \alpha} - \frac{R_1}{2}\,\delta_\lambda^{\ \alpha}\right)\left(R_\mu^{\ \beta} - \frac{R_1}{2}\,\delta_\mu^{\ \beta}\right). \tag{65} $$

Как видим, необходимое условие для того, чтобы риманово пространство было пространством класса I, выражается неравенством

$$ R_\alpha^{\ \gamma}\ {}^{(4)}U_\gamma^{\ \alpha} - \frac{1}{2}\,R_1\ {}^{(4)}U_1 + R_{\alpha\beta}^{\ \ \ \lambda\mu}\left(R_\lambda^{\ \alpha} - \frac{R_1}{2}\,\delta_\lambda^{\ \alpha}\right)\left(R_\mu^{\ \beta} - \frac{R_1}{2}\,\delta_\mu^{\ \beta}\right) > 0 \tag{66} $$

или равенством

$$ R_\alpha^{\ \gamma}\ {}^{(4)}U_\gamma^{\ \alpha} - \frac{1}{2}\,R_1\ {}^{(4)}U_1 + R_{\alpha\beta}^{\ \ \ \lambda\mu}\left(R_\lambda^{\ \alpha} - \frac{R_1}{2}\,\delta_\lambda^{\ \alpha}\right)\left(R_\mu^{\ \beta} - \frac{R_1}{2}\,\delta_\mu^{\ \beta}\right) = 0. \tag{67} $$

Допустим сначала, что справедливо неравенство (66). Тогда мы можем получить выражения для $\Omega_\alpha^{\ \delta}$ из (64) в виде вещественных функций от $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ и $g^{\lambda\mu}$ *.

На основании (61) имеем следующее необходимое условие для риманова пространства класса I:

$$ 4p_3^{\,2}R_{\alpha\beta}^{\ \ \ \gamma\delta} = \left(R_{\alpha\lambda\mu}^{\ \ \ \ \gamma}\ R^{\lambda\mu} - {}^{(4)}U_\alpha^{\ \gamma} - \frac{1}{2}\,R_1R_\alpha^{\ \gamma}\right)\left(R_{\beta\nu\sigma}^{\ \ \ \ \delta}\ R^{\nu\sigma} - {}^{(4)}U_\beta^{\ \delta} - \frac{1}{2}\,R_1R_\beta^{\ \delta}\right) - $$
$$ - \left(R_{\alpha\lambda\mu}^{\ \ \ \ \delta}\ R^{\lambda\mu} - {}^{(4)}U_\alpha^{\ \delta} - \frac{1}{2}\,R_1R_\alpha^{\ \delta}\right)\left(R_{\beta\nu\sigma}^{\ \ \ \ \gamma}\ R^{\nu\sigma} - {}^{(4)}U_\beta^{\ \gamma} - \frac{1}{2}\,R_1R_\beta^{\ \gamma}\right), \tag{68} $$

причем p_3^2 находится из равенства (65). При исследовании вопроса о достаточности условий (66) и (68) для того, чтобы риманово пространство имело класс I, нужно рассматривать отдельно два возможных случая.

1° ${}^{(4)}U_\alpha^{\ \delta} \neq 0$. Считаем, что выполнены условия (66) и (68). Определяем тензор $\Omega_\alpha^{\ \delta}$ (с точностью до знака) с помощью равенства (64). Заметим, что тензор $\Omega_{\alpha\beta}$, определяемый этим равенством, симметричен относительно своих значков, так как таким свойством обладает тензор ${}^{(4)}U_{\alpha\beta}$ [см. формулы (9^{I}) и (16^{I})]. Из (64) и (68) следует (61), иначе говоря, выполняются уравнения Гаусса. Из теоремы, данной в § 2 настоящей работы (заметим, что все полученные там результаты вытекали из уравнений Гаусса), следует, что ранг матрицы $\|\Omega_\alpha^{\ \beta}\|$ больше 3 (в ином случае существовало бы равенство ${}^{(4)}U_\alpha^{\ \delta} = 0$). При

* Все ${}^{(k)}U_\alpha^\delta$ при четном k являются целыми рациональными функциями от $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ и $g^{\lambda\mu}$.

этих условиях уравнения Кодацци, согласно указанной теореме Томаса, будут следствием уравнений Гаусса. Итак, доказана следующая

ТЕОРЕМА 4. *Если для n-мерного пространства с положительно определенной квадратичной фундаментальной формой справедливо неравенство* (66) *и*

$$ {}^{(4)}U_{\alpha}^{\ \delta} \neq 0, \tag{69}$$

то равенства (68), *где* p_3^2 *определяется из* (65), *выражают необходимые и достаточные условия для того, чтобы указанное риманово пространство имело класс* I.

2° ${}^{(4)}U_{\alpha}^{\ \delta} = 0$. В этом случае неравенство (66) принимает вид

$$R_{\alpha\beta}^{\ \ \lambda\mu} \left(R_{\lambda}^{\ \alpha} - \frac{R_1}{2}\delta_{\lambda}^{\ \alpha}\right)\left(R_{\mu}^{\ \beta} - \frac{R_1}{2}\delta_{\mu}^{\ \beta}\right) > 0. \tag{70}$$

Предположим, что справедливы равенства

$$\begin{aligned} 4p_3^2\, R_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma\delta} = {} & \left(R_{\alpha\lambda\mu}^{\ \ \ \ \gamma}\, R^{\lambda\mu} - \frac{1}{2}R_1 R_{\alpha}^{\ \gamma}\right)\left(R_{\beta\nu\sigma}^{\ \ \ \ \delta}\, R^{\nu\sigma} - \frac{1}{2}R_1 R_{\beta}^{\ \delta}\right) - \\ & - \left(R_{\beta\lambda\mu}^{\ \ \ \ \gamma}\, R^{\lambda\mu} - \frac{1}{2}R_1 R_{\beta}^{\ \gamma}\right)\left(R_{\alpha\nu\sigma}^{\ \ \ \ \delta}\, R^{\nu\sigma} - \frac{1}{2}R_1 R_{\alpha}^{\ \delta}\right), \end{aligned} \tag{71}$$

где p_3^2 находится из равенства

$$p_3^2 = \frac{1}{6} R_{\alpha\beta}^{\ \ \lambda\mu} \left(R_{\lambda}^{\ \alpha} - \frac{R_1}{2}\delta_{\lambda}^{\ \alpha}\right)\left(R_{\mu}^{\ \beta} - \frac{R_1}{2}\delta_{\mu}^{\ \beta}\right). \tag{72}$$

Определив тензор $\Omega_{\alpha}^{\ \delta}$ равенством

$$2p_3\Omega_{\alpha}^{\ \delta} = R_{\alpha\lambda\mu}^{\ \ \ \ \delta}\, R^{\lambda\mu} - \frac{1}{2}R_1 R_{\alpha}^{\ \delta} \tag{73}$$

и пользуясь (71), получаем уравнения Гаусса. Ранг матрицы $\|\Omega_{\alpha}^{\ \delta}\|$ равен 3 (так как ${}^{(4)}U_{\alpha}^{\ \delta} = 0$ и $p_3 \neq 0$). Равенства Кодацци в этом случае имеют вид

$$\left[\frac{R_{\alpha\lambda\mu\beta}\, R^{\lambda\mu} - \frac{1}{2}R_1 R_{\alpha\beta}}{p_3}\right]_{,\gamma} = \left[\frac{R_{\alpha\lambda\mu\gamma}\, R^{\lambda\mu} - \frac{1}{2}R_1 R_{\alpha\gamma}}{p_3}\right]_{,\beta}. \tag{74}$$

Имеем следующую теорему:

ТЕОРЕМА 5. *Если для n-мерного риманова пространства с положительно определенной фундаментальной квадратичной формой справедливо неравенство* (70) *и*

$${}^{(4)}U_{\alpha}^{\ \delta} = 0, \tag{75}$$

то равенства (71) *и* (74), *где* p_3 *определяется из* (72), *выражают необходимые и достаточные условия для того, чтобы указанное риманово пространство имело класс* I.

Итак, нами полностью разобран случай $p_3 \neq 0$. Как видно из (68) и (71), уравнения, выражающие необходимые и достаточные условия для существования уравнений Гаусса, имеют четвертую степень относительно составляющих тензора кривизны (уравнения, данные Вейзе, имеют седьмую степень).

Случай второй: $p_3 = 0,\ p_5 \neq 0$

Пусть для некоторого n-мерного риманова пространства с положительно определенной фундаментальной квадратичной формой справедливо равенство (67). Предположим сначала, что это пространство имеет класс I. В таком случае (согласно принятым обозначениям) $p_3 = 0$. Полагаем в формуле (63) $k = 6$. Имеем (предполагая, что $n \geqslant 5$)

$$4p_5\Omega_\alpha{}^\delta = R_{\alpha\lambda\mu}{}^{\delta}\,{}^{(4)}U^{\lambda\mu} - {}^{(6)}U_\alpha{}^\delta - \frac{1}{4}\,{}^{(4)}U_1 R_\alpha{}^\delta. \tag{76}$$

Для $p_5{}^2$ имеем следующее выражение [см. (12)] при $s = 5$

$$p_5{}^2 = \frac{1}{20}\,[{}^{(6,4)}\overline{U}_1 - {}^{(5,5)}\overline{U}_1 + 18p_4p_6].$$

Воспользовавшись формулами (3), (5) и (6), получаем

$$p_5{}^2 = \frac{1}{20}\Big[\,{}^{(4)}U_\alpha{}^\gamma\,{}^{(6)}U_\gamma{}^\alpha + R_{\alpha\beta}{}^{\lambda\mu}\Big({}^{(4)}U_\lambda{}^\alpha - \frac{{}^{(4)}U_1}{4}\delta_\lambda{}^\alpha\Big)\Big({}^{(4)}U_\mu{}^\beta - \frac{{}^{(4)}U_1}{4}\delta_\mu{}^\beta\Big) - \frac{1}{4}\,{}^{(4)}U_1\,{}^{(6)}U_1\Big]. \tag{77}$$

Отсюда следует, что необходимым условием для того, чтобы риманово пространство имело класс I, является неравенство

$${}^{(4)}U_\alpha{}^\gamma\,{}^{(6)}U_\gamma{}^\alpha + R_{\alpha\beta}{}^{\lambda\mu}\Big({}^{(4)}U_\lambda{}^\alpha - \frac{{}^{(4)}U_1}{4}\delta_\lambda{}^\alpha\Big)\Big({}^{(4)}U_\mu{}^\beta - \frac{{}^{(4)}U_1}{4}\delta_\mu{}^\beta\Big) - \frac{1}{4}\,{}^{(4)}U_1\,{}^{(6)}U_1 > 0 \tag{78}$$

или равенство

$${}^{(4)}U_\alpha{}^\gamma\,{}^{(6)}U_\gamma{}^\alpha + R_{\alpha\beta}{}^{\lambda\mu}\Big({}^{(4)}U_\lambda{}^\alpha - \frac{{}^{(4)}U_1}{4}\delta_\lambda{}^\alpha\Big)\Big({}^{(4)}U_\mu{}^\beta - \frac{{}^{(4)}U_1}{4}\delta_\mu{}^\beta\Big) - \frac{1}{4}\,{}^{(4)}U_1\,{}^{(6)}U_1 = 0. \tag{79}$$

Предположим сначала, что выполняется неравенство (78). Тогда мы можем получить из (76) выражения для $\Omega_\alpha{}^\delta$ в виде вещественных функций от $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ и $g^{\lambda\mu}$. Пользуясь (61), получаем следующее необходимое условие для риманова пространства класса I:

$$16p_5{}^2R_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta} = \Big(R_{\alpha\lambda\mu}{}^{\gamma}\,{}^{(4)}U^{\lambda\mu} - {}^{(6)}U_\alpha{}^\gamma - \frac{1}{4}{}^{(4)}U_1R_\alpha{}^\gamma\Big)\Big(R_{\beta\nu\sigma}{}^{\delta}\,{}^{(4)}U^{\nu\sigma} - {}^{(6)}U_\beta{}^\delta - \frac{1}{4}{}^{(4)}U_1R_\beta{}^\delta\Big) - \Big(R_{\alpha\lambda\mu}{}^{\delta}\,{}^{(4)}U^{\lambda\mu} - {}^{(6)}U_\alpha{}^\delta - \frac{1}{4}{}^{(4)}U_1R_\alpha{}^\delta\Big)\Big(R_{\beta\nu\sigma}{}^{\gamma}\,{}^{(4)}U^{\nu\sigma} - {}^{(6)}U_\beta{}^\gamma - \frac{1}{4}{}^{(4)}U_1R_\beta{}^\gamma\Big), \tag{80}$$

причем $p_5{}^2$ находится из равенства (77) и

$${}^{(4)}U_1 = -\frac{1}{6}(Q_2 - 4R_2 + R_1^2).$$

Займемся теперь вопросом получения достаточных условий для того, чтобы n-мерное риманово пространство, для которого справедливы равенство (67) и неравенство (78), имело класс I. Предположим, что для этого пространства выполнены равенства (80), где p_5 выражается указанным образом через $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ и $g^{\lambda\mu}$. Определяя тензор $\Omega_\alpha{}^\delta$ с помощью равенств (76) и вводя дополнительное условие

$${}^{(6)}U_{\alpha\beta} = {}^{(6)}U_{\beta\alpha}, \tag{81}$$

приходим к равенствам (61). Иначе говоря, существует симметричный тензор $\Omega_{\alpha\beta}$, удовлетворяющий уравнениям Гаусса, а так как $p_5 \neq 0$, то ранг матрицы $\| \Omega_{\alpha\beta} \|$ не меньше пяти, и уравнения Кодацци являются следствиями уравнений Гаусса. Итак, справедлива следующая

ТЕОРЕМА 6. *Если для n-мерного риманова пространства с положительно определенной фундаментальной квадратичной формой справедливо неравенство* (78), *то равенства* (80) *и* (81) *выражают необходимые и достаточные условия для того, чтобы это пространство имело класс* I.

Заметим, что уравнения (80) имеют шестую степень относительно составляющих тензора кривизны, уравнения (81) — третью степень.

При выводе этой теоремы мы не пользовались равенством $p_3 = 0$. Следовательно, она справедлива независимо от существования этого равенства. Но так как уравнения (68) имеют четвертую степень относительно $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$, то результатами последней теоремы будем пользоваться лишь в том случае, когда равенство (67) имеет место.

Случай третий: $p_3 = 0,\ p_5 = 0,\ p_1 p_4 \neq 0$.

Предположим, что для некоторого n-мерного риманова пространства с положительно определенной фундаментальной квадратичной формой выполняются одновременно равенства (67) и (79). Допустим сначала, что пространство имеет класс I. В таком случае $p_3 = p_5 = 0$. Из уравнения (17), полагая $k = 3$, находим

$$R_\alpha^{\ \beta}\, R_\beta^{\ \mu}\left(R_\mu^{\ \alpha} - \frac{R_1}{2}\delta_\mu^{\ \alpha}\right) = (2p_2 - 3p_1^2)p_4 - 6p_6.$$

Следовательно,

$$p_1^2\, p_4 = \frac{1}{3}\left({}^{(6)}U_1 + \frac{1}{4}R_1\ {}^{(4)}U_1 - R_3 + \frac{R_1 R_2}{2}\right). \tag{82}$$

Предполагаем, что

$${}^{(6)}U_1 + \frac{1}{4}R_1\ {}^{(4)}U_1 - R_3 + \frac{R_1 R_2}{2} \neq 0. \tag{83}$$

Для n-мерного риманова пространства класса I справедливы следующие равенства:

$${}^{(4)}U_\alpha^{\ \gamma} R_\gamma^{\delta} = (\Omega_{\alpha\cdot\cdot\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\gamma} + p_1 \Omega_{\alpha\cdot\cdot}^{\cdot\cdot\gamma} + p_2 \Omega_{\alpha\cdot}^{\cdot\gamma} + p_3 \Omega_\alpha^{\ \gamma})(\Omega_{\gamma\cdot}^{\cdot\delta} + p_1 \Omega_\gamma^{\ \delta}) =$$

$$= \Omega_{\alpha\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\delta} + 2p_1 \Omega_{\alpha\cdot\cdot\cdot\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\cdot\delta} + (p_2 + p_1^2)\Omega_{\alpha\cdot\cdot\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\delta} + (p_3 + p_1 p_2)\,\Omega_{\alpha\cdot\cdot}^{\cdot\cdot\delta} + p_1 p_3 \Omega_{\alpha\cdot}^{\cdot\delta};$$

$$R_\gamma^{\ \mu}\ R_\mu^{\ \nu}\ R_{\nu\alpha}^{\ \ \delta\gamma} = R_{\gamma\cdot}^{\cdot\nu}\ R_{\nu\alpha}^{\ \ \delta\gamma} =$$

$$= (\Omega_{\gamma\cdot\cdot\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\nu} + 2p_1 \Omega_{\gamma\cdot\cdot}^{\cdot\cdot\nu} + p_1^2 \Omega_{\gamma\cdot}^{\cdot\nu})\,(\Omega_\nu^{\ \delta}\ \Omega_\alpha^{\ \gamma} - \Omega_\nu^{\ \gamma}\ \Omega_\alpha^{\ \delta}) =$$

$$= \Omega_{\alpha\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\delta} + 2p_1 \Omega_{\alpha\cdot\cdot\cdot\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\cdot\delta} + p_1^2 \Omega_{\alpha\cdot\cdot\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\delta} - (\Omega_5 + 2p_1\Omega_4 + p_1^2\Omega_3)\Omega_\alpha^{\ \delta}.$$

Следовательно,

$${}^{(4)}U_\alpha^{\ \gamma}\ R_\gamma^{\ \delta} - R_{\gamma\cdot}^{\cdot\nu}\ R_{\nu\alpha}^{\ \ \delta\gamma} = p_2 \Omega_{\alpha\cdot\cdot\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\delta} + (p_3 + p_1 p_2)\Omega_{\alpha\cdot\cdot}^{\cdot\cdot\delta} + p_1 p_3 \Omega_{\alpha\cdot}^{\cdot\delta} -$$

$$- (p_2\Omega_3 + p_3\Omega_2 + p_4\Omega_1 + 5p_5 + p_1 p_2 \Omega_2 + p_1 p_3 \Omega_1 + 4p_1 p_4)\Omega_\alpha^{\ \delta}.$$

При $p_3 = p_5 = 0$ имеем

$$ {}^{(4)}U_\alpha^{\ \gamma} R_\gamma^{\ \delta} - R_{\gamma\cdot}^{\ \cdot\nu} R_{\nu\alpha}^{\ \ \delta\gamma} = p_2({}^{(4)}U_\alpha^{\ \delta} - p_2\Omega_{\alpha\cdot}^{\ \cdot\delta}) - (3p_1p_4 + p_1p_2^2)\,\Omega_\alpha^{\ \delta} = $$
$$ = -\frac{1}{2}R_1\ {}^{(4)}U_\alpha^{\ \delta} - \frac{R_1^2}{4}R_\alpha^{\ \delta} - 3p_1p_4\Omega_\alpha^{\ \delta}. $$

В результате

$$ p_1p_4\Omega_\alpha^{\ \delta} = -\frac{1}{3}\left[{}^{(4)}U_\alpha^{\ \gamma}R_\gamma^{\ \delta} - R_{\gamma\cdot}^{\ \cdot\nu}R_{\nu\alpha}^{\ \ \delta\gamma} + \frac{1}{2}R_1{}^{(4)}U_\alpha^{\ \delta} + \frac{R_1^2}{4}R_\alpha^{\ \delta}\right]. \tag{84} $$

Так как $p_4 = \frac{1}{24}(Q_2 - 4R_2 + R_1^2)$, то

$$ p_1^2p_4^2 = \frac{1}{72}(Q_2 - 4R_2 + R_1^2)\left({}^{(6)}U_1 + \frac{1}{4}R_1\ {}^{(4)}U_1 - R_3 + \frac{R_1R_2}{2}\right). \tag{85} $$

Очевидно, первая часть этого равенства не может быть отрицательной. Так как мы предположили справедливость неравенства (83), то

$$ (Q_2 - 4R_2 + R_1^2)\left({}^{(6)}U_1 + \frac{1}{4}R_1\ {}^{(4)}U_1 - R_3 + \frac{R_1R_2}{2}\right) > 0. \tag{86} $$

Из (84), (85) и (61) следует, что

$$ (Q_2 - 4R_2 + R_1^2)\left({}^{(6)}U_1 + \frac{1}{4}R_1\ {}^{(4)}U_1 - R_3 + \frac{R_1R_2}{2}\right)R_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma\delta} = $$
$$ = 8\left[{}^{(4)}U_\alpha^{\ \mu} R_\mu^{\ \gamma} - R_{\mu\cdot}^{\ \cdot\nu} R_{\nu\alpha}^{\ \ \gamma\mu} + \frac{1}{2}R_1{}^{(4)}U_\alpha^{\ \gamma} + \frac{R_1^2}{4}R_\alpha^{\ \gamma}\right]\left[{}^{(4)}U_\beta^{\ \lambda} R_\lambda^{\ \delta} - \right. $$
$$ \left. - R_{\lambda\cdot}^{\ \cdot\sigma} R_{\sigma\beta}^{\ \ \delta\lambda} + \frac{1}{2}R_1{}^{(4)}U_\beta^{\ \delta} + \frac{R_1^2}{4}R_\beta^{\ \delta}\right] - \left[{}^{(4)}U_\alpha^{\ \mu} R_\mu^{\ \delta} - R_{\mu\cdot}^{\ \cdot\nu}R_{\nu\alpha}^{\ \ \delta\mu} + \right. $$
$$ \left. + \frac{1}{2}R_1{}^{(4)}U_\alpha^{\ \delta} + \frac{R_1^2}{4}R_\sigma^{\ \delta}\right]\left[{}^{(4)}U_\beta^{\ \lambda} R_\lambda^{\ \gamma} - R_{\lambda\cdot}^{\ \cdot\sigma}R_{\sigma\beta}^{\ \ \gamma\lambda} + \frac{1}{2}R_1{}^{(4)}U_\beta^{\ \gamma} + \frac{R_1^2}{4}R_\beta^{\ \gamma}\right]. \tag{87} $$

Эти равенства выражают необходимые условия для того, чтобы n-мерное риманово пространство, для которого $p_3 = p_5 = 0$, имело класс I.

Предположим теперь, что для некоторого n-мерного риманова пространства с положительно определенной фундаментальной квадратичной формой выполняются равенства (67), (79) и (87) и неравенство (86). Поставим дополнительное условие

$$ {}^{(4)}U_\alpha^{\ \lambda} R_{\lambda\beta} = {}^{(4)}U_\beta^{\ \lambda} R_{\lambda\alpha}. \tag{88} $$

В таком случае можно определить с помощью равенств (84) симметричный тензор $\Omega_{\alpha\beta}$ [p_1p_4 находим из (85) с точностью до знака]. Из (84), (85) и (87) следуют уравнения (61), т. е. тензор удовлетворяет уравнениям Гаусса. Так как $p_1p_4 \neq 0$, то ранг матрицы $\|\Omega_{\alpha\beta}\|$ не меньше 4 и уравнения Кодацци являются следствиями уравнений Гаусса. Таким образом, установлена справедливость следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 7. *Если для n-мерного риманова пространства с положительно определенной фундаментальной квадратичной формой справедливы равенства* (67) *и* (79) *и неравенство* (86), *то уравнения* (87) *и* (88) *выражают необходимые и достаточные условия для того, чтобы это пространство имело класс* I.

Заметим, что уравнения (87) имеют шестую степень относительно составляющих тензора кривизны, равенства (88) — третьей степени.

Конечно, применение равенств (87) можно оставить на тот случай, когда все p_s с нечетными значками, бо́льшими единицы, равны нулю. В ином случае можно получить необходимые и достаточные условия для риманова пространства класса I, исходя из равенств (63), полагая $k=8,\ 10,\dots$ Но тогда эти условия будут даны уравнениями более высокой степени.

Случай четвертый: $p_3 = p_5 = p_1 p_4 = 0;\ p_4 \neq 0$.

Предположим, что для n-мерного риманова пространства класса I выполняются равенства (67) и (79) и

$$^{(6)}U_1 + \frac{1}{4} R_1\ ^{(4)}U_1 - R_3 + \frac{R_1 R_2}{2} = 0. \tag{89}$$

Иначе говоря, $p_3 = p_5 = p_1 p_4 = 0$. Предполагаем, что $p_4 \neq 0$, т. е.

$$Q_2 - 4R_2 + R_1{}^2 \neq 0. \tag{90}$$

В таком случае $p_1 = 0$, т. е. пространство минимальное. Для такого пространства справедливы равенства

$$\Omega_{\alpha\beta}\Omega_{\gamma\delta} = N_{\alpha\beta;\gamma\delta}, \tag{91}$$

где

$$N_{\alpha\beta;\gamma\delta} = \frac{3}{2(Q_2 - 4R_2 + R_1{}^2)} [R_{\alpha\lambda\mu\beta}\ ^{(4)}W_\gamma{}^{\lambda\mu}{}_\delta + R_{\gamma\lambda\mu\delta}\ ^{(4)}W_\alpha{}^{\lambda\mu}{}_\beta -$$
$$- 4R_1 R_{\alpha\lambda\mu\beta} R_\gamma{}^{\lambda\mu}{}_\delta + 6R_1 R_{\alpha\gamma} R_{\beta\delta} - 8R_{\beta\lambda\mu\alpha} R^{\nu\lambda\mu\sigma} R_{\nu\gamma\delta\sigma} + 4R_\alpha{}^\lambda\ R_\delta{}^\mu\ R_{\lambda\mu\gamma\beta} +$$
$$+ 2\,(R_\sigma{}^{\cdot}{}_{\cdot\beta} R_{\gamma\delta} + R_{\alpha\beta} R_\gamma{}^{\cdot}{}_{\cdot\delta}) - 4\,(R_\alpha{}^{\cdot}{}_{\cdot\gamma} R_{\beta\delta} + R_{\alpha\gamma} R_\beta{}^{\cdot}{}_{\cdot\delta})]. \tag{92}$$

Из (61) следует, что для риманова пространства класса I с вышеуказанными свойствами выполняются равенства

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = N_{\alpha\gamma;\beta\delta} - N_{\alpha\delta;\beta\gamma}. \tag{93}$$

Тензор $N_{\alpha\beta;\gamma\delta}$, как видно из (91), удовлетворяет равенствам

$$N_{\alpha\beta;\gamma\delta} = N_{\beta\alpha;\gamma\delta} = N_{\alpha\beta;\delta\gamma} = N_{\gamma\delta;\alpha\beta}. \tag{94}$$

Кроме того,

$$N_{\alpha\beta;\alpha\beta} \geqslant 0. \tag{95}$$

Рассмотрим матрицу $\frac{n(n+1)}{2}$-порядка $\|N_{\alpha\beta;\gamma\delta}\|$; каждый ее элемент соответствует некоторой системе значений пар α,β и γ,δ. Из (91) следует, что ранг этой матрицы равен единице. Это свойство матрицы, а также выражения (93), (94), (95) представляют необходимые условия для такого риманова пространства класса I, для которого $p_1 = p_3 = p_5 = 0;\ p_4 \neq 0$.

Предположим теперь, что для некоторого риманова пространства n измерений ($n \geqslant 4$) с положительно определенной фундаментальной квадратичной формой выполняются равенства (67), (79), (89) и неравенство (90). Предполагаем, кроме того, что тензор $N_{\alpha\beta;\gamma\delta}$, определенный равенством (92), удовлетворяет (93), (94) и (95) и ранг матрицы $\|N_{\alpha\beta;\gamma\delta}\|$, составленной выше указанным образом, равен единице*.

---

* Это свойство матрицы будем называть кратко свойством (*).

В таком случае, как известно, тензор $N_{\alpha\beta;\gamma\delta}$ можно представить согласно формуле (91). $\Omega_{\alpha\beta}$ являются составляющими симметричного тензора 2-го ранга и определены с точностью до знака. Действительно, так как ранг матрицы $\|N_{\alpha\beta;\gamma\delta}\|$ равен единице (а не нулю), то для какой-то комбинации значков α,β, $N_{\alpha\beta;\alpha\beta}>0$. Следовательно,

$$\Omega_{\alpha\beta}=\pm\sqrt{N_{\alpha\beta;\alpha\beta}};\quad \Omega_{\gamma\delta}=\frac{N_{\alpha\beta;\gamma\delta}}{\pm\sqrt{N_{\alpha\beta;\alpha\beta}}}. \tag{96}$$

Из (91) и (93) следует справедливость уравнений Гаусса. Так как* $p_4\neq 0$, то уравнения Кодацци являются следствиями уравнений Гаусса. Итак, справедлива следующая

ТЕОРЕМА 8. *Если для n-мерного риманова пространства с положительно определенной фундаментальной квадратичной формой выполняются равенства* (67), (79) *и* (89) *и неравенство* (90), *то* (93), (94) *и* (95), *а также свойство* (*) *матрицы* $\|N_{\alpha\beta;\gamma\delta}\|$, *составленной, как указано выше, являются необходимыми и достаточными условиями для того, чтобы это пространство имело класс* I. *Тензор* $N_{\alpha\beta;\gamma\delta}$ *определяется равенством* (92).

Заметим, что уравнения, выражающие свойство (*), имеют шестую степень относительно составляющих тензора кривизны, равенства (93) и (94) — третьей степени.

Случай пятый: $p_3=p_4=0$

Предположив, что для риманова пространства с положительно определенной фундаментальной квадратичной формой, имеющего класс I, справедливы равенства (67) и $Q_2-4R_2+R_1^2=0$, т. е. $p_3=p_4=0$. Рассмотрим два случая.

1° Есть какое-то p_k, где $k>4$, не равное нулю. Но $p_1, p_2, \ldots, p_n$ являются коэффициентами алгебраического уравнения, корни которого — главные нормальные кривизны пространства. На основании теоремы: если в уравнении имеется пропуск числа членов более одного, то уравнение имеет наверно мнимые корни, — мы можем заключить, что не все главные нормальные кривизны вещественны. Как известно, это не может быть в случае положительно определенной первой фундаментальной формы. Итак, случай 1° не имеет места.

2°. $p_3=p_4=\ldots=p_n=0$. В этом случае, как известно, ранг матрицы $\|\Omega_{\alpha\beta}\|$ не больше 2**. Если он равен единице или нулю, то пространство эвклидово и класс его равен нулю. Поэтому мы должны предполагать, что $p_2=-\frac{1}{2}R_1$ не равно нулю.

** Ранг матрицы $\|\Omega_{\alpha\beta}\|$ не меньше 4.

** Итак, тот случай, когда ранг второй фундаментальной квадратичной формы больше 2, разобран полностью.

Задача отыскания необходимых и достаточных условий для того, чтобы n-мерное риманово пространство с положительно определенной фундаментальной квадратичной формой, для которого выполняются одновременно равенства (67) и $Q_2 - 4R_2 + R_1^2 = 0$ и $R_1 \neq 0$, имело класс I, как указано на стр. 325, будет рассмотрена в отдельной статье.

Ленинградский Политехнический институт им. М. И. Калинина

Поступило 28 I 1941

ЛИТЕРАТУРА

[1] Розенсон Н. А., О римановых пространствах класса I, Известия Акад. Наук СССР, серия матем., 4 (1940), 181—192.
[2] Weise K. H., Beiträge zum Klassenproblem der quadratischen Differentialformen, Mathem. Ann., 110 (1935), H. 4, 522—570.
[3] Thomas T. Y., Riemann spaces of classe one and their characterization, Acta Mathem., 1936, 169—211.
[4] Eisenhart L. P., Riemannian Geometry, Princeton, 1926.
[5] Voss A., Zur Theorie der Transformation quadratisther Differentialausdrücke und der Krümmung höherer Mannigfaltigkeiten, Mathem. Ann., 16 (1880), 129—179.
[6] Levi-Civita T., Der absolute Differentialkalkül, Berlin, 1928.

N. ROSENSON. SUR LES ESPACES RIEMANNIENS DE CLASSE I. SECONDE PARTIE

RÉSUMÉ

Nous adoptons dans ce mémoire les notations employées dans l'article «Sur les espaces Riemanniens de classe I», publié dans le Bulletin de l'Académie des Sciences de l'URSS, 4 (1940), 181—192, dont le présent article est une suite directe. On trouve dans l'ouvrage mentionné des formules qui expriment les p_s — invariants simultanés des deux formes quadratiques d'un espace de Riemann à n dimensions de classe I, où s est un nombre pair, au moyen des composantes du tenseur de Riemann et du tenseur métrique.

Il s'agit dans le present mémoire des questions suivantes:

1. Nous donnons des expressions pour les p_s dans le cas où s est impair.

2. On envisage, en s'appuyant sur ces formules, les propriétés particulières de quelques espaces Riemanniens à n dimensions de classe I, dont les composantes du tenseur métrique et du tenseur de courbure satisfont à certaines équations invariantes.

3. On trouve les conditions nécessaires et suffisantés pour qu'un espace Riemannien à n dimensions soit de classe I; ces conditions présentent des equations tensorielles du quatrième degré par rapport à $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ dans le cas général, du sixième degré — dans le cas exceptionnel.

Nous supposons que le rang de la deuxième forme quadratique est au moins trois. Le cas contraire sera l'objet d'un article particulier.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADEMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 5(1941), 353—368 Série mathématique

Б. А. РОЗЕНФЕЛЬД

ВНУТРЕННЯЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОЖЕСТВА m-МЕРНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ n-МЕРНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

Вводится метрика в множество m-мерных плоскостей n-мерного эллиптического пространства. Доказывается, что полученное риманово пространство является симметрическим. Находятся геодезические линии, эвклидовы подпространства и внутренние метрические инварианты этого пространства.

Будем называть проективное или эллиптическое пространство n-кратным, если оно является $(n-1)$-мерным. Рассмотрим n-кратное эллиптическое пространство R^n кривизны 1, которое можно представить себе как сферу единичного радиуса с отождествленными диаметрально противоположными точками в n-мерном эвклидовом пространстве E^n.

Введем в пространстве E^n ортонормированный векторный базис с полюсом в центре нашей сферы и будем характеризовать каждую точку x пространства R^n n числами x^i — координатами единичного вектора $\mathbf{x}$ в E^n — радиуса-вектора точки x. Концы векторов базиса лежат на нашей сфере, т. е. в R^n, и образуют там систему вершин автополярного симплекса. Расстояние ω между точками x и y пространства R^n определяется скалярным произведением их радиусов-векторов $\mathbf{xy}$, которое мы будем называть также «скалярным произведением точек x и y» (и векторные обозначения x и y жирным шрифтом применять не будем):

$$\cos\omega = xy = \sum_{i=1}^{n} x^i y^i. \tag{1}$$

В частности

$$xx = \sum_{i=1}^{n} x^{i^2} = 1. \tag{2}$$

Во всякой m-кратной плоскости p в R^n мы можем выбрать m взаимно ортогональных точек $x_1, x_2, \ldots, x_m$ ($x_\alpha x_\beta = 0$, если $\alpha \neq \beta$; индексы, изменяющиеся от 1 до n, мы будем обозначать строчными латинскими буквами; индексы, изменяющиеся от 1 до m, — греческими буквами

из начала алфавита). Такую плоскость можно характеризовать числами

$$p^{i_1 i_2 \ldots i_m} = x_1^{[i_1} x_2^{i_2} \ldots x_m^{i_m]}, \tag{3}$$

где квадратные скобки обозначают альтернирование индексов. В случае m-кратных плоскостей в R^n число независимых величин такого рода (т. е. с различными абсолютными величинами) равно $N = \binom{n}{m}$. Эти числа, обычно называемые **плюккеровыми координатами** плоскости, являются компонентами антисимметричного тензора (поливектора) m-й валентности — так называемого m-вектора.

Для изучения таких тензоров полезно рассматривать N-кратное проективное пространство R^N, каждой точке которого, имеющей N однородных координат x^I (индексы, изменяющиеся от 1 до N, будем обозначать прописными латинскими буквами), можно поставить в соответствие m-вектор $p^{i_1 i_2 \ldots i_m}$, имеющий тоже N независимых компонент. Это соответствие можно установить, например, таким образом. Если координаты точек пространства R^n были нормированы по формуле (2), то легко проверить, что компоненты m-векторов, составленных с помощью этих нормированных координат, удовлетворяют условию

$$\frac{1}{m!} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_m} p^{i_1 \ldots i_m} p^{i_1 \ldots i_m} = \sum_{(i_1, \ldots, i_m)} p^{i_1 \ldots i_m^2} = 1 \tag{4}$$

(второе суммирование производится по сочетаниям).

С другой стороны, координаты точек пространства R^n можно нормировать, например, условием $\sum_{I=1}^{N} x^{I^2} = 1$. Тогда, перенумеровав в каком-нибудь порядке независимые компоненты m-вектора от 1 до N, будем ставить в соответствие этому m-вектору такую точку пространства R^N, которая имеет соответственно равные нормированные однородные координаты.

Условие того, что m-вектор $p^{i_1 \ldots i_m}$ представим в виде (3) (в таком случае m-вектор называется **простым**), записывается, как известно ([1]), системой уравнений

$$p^{[i_1 i_2 \ldots i_m} p^{j_1] j_2 \ldots j_m} = 0. \tag{5}$$

Среди этих уравнений имеется $\binom{n}{m} - m(n-m) - 1$ независимых. Следовательно, при отображении m-векторов в точки пространства R^N простые m-векторы изображаются точками $m(n-m)$-мерной поверхности, которая, как это видно из уравнения (5), является пересечением ряда гиперповерхностей 2-го порядка. Эту поверхность мы будем называть **многообразием** P_m^n.

В пространство R^N и тем самым в многообразие P_m^n и в множество m-кратных плоскостей пространства R^n легко ввести метрику, естественным образом связанную с метрикой в R^n. Для этого определим скалярное произведение двух m-векторов p и q с компонентами $p^{i_1 \ldots i_m}$ и $q^{i_1 \ldots i_m}$

(координаты соответственных точек пространства R^N пусть будут p^I и q^J) по формуле

$$pq = \sum_{I=1}^{N} p^I q^I = \sum_{(i_1, \ldots, i_m)} p^{i_1 \ldots i_m} q^{i_1 \ldots i_m} = \frac{1}{m!} \sum_{i_1, \ldots, i_m} p^{i_1 \ldots i_m} q^{i_1 \ldots i_m}. \tag{6}$$

Легко проверить, что определенное таким образом скалярное произведение не больше 1 и всяким двум m-векторам p и q можно поставить в соответствие положительное число ω такое, что

$$\cos \omega = pq. \tag{7}$$

Это число ω мы будем называть **расстоянием** между точками p и q пространства R^N (соответствующими m-векторам p и q). Легко видеть, что полученная метрика — эллиптическая, кривизны 1. Следовательно, метризованное пространство R^N можно тоже представлять себе как сферу единичного радиуса с отождествленными диаметрально противоположными точками в N-мерном эвклидовом пространстве E^N.

Расстояние ω между точками p и q, лежащими в многообразии P_m^n (соответствующие m-векторы простые), тесно связано с инвариантами тех m-кратных плоскостей пространства R^n, которые изображаются этими точками. Будем называть эти плоскости тоже p и q. У этих плоскостей всегда можно найти m общих перпендикуляров (часть из которых может иметь длину, равную нулю), являющихся непересекающимися ребрами автополярного симплекса в R^n. Каждое из оснований одного из этих перпендикуляров ортогонально основаниям всех других перпендикуляров.

Пусть основание α-го общего перпендикуляра на плоскости p имеет координаты $x_\alpha^{i_\alpha}$, основание этого перпендикуляра на плоскости q имеет координаты $y_\alpha^{i_\alpha}$, длина этого перпендикуляра пусть равна ω_α, $\sum_{i_\alpha=1}^{n} x_\alpha^{i_\alpha} y_\alpha^{i_\alpha} = \cos \omega_\alpha$. Если плюккеровы координаты плоскостей p и q есть $p^{i_1 \ldots i_m} = x_1^{[i_1} x_2^{i_2} \ldots x_m^{i_m]}$, $q^{j_1 \ldots j_m} = y_1^{[j_1} y_2^{j_2} \ldots y_m^{j_m]}$, то, очевидно,

$$\begin{aligned} pq &= \frac{1}{m!} \sum_{i_1, \ldots, i_m} p^{i_1 \ldots i_m} q^{i_1 \ldots i_m} = \frac{1}{m!} \sum_{i_1, \ldots, i_m} x_1^{[i_1} x_2^{i_2} \ldots x_m^{i_m]} y_1^{[i_1} y_2^{i_2} \ldots y_m^{i_m]} = \\ &= \sum_{(i_1, \ldots, i_m)} x_1^{[i_1} x_2^{i_2} \ldots x_m^{i_m]} y_1^{i_1} y_2^{i_2} \ldots y_m^{i_m} = \\ &= \Big(\sum_{i_1} x_1^{i_1} y_1^{i_1} \Big) \Big(\sum_{i_2} x_2^{i_2} y_2^{i_2} \Big) \ldots \Big(\sum_{i_m} x_m^{i_m} y_m^{i_m} \Big) + \ldots \end{aligned} \tag{8}$$

Все слагаемые, кроме первого, равны нулю, так как в первом члене исчерпаны все скалярные произведения неортогональных точек. Следовательно, (8) может быть переписано так:

$$\cos \omega = \cos \omega_1 \cos \omega_2 \ldots \cos \omega_m. \tag{9}$$

Введенная нами метрика в многообразии P^n_m является обобщением введенной в 1938 г. А. П. Норденом [2] метрики в многообразии P^4 (множество прямых в трехмерном пространстве). Для $n=4$, $m=2$ А. П. Норденом был получен частный случай формулы (9). Эллиптическая метрика в R^N индуцирует некоторую риманову метрику в многообразии P^n_m. Изучение этой римановой метрики и составляет цель настоящей работы.

Многообразие P^n_m допускает прямолинейные образующие. Г. Б. Гуревичем [3] доказано, что условие (5) может быть переписано так:

$$p^{[i_1 i_2 \cdots i_m} p^{j_1 j_2] j_3 \cdots j_m} = 0.$$

Условие того, что m-вектор $\lambda p + \mu q$, где p и q — простые m-векторы, есть снова простой, очевидно выражается так:

$$(\lambda p^{[i_1 i_2 \cdots i_m} + \mu q^{[i_1 i_2 \cdots i_m})(\lambda p^{j_1 j_2] j_3 \cdots j_m} + \mu q^{j_1 j_2] j_3 \cdots j_m}) = 0, \tag{10}$$

т. е., так как p и q просты,

$$p^{[i_1 i_2 \cdots i_m} q^{j_1 j_2] j_3 \cdots j_m} = 0, \tag{11}$$

а это условие, как известно [1], есть условие того, что плоскости p и q пересекаются по $(m-1)$-кратной плоскости. Следовательно, прямолинейные образующие многообразия P^n_m изображают пучки m-кратных плоскостей. Многообразие P^n_m допускает линейные образы и более высокой размерности. Задача об их отыскании эквивалентна задаче об условиях простоты линейных комбинаций простых m-векторов.

Фундаментальное значение для последующего имеет понятие гипергеликоидальных последовательностей m-кратных плоскостей в R^n (гипергеликоиды) и изображающих их в многообразии P^n_m гипергеликоидальных линий. Такую последовательность можно провести через любую пару m-кратных плоскостей.

Рассмотрим пару плоскостей p и q и выберем опять m общих перпендикуляров, являющихся непересекающимися ребрами автополярного симплекса в R^n. Пусть основаниями этих перпендикуляров на плоскости p будут точки $x_1, \ldots, x_m$, на плоскости q — точки $y_1, \ldots, y_m$. Будем записывать выражения типа (3) сокращенно в виде

$$p = [x_1 \ldots x_m]. \tag{12}$$

Тогда текущую плоскость гипергеликоида мы определим вектором

$$r = [\lambda_1 x_1 + \mu_1 y_1,\ \lambda_2 x_2 + \mu_2 y_2, \ldots, \lambda_m x_m + \mu_m y_m], \tag{13}$$

где числа λ_α и μ_α подобраны так, что расстояния от x_α до $\lambda_\alpha x_\alpha + \mu_\alpha y_\alpha$ относятся между собой так же, как расстояния от x_α до y_α.

Наша система перпендикуляров будет, очевидно, служить системой перпендикуляров для любой плоскости этой последовательности. Эти общие перпендикуляры будем называть осями гипергеликоида.

Если две плоскости гипергеликоида имеют длины общих перпендикуляров $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$, то число

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \ldots + \omega_m^2} \tag{14}$$

будем называть длиной гипергеликоида между этими плоскостями, а числа

$$k_1 = \frac{\omega_1}{\omega},\ k_2 = \frac{\omega_2}{\omega}, \ldots, k_m = \frac{\omega_m}{\omega} \tag{15}$$

—компонентами вектора-параметра гипергеликоида. Вектор-параметр, очевидно, один и тот же для любой пары плоскостей гипергеликоида. Точки пересечения каждой плоскости гипергеликоида с его осями будем называть горловыми точками гипергеликоида для этой плоскости, а гиперплоскости, полярные точкам пересечения осей гипергеликоида с полярной $(n-m)$-кратной плоскостью к данной плоскости гипергеликоида, — горловыми гиперплоскостями для этой плоскости. Для случая $m=2$ гипергеликоид, очевидно, обращается в обычный прямолинейный геликоид, а отношение компонент вектора-параметра в этом случае — в обычный параметр геликоида.

Через две m-кратные плоскости можно провести бесконечное множество гипергеликоидов, но через две достаточно близкие m-кратные плоскости (у которых все $\omega_i < \frac{\pi}{2}$) можно провести единственный гипергеликоид минимальной длины ω. Следовательно, гипергеликоид вполне определяется указанием одной из его плоскостей, горловых точек и гиперплоскостей этой плоскости и вектор-параметра. Гипергеликоид, составленный из m-кратных плоскостей, целиком лежит в $2m$-кратном пространстве.

Чтобы рассмотреть все гипергеликоиды, проходящие через одну m-кратную плоскость p в R^n, выберем базисные точки этого пространства так, чтобы $e_1, e_2, \ldots, e_m$ лежали в этой плоскости, а $e_{m+1}, e_{m+2}, \ldots, e_n$ — в полярной ей плоскости $\bar{p}$. Произвольный гипергеликоид, проходящий через плоскость p, имеет в этой плоскости горловые точки $i_1, i_2, \ldots, i_m$, выражающиеся через $e_1, e_2, \ldots, e_m$:

$$i_\alpha = i_\alpha^\beta e_\beta, \tag{16}$$

где i_α^β — квадратная m-рядная ортогональная матрица (знак суммирования мы здесь опускаем). Полюсы $j_1, j_2, \ldots, j_m$ горловых плоскостей этого геликоида относительно плоскости p, очевидно, находятся в плоскости $\bar{p}$ и выражаются через точки $e_{m+1}, \ldots, e_n$:

$$j_\alpha = j_\alpha^\lambda e_{m+\lambda}, \tag{17}$$

где j_α^λ — прямоугольная матрица с m строками и $n-m$ столбцами, представляющая собою систему первых m строк $(n-m)$-рядной ортогональной матрицы (индексы, изменяющиеся от 1 до $n-m$, будем обозначать греческими буквами из середины алфавита). Матрицы i_α^β и

j_α^λ будем называть горловыми матрицами гипергеликоида. Среди m^2 элементов матрицы i_α^β, как легко подсчитать, имеется $\frac{m(m-1)}{2}$ независимых, среди $m(n-m)$ элементов матрицы j_α^λ число независимых равно $\frac{m(2n-3m-1)}{2}$.

Если общие перпендикуляры плоскостей p и q пересекаются с плоскостью p в точках $i_1, i_2, \ldots, i_m$, а с плоскостью $\bar{p}$ — в точках $j_1, j_2, \ldots, j_m$, длины же этих общих перпендикуляров равны $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$, то, определив длину ω и вектор-параметр k_α по формулам (14) и (15), мы найдем выражение для текущей плоскости гипергеликоида, проходящего через плоскости p и q, в виде

$$r = [i_1^\beta e_\beta \cos k_1\omega + j_1^\lambda e_{m+\lambda} \sin k_1\omega, \ldots, i_m^\beta e_\beta \cos k_m\omega + j_m^\lambda e_{m+\lambda} \sin k_m\omega]. \quad (18)$$

Всего, очевидно, через плоскость p можно провести множество гипергеликоидов, зависящее от

$$\frac{m(m-1)}{2} + \frac{m(2n-3m-1)}{2} + m - 1 = m(n-m) - 1$$

параметров, что вполне согласуется с тем, что в R^n имеется $\infty^{m(n-m)}$ различных m-кратных плоскостей.

Базис пространства R^N состоит из $\binom{n}{m}$ m-векторов типа $[e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_m}]$. Среди этих m-векторов существует $m(n-m)$ векторов типа

$$e_{\gamma\mu} = [e_1 e_2 \ldots e_{\gamma-1} e_\mu e_{\gamma+1} \ldots e_m]. \quad (19)$$

Эти m-векторы вместе с $p = [e_1 \ldots e_m]$ образуют базис некоторой $m(n-m)$-мерной плоскости в пространстве R^N. Эта плоскость будет касательной плоскостью к P_m^n в точке p: гипергеликоид, проходящий через плоскость p и какую-нибудь из плоскостей $e_{\gamma\mu}$, по формуле (18) выражается уравнением

$$r = [e_1 e_2 \ldots e_{\gamma-1},\ \lambda_\gamma e_\gamma + \mu_\gamma e_{m+\mu},\ e_{\gamma+1} \ldots e_m],$$

т. е. этот гипергеликоид есть просто пучок m-кратных плоскостей. Следовательно, кривая, изображающая этот гипергеликоид на многообразии P_m^n, есть прямолинейная образующая этого многообразия, и значит, все прямые, соединяющие точку p с точками $e_{\gamma\mu}$ в пространстве R^N, целиком лежат на многообразии P_m^n и $m(n-m)$-мерная плоскость, которую можно провести через систему этих прямых, будет касательной к P_m^n в точке p.

К многообразию P_m^n в каждой его точке p можно провести и эвклидову $m(n-m)$-мерную касательную плоскость, лежащую в пространстве E^N, в которое пространство R^N погружено в виде сферы. Каждой базисной точке пространства R^N соответствует базисный вектор пространства E^N — радиус-вектор этой точки, в том числе и точкам $e_{\gamma\mu}$

соответствуют N-мерные эвклидовы единичные векторы $\mathbf{e}_{\gamma\mu}$. Тогда эвклидова касательная плоскость к многообразию P_m^n в точке p параллельна плоскости, определяемой векторами $\mathbf{e}_{\gamma\mu}$: прямолинейная образующая многообразия P_m^n, соединяющая точки p и $e_{\gamma\mu}$, с точки зрения пространства E^N является кругом единичного радиуса, причем точки p и $e_{\gamma\mu}$ и, следовательно, их радиусы-векторы ортогональны, так что единичный касательный эвклидов вектор к каждой из этих линий в точке p равен соответствующему вектору $\mathbf{e}_{\gamma\mu}$.

Гипергеликоиды являются геодезическими последовательностями m-кратных плоскостей при введенной нами метрике, или, что то же, гипергеликоидальные линии являются геодезическими линиями многообразия P_m^n.

В самом деле, проведем через какую-нибудь точку p многообразия P_m^n гипергеликоидальную линию, соответствующую гипергеликоиду, определяемому горловыми матрицами $i_\alpha^{\cdot\beta}$ и $j_\alpha^{\cdot\lambda}$ и вектором-параметром k_α. Текущая точка этой линии определяется формулой (18), которую мы здесь перепишем:

$$r(\omega)=[i_1 \cos k_1 \omega + j_1 \sin k_1 \omega, \ldots, i_m \cos k_m \omega + j_m \sin k_m \omega]. \tag{20}$$

Если радиус-вектор точки $r(\omega)$ в пространстве E^N есть $\mathbf{r}(\omega)$, радиусы-векторы точек $i_1, \ldots, i_m, j_1, \ldots, j_m$ в этом пространстве есть $\mathbf{i}_1, \ldots, \mathbf{i}_m$, $\mathbf{j}_1, \ldots, \mathbf{j}_m$, то касательный эвклидов вектор к этой линии в точке $r(\omega)$ есть

$$\mathbf{t}(\omega)=\frac{d\mathbf{r}(\omega)}{d\omega}=\sum_\alpha k_\alpha [\mathbf{i}_1 \cos k_1 \omega + \mathbf{j}_1 \sin k_1 \omega, \ldots, \mathbf{i}_{\alpha-1} \cos k_{\alpha-1} \omega + \mathbf{j}_{\alpha-1} \sin k_{\alpha-1} \omega,$$
$$-\mathbf{i}_\alpha \sin k_\alpha \omega + \mathbf{j}_\alpha \cos k_\alpha \omega, \ \mathbf{i}_{\alpha+1} \cos k_{\alpha+1} \omega + \mathbf{j}_{\alpha+1} \sin k_{\alpha+1} \omega,$$
$$\ldots, \mathbf{i}_m \cos k_m \omega + \mathbf{j}_m \sin k_m \omega], \tag{21}$$

вектор главной нормали к этой линии в той же точке есть

$$\mathbf{n}(\omega)=\frac{d\mathbf{t}(\omega)}{d\omega}=\sum_{\substack{\alpha,\beta\\ \alpha\neq\beta}} k_\alpha k_\beta [\mathbf{i}_1 \cos k_1 \omega + \mathbf{j}_1 \sin k_1 \omega, \ldots, \mathbf{i}_{\alpha-1} \cos k_{\alpha-1} \omega + \mathbf{j}_{\alpha-1} \sin k_{\alpha-1} \omega,$$
$$-\mathbf{i}_\alpha \sin k_\alpha \omega + \mathbf{j}_\alpha \cos k_\alpha \omega, \ \mathbf{i}_{\alpha+1} \cos k_{\alpha+1} \omega + \mathbf{j}_{\alpha+1} \sin k_{\alpha+1} \omega,$$
$$\ldots, \mathbf{i}_{\beta-1} \cos k_{\beta-1} \omega + \mathbf{j}_{\beta-1} \sin k_{\beta-1} \omega, -\mathbf{i}_\beta \sin k_\beta \omega + \mathbf{j}_\beta \cos k_\beta \omega,$$
$$\mathbf{i}_{\beta+1} \cos k_{\beta+1} \omega + \mathbf{j}_{\beta+1} \sin k_{\beta+1} \omega, \ldots, \mathbf{i}_m \cos k_m \omega + \mathbf{j}_m \sin k_m \omega] +$$
$$+\sum_\alpha k_\alpha^2 [\mathbf{i}_1 \cos k_1 \omega + \mathbf{j}_1 \sin k_1 \omega, \ldots, \mathbf{i}_{\alpha-1} \cos k_{\alpha-1} \omega + \mathbf{j}_{\alpha-1} \sin k_{\alpha-1} \omega,$$
$$-\mathbf{i}_\alpha \cos k_\alpha \omega - \mathbf{j}_\alpha \sin k_\alpha \omega, \ \mathbf{i}_{\alpha+1} \cos k_{\alpha+1} \omega +$$
$$+\mathbf{j}_{\alpha+1} \sin k_{\alpha+1} \omega, \ldots, \ \mathbf{i}_m \cos k_m \omega + \mathbf{j}_m \sin k_m \omega]. \tag{22}$$

Мы докажем, что гипергеликоидальная линия есть геодезическая, если покажем, что вектор главной нормали к этой линии в каждой

точке ортогонален к $m(n-m)$-мерной касательной эвклидовой плоскости к P_m^n (в E^N). Достаточно показать это для точки $p=r(0)$. Вектор главной нормали в этой точке имеет вид

$$\mathbf{n}(0)=\sum_{\substack{\alpha,\beta\\ \alpha\neq\beta}} k_\alpha k_\beta [\mathbf{i}_1 \ldots \mathbf{i}_{\alpha-1} \mathbf{j}_\alpha \mathbf{i}_{\alpha+1} \ldots \mathbf{i}_{\beta-1} \mathbf{j}_\beta \mathbf{i}_{\beta+1} \ldots \mathbf{i}_m]-\sum_\alpha k_\alpha^2 [\mathbf{i}_1 \ldots \mathbf{i}_m]. \quad (23)$$

Касательная эвклидова плоскость к P_m^p в точке p, как мы уже выяснили, параллельна $m(n-m)$-мерной плоскости, построенной на $m(n-m)$-векторах, за которые можно принять векторы

$$[\mathbf{i}_1 \ldots \mathbf{i}_{\gamma-1} \mathbf{j}_\mu \mathbf{i}_{\gamma+1} \ldots \mathbf{i}_m]. \quad (24)$$

Составляя скалярные произведения вектора (23) с каждым из векторов (24) [например, по формуле (8)], убеждаемся, что все эти произведения равны нулю и гипергеликоидальные линии действительно будут геодезическими.

Этот результат является обобщением известного ([4]) результата, что в множестве прямых пространства R^4 в метрике, введенной А. П. Норденом, геодезическими являются геликоиды.

Наше риманово пространство P_m^n, очевидно, допускает $\frac{n(n-1)}{2}$-членную группу, изоморфную группе эллиптических движений в R^n, которую будем называть $\mathfrak{G}^n$. Из теории полупростых непрерывных групп([5]) следует ($\mathfrak{G}^n$ является такой группой, при $n \neq 4$ она даже является простой), что группа $\mathfrak{G}^n$ должна иметь $\left[\frac{n}{2}\right]$-членные абелевы подгруппы (так называемые максимальные подгруппы нулевого ранга). Отсюда следует, что всякое риманово пространство, допускающее группу, изоморфную группе $\mathfrak{G}^n$, обладает $\left[\frac{n}{2}\right]$-мерными эвклидовыми подпространствами, в которых наша абелева подгруппа будет служить группой параллельных сдвигов. Будем называть эти $\left[\frac{n}{2}\right]$-мерные эвклидовы подпространства в многообразиях P_m^n *поверхностями* $K_m^{\left[\frac{n}{2}\right]}$. Для многообразий P_1^n, т. е. для самих эллиптических пространств R^n, эти поверхности $K_1^{\left[\frac{n}{2}\right]}$ подробно описаны в нашей заметке ([6]).

Для построения многообразий $K_m^{\left[\frac{n}{2}\right]}$ из m-кратных плоскостей в пространстве R^n возьмем в R^n систему $\left[\frac{n}{2}\right]$ прямых, служащих непересекающимися ребрами одного автополярного симплекса. Будем называть эти прямые *осями* многообразий $K_m^{\left[\frac{n}{2}\right]}$ и перенумеруем их от 1 до

$\left[\frac{n}{2}\right]$. В R^n можно выбрать ортогональные точки $e_1, e_2, \ldots, e_{2\left[\frac{n}{2}\right]}$ так, чтобы точки e_i и $e_{\left[\frac{n}{2}\right]+i}$ лежали на i-й из построенных нами осей (здесь латинские индексы будут пробегать значения от 1 до $\left[\frac{n}{2}\right]$). Тогда текущая точка i-й оси, отстоящая от e_i на расстоянии λ_i (а от $e_{\left[\frac{n}{2}\right]+i}$, следовательно, на $\frac{\pi}{2}-\lambda_i$), есть

$$e_i \cos\lambda_i + e_{\left[\frac{n}{2}\right]+i} \sin\lambda_i. \tag{25}$$

Наши оси определяют подпространство $R^{2\left[\frac{n}{2}\right]}$ в R^n. Из каждой точки этого пространства $R^{2\left[\frac{n}{2}\right]}$ можно провести одну и (если эта точка не лежит на одной из осей) только одну $\left[\frac{n}{2}\right]$-кратную плоскость, пересекающую каждую из наших осей. Каждая такая плоскость пересечет каждую из осей в одной точке. Эти плоскости составляют $\left[\frac{n}{2}\right]$-параметрическое семейство и образуют конгруенцию в $R^{2\left[\frac{n}{2}\right]}$. Если такая плоскость пересекается с i-й осью в точке (25), то произвольная ее точка есть

$$x = \sum_i \left(e_i \cos\lambda_i + e_{\left[\frac{n}{2}\right]+i} \sin\lambda_i\right) \xi^i. \tag{26}$$

Чтобы построить многообразие $K_m^{\left[\frac{n}{2}\right]}$, мы должны в каждой из $\left[\frac{n}{2}\right]$-кратных плоскостей выделить m-кратную плоскость, определенную в каждой из $\left[\frac{n}{2}\right]$-кратных плоскостей такой системой m (ортогональных) точек $x_1, \ldots, x_m$, что внутренние координаты ξ^i_α любой точки x_α из них (определяемые по формуле (26)) одинаковы во всех $\left[\frac{n}{2}\right]$-кратных плоскостях. Полученное $\left[\frac{n}{2}\right]$-мерное многообразие m-кратных плоскостей мы и будем обозначать $K_m^{\left[\frac{n}{2}\right]}$. Оно зависит от $\left[\frac{n}{2}\right]$ параметров $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\left[\frac{n}{2}\right]}$.

Произвольная m-кратная плоскость многообразия $K_m^{\left[\frac{n}{2}\right]}$, очевидно, характеризуется m-вектором

$$p = [x_1 \ldots x_m] = \left[\sum_i \left(e_i \cos\lambda_i + e_{\left[\frac{n}{2}\right]+i} \sin\lambda_i\right)\xi^i_1, \ldots \right.$$
$$\left. \ldots, \sum_i \left(e_i \cos\lambda_i + e_{\left[\frac{n}{2}\right]+i} \sin\lambda_i\right)\xi^i_m\right], \tag{27}$$

где $m\left[\frac{n}{2}\right]$ чисел ξ_α^i — постоянные, характеризующие данное многообразие $K_m^{\left[\frac{n}{2}\right]}$. Всего, исходя из определенной системы осей, можно построить столько же многообразий $K_m^{\left[\frac{n}{2}\right]}$, сколько m-кратных плоскостей в $\left[\frac{n}{2}\right]$-кратной плоскости, т. е. $m\left(\left[\frac{n}{2}\right]-m\right)$-параметрическое множество.

Важное значение для дальнейшего будут иметь m-векторы, являющиеся частными производными m-вектора p по параметрам $\lambda_1, \ldots, \lambda_{\left[\frac{n}{2}\right]}$; i-й из этих m-векторов имеет вид

$$\frac{\partial p}{\partial \lambda_i}=\sum_\alpha\left[x_1x_2\ldots x_{\alpha-1}\frac{\partial x_\alpha}{\partial \lambda_i}x_{\alpha+1}\ldots x_m\right]=$$

$$=\sum_\alpha\left[\sum_i(e_i\cos\lambda_i+e_{\left[\frac{n}{2}\right]+i}\sin\lambda_i)\,\xi_1^i, \ldots,\right.$$

$$\left.\sum_i(-e_i\sin\lambda_i+e_{\left[\frac{n}{2}\right]+i}\cos\lambda_i)\,\xi_\alpha^i, \ldots, \sum_i(e_i\cos\lambda_i+e_{\left[\frac{n}{2}\right]+i}\sin\lambda_i)\,\xi_m^i\right]. \quad (28)$$

Многообразие $K_m^{\left[\frac{n}{2}\right]}$ является $\left[\frac{n}{2}\right]$-мерной поверхностью в P_m^n.

Квадрат линейного элемента P_m^n, как и всякого многообразия в эллиптическом пространстве R^N, выражается скалярным квадратом дифференциала m-вектора

$$ds^2=dp\,dp. \quad (29)$$

В частности, формула (29) верна и на многообразии $K_m^{\left[\frac{n}{2}\right]}$. Здесь будем иметь

$$ds^2=\sum_{i,j}\frac{\partial p}{\partial \lambda_i}\frac{\partial p}{\partial \lambda_j}d\lambda_i\,d\lambda_j. \quad (30)$$

Составляя скалярные произведения выражений типа (28), находим, что

$$\frac{\partial p}{\partial \lambda_i}\frac{\partial p}{\partial \lambda_j}=\begin{cases}\sum_\alpha(\xi_\alpha^i)^2 & i=j\\ 0 & i\neq j,\end{cases} \quad (31)$$

так что

$$ds^2=\sum_i\left(\sum_\alpha(\xi_\alpha^i)^2\,d\lambda_i^2\right). \quad (32)$$

Число $\sum_\alpha (\xi_\alpha^i)^2$, как легко видеть, равно квадрату косинуса расстояния ρ_i от каждой из m-кратных плоскостей нашего многообразия до i-й оси. Следовательно, формулу (32) можно переписать так:

$$ds^2 = \sum_i \cos^2 \rho_i \, d\lambda_i^2, \tag{33}$$

или если произвести замену параметров $u_i = \cos \rho_i \lambda_i$:

$$ds^2 = \sum_i du_i^2, \tag{34}$$

что показывает, что в многообразиях $K_m^{\left[\frac{n}{2}\right]}$ господствует эвклидова геометрия.

Координатная линия поверхности, изображающей многообразие $K_m^{\left[\frac{n}{2}\right]}$ на P_m^n (например, соответствующая изменению u_i), очевидно, соответствует такой последовательности m-кратных плоскостей многообразия $K_m^{\left[\frac{n}{2}\right]}$, которая вырезается из этого многообразия пучком $\left[\frac{n}{2}\right]$-кратных плоскостей, пересекающихся со всеми осями, кроме i-й, в одних и тех же точках, а точка пересечения плоскостей пучка с i-й осью, напротив, пробегает всю эту ось. При этом, очевидно, основание перпендикуляра, опущенного из точки i-й оси на m-кратную плоскость нашей последовательности, пробегает круг, плоскость которого проходит через i-ую ось и радиус которого равен $\frac{\pi}{2} - \rho_i$, а все точки m-кратной плоскости, ортогональные основанию этого перпендикуляра, лежат в той $\left(\left[\frac{n}{2}\right] - 1\right)$-кратной плоскости, по которой пересекаются $\left[\frac{n}{2}\right]$-кратные плоскости нашего пучка, и потому неподвижны. Значит, m-кратные плоскости нашей последовательности составляют систему образующих круглого конуса с углом раствора $\frac{\pi}{2} - \rho_i$. Такой конус будем называть конусом C_i. Если для многообразия $K_m^{\left[\frac{n}{2}\right]}$ $\rho_i = 0$, то все m-кратные плоскости этого многообразия пересекаются с i-й осью и конус C_i превращается в плоский пучок m-кратных плоскостей. Из вида линейного элемента (34) ясно, что при метрическом отображении многообразия $K_m^{\left[\frac{n}{2}\right]}$ на $\left[\frac{n}{2}\right]$-мерное эвклидово пространство конусы C_i изображаются $\left[\frac{n}{2}\right]$-ортогональной системой прямых линий.

Многообразие P_m^n содержит эвклидовы подпространства $K_m^m, K_m^{m+1}, \ldots$ $\ldots, K_m^{\left[\frac{n}{2}\right]}$. В множестве прямых R^4 эвклидовым подпространством K_2^2

является конгруенция перпендикуляров к одной прямой, о которой известно ([4]), что при метрике Нордена она изометрична клиффордовой поверхности.

Особый интерес представляют многообразия K_m^m. Все конусы C_i для этих многообразий вырождаются в плоские пучки, т. е. координатные линии поверхности, изображающей это многообразие на P_m^n, являются ее прямолинейными образующими. При метрическом отображении многообразия K_m^m на m-мерное эвклидово пространство фундаментальным образом является m-мерный куб, длина ребер которого равна π и точки противоположных граней которого должны быть отождествлены по прямым параллельным ребрам.

Многообразия K_m^m являются вполне геодезическими поверхностями в множестве m-кратных плоскостей пространства R^n при любом n. Действительно, найдем геодезические последовательности плоскостей многообразия K_m^m. Так как многообразие K_m^m метрически отображается на эвклидов куб, то геодезическими, очевидно, будут те последовательности, которые при этом отображении переходят в прямые в кубе.

Если прямая в кубе параллельна одному из его ребер, то она изображает пучок m-кратных плоскостей.

Пусть базисные точки того пространства R^{2m}, в котором находится наше многообразие K_m^m, выбраны так, что e_α и $e_{m+\alpha}$ расположены на α-ой оси многообразия. Будем интересоваться геодезическими последовательностями плоскостей, проходящими через плоскость $[e_1e_2 \ldots e_m]$.

Введем в нашем кубе декартову координацию с осями, параллельными ребрам, и пусть плоскость многообразия K_m^m, соответствующая значениям параметров $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, переходит при нашем отображении в точку куба с декартовыми координатами $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$. Тогда плоскость $[e_1e_2 \ldots e_m]$ изобразится вершиной $(0, 0, \ldots, 0)$, а пучок $[e_1e_2 \ldots e_{\alpha-1}, e_\alpha \cos\lambda_\alpha + e_{m+\alpha}\sin\lambda_\alpha, e_{\alpha+1} \ldots e_m]$ при отображении перейдет в α-ое ребро куба. Плоскость из K_m^m, соответствующая значениям параметров $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, очевидно, есть

$$[e_1\cos\lambda_1 + e_{m+1}\sin\lambda_1, \ldots, e_m\cos\lambda_m + e_{2m}\sin\lambda_m].$$

Если в нашем кубе через точку $(0, 0, \ldots, 0)$ проведена прямая, составляющая с ребрами куба углы, косинусы которых равны $k_1, k_2, \ldots, k_m$, и если расстояние текущей точки прямой от точки $(0, 0, \ldots, 0)$ равно ω, то декартовы координаты этой текущей точки будут

$$\lambda_1 = k_1\omega,\ \lambda_2 = k_2\omega, \ldots, \lambda_m = k_m\omega,$$

и плоскость, соответствующая этой текущей точке, есть

$$[e_1\cos k_1\omega + e_{m+1}\sin k_1\omega, \ldots, e_m\cos k_m\omega + e_{2m}\sin k_m\omega].$$

Сравнивая эту формулу с формулой (20), мы видим, что прямой куба с направляющими косинусами $k_1, k_2, \ldots, k_m$ соответствует гипер-

геликоид, оси которого совпадают с осями многообразия K_m^m, а вектор-параметр имеет компоненты $k_1, k_2, \ldots, k_m$. То есть любая геодезическая линия многообразия K_m^m является геодезической линией в множестве m-кратных плоскостей пространства R^n, и многообразия K_m^m действительно являются вполне геодезическими поверхностями в этом множестве.

Отсюда же видно, что «длина» гипергеликоида между двумя плоскостями ω из формулы (14) будет геодезическим расстоянием между этими плоскостями в нашей метрике: через наши две плоскости всегда можно провести многообразие K_m^m, осями которого служат общие перпендикуляры этих плоскостей. Это многообразие можно метрически отобразить на эвклидов куб, например, так, чтобы точка, изображающая одну из наших плоскостей, перешла в его вершину $(0, 0, \ldots, 0)$, — тогда длина ω гипергеликоида между этими плоскостями равна длине отрезка прямой между изображающими эти плоскости точками куба, т. е. ω совпадает с геодезическим расстоянием в нашей метрике. При этом ω, очевидно, не зависит от выбора многообразия K_m^m.

У г о л м е ж д у д в у м я н а п р а в л е н и я м и в нашем римановом пространстве легко найти из формулы (21). Из этой формулы следует, что касательный вектор к какому-нибудь направлению в многообразии P_m^n, исходящему из точки p, выражается через горловые матрицы и вектор-параметр гипергеликоида, соответствующего этому направлению, по формуле

$$\mathbf{t} = \sum_\alpha k_\alpha [\dot{i}_1^\beta \mathbf{e}_\beta, \ldots, \dot{i}_{\alpha-1}^\beta \mathbf{e}_\beta, \dot{j}_\alpha^\lambda \mathbf{e}_{m+\lambda}, \dot{i}_{\alpha+1}^\beta \mathbf{e}_\beta, \ldots, \dot{i}_m^\beta \mathbf{e}_\beta]. \qquad (35)$$

Другому направлению, исходящему из той же точки, соответствует вектор

$$\tilde{\mathbf{t}} = \sum_\alpha \tilde{k}_\alpha [\tilde{i}_1^\beta \mathbf{e}_\beta, \ldots, \tilde{i}_{\alpha-1}^\beta \mathbf{e}_\beta, \tilde{j}_\alpha^\lambda \mathbf{e}_{m+\lambda}, \tilde{i}_{\alpha+1}^\beta \mathbf{e}_\beta, \ldots, \tilde{i}_m^\beta \mathbf{e}_\beta]. \qquad (36)$$

Искомый угол φ между этими направлениями определяется, очевидно, из формулы

$$\cos\varphi = \mathbf{t}\tilde{\mathbf{t}},$$

или, подставляя значение $\mathbf{t}$ и $\tilde{\mathbf{t}}$ из формул (35) и (36),

$$\cos\varphi = \sum_{\alpha,\beta} k_\alpha \tilde{k}_\beta \Big\{ \Big(\sum_\lambda \dot{j}_\alpha^\lambda \tilde{j}_\beta^\lambda\Big) \Big(\sum_\gamma \dot{i}_1^\gamma \tilde{i}_1^\gamma\Big) \ldots \Big(\sum_\gamma \dot{i}_{\alpha-1}^\gamma \tilde{i}_{\alpha-1}^\gamma\Big) \Big(\sum_\gamma \dot{i}_{\alpha+1}^\gamma \tilde{i}_\alpha^\gamma\Big) \ldots$$
$$\Big(\sum_\gamma \dot{i}_\beta^\gamma \tilde{i}_{\beta-1}^\gamma\Big) \Big(\sum_\gamma \dot{i}_{\beta+1}^\gamma \tilde{i}_{\beta+1}^\gamma\Big) \ldots \Big(\sum_\gamma \dot{i}_m^\gamma \tilde{i}_m^\gamma\Big) + \ldots \Big\}. \qquad (37)$$

Формула (14) для геодезического расстояния и формула (37) для угла между направлениями в многообразии P_m^n дают все необходимое для построения метрической геометрии в этом пространстве.

Наконец, докажем, что *многообразие P_m^n в нашей метрике является симметрическим римановым пространством.*

Симметрическим римановым пространством, как известно, называется такое риманово пространство, что если, исходя из любой его точки p, произвести преобразование пространства, заменяя каждую точку q пространства точкой q', находящейся на геодезической линии, соединяющей q и p по другую сторону от p, чем q, но на том же геодезическом расстоянии, то это преобразование не нарушит метрики пространства, т. е. расстояние между любыми преобразованными точками q_1' и q_2' равно расстоянию соответственных точек q_1 и q_2 до преобразования.

Пусть p и q — точки пространства P_m^n. Им соответствуют m-кратные плоскости p и q пространства R^n. Плоскость q', соответствующая точке q', очевидно, строится так: все общие перпендикуляры плоскостей p и q продолжаются по другую сторону плоскости p, на α-ом перпендикуляре откладывается по другую сторону от p длина ω_α α-го перпендикуляра между плоскостями p и q и полученные m точек соединяются m-кратной плоскостью. Эта плоскость q', очевидно, принадлежит гипергеликоиду, соединяющему плоскости p и q, и геодезическое расстояние между плоскостями p и q', очевидно, равно геодезическому расстоянию между p и q. Если теперь каждую плоскость пространства R^n заменить новой плоскостью по этому способу, то мы произведем, очевидно, отражение пространства R^n относительно плоскости p. Ясно, что это преобразование не меняет метрики пространства R^n. Следовательно, соответственное преобразование не меняет метрики и в многообразии P_m^n, которое, таким образом, является симметрическим римановым пространством.

Институт математики
Московского гос. университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
19 III 1941

ЛИТЕРАТУРА

[1] Широков П. А., Тензорное исчисление, ч. I, Л.—М., 1934 [гл. 3, § 26, стр. 314 и 321].

[2] Норден А. П., Геометрия линейчатого пространства, Курс, читанный в МГУ в 1938/39 г. (гот. к печ.).

[3] Gourevitch G. (Гуревич Г. Б.), L'algèbre du trivecteur, Труды семинара по векторному и тензорному анализу при МГУ, вып. 2—3, 1935, 51—118 [§ 5].

[4] Розенфельд Б. А., Внутренняя геометрия множества прямых трехмерного эллиптического пространства (печ. в Ученых записках МГУ).

[5] Вейль Г., Теория представлений непрерывных полупростых групп при помощи линейных преобразований, Успехи матем. наук, вып. 4, 1938, 201—246.

[6] Розенфельд Б. А., Многомерное обобщение поверхности Клиффорда (печ. в Ученых записках МГУ).

B. ROSENFELD. GÉOMÉTRIE INTÉRIEURE DE L'ENSEMBLE DES PLANS m-DIMENSIONNELS DANS L'ESPACE ELLIPTIQUE À n DIMENSIONS

RÉSUMÉ

Dans cet article on considère l'ensemble des plans m-dimensionnels dans l'espace elliptique à n dimensions. On introduit dans cet ensemble une métrique en prenant pour «distance» entre deux plans m-dimensionnels le nombre

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \ldots + \omega_{m+1}^2},$$

où les $\omega_1, \ldots, \omega_{m+1}$ sont les distances stationnaires de ces plans (les longueurs des perpendiculaires communes). L'ensemble des plans devient alors un espace riemannien. On démontre dans le présent article que cet espace est un espace riemannien symétrique.

On démontre ensuite que le rôle des lignes géodésiques dans cet espace est joué par ce que l'on nomme les suites hyperhélicoidales de plans ou hyperhélicoides.

Si un plan m-dimensionnel passe par les points orthogonaux $x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}$ dont les coordonnées homogènes $x_1^{i_1}, x_2^{i_2}, \ldots, x_{m+1}^{i_{m+1}}$ $(i = 1, \ldots, n+1)$, sont normées (réduites à l'unité), alors les coordonnées de Plücker du plan p sont les nombres

$$p^{i_1 \ldots i_{m+1}} = x_1^{[i_1} x_2^{i_2} \ldots x_{m+1}^{i_{m+1}]}$$

([ ] signifie l'alternation des indices). Si nous avons deux plans p et q dont les coordonnées de Plücker sont $p^{i_1 \ldots i_{m+1}}$ et $q^{i_1 \ldots i_{m+1}} = y_1^{[i_1} y_2^{i_2} \ldots y_{m+1}^{i_{m+1}]}$ alors les coordonnées de Plücker du plan courant de la suite hyperhélicoidale passant par les plans p et q est

$$r^{i_1 \ldots i_{m+1}} = (\lambda_1 x_1^{[i_1} + \mu_1 y_1^{[i_1}) (\lambda_2 x_2^{i_2} + \mu_2 y_2^{i_2}) \ldots (\lambda_{m+1} x_{m+1}^{i_{m+1}]} + \mu_{m+1} y_{m+1}^{i_{m+1}]}),$$

où les nombres λ_k et μ_k sont choisis de telle manière que les distances de x_k aux points à coordonnées $\lambda_k x_k^{i_k} + \mu_k y_k^{i_k}$ sont dans le même rapport que les distances de x_k à y_k.

On démontre ensuite qu'il existe dans notre espace riemannien des multiplicités ν-dimensionnelles à métrique euclidienne. Pour construire une telle multiplicité il faut prendre dans l'espace à n dimensions ν droites qui sont des arrêtes ne se coupant pas d'un tétraèdre autopolaire et placer les 2ν premiers points de la base de l'espace n-dimensionnel de sorte que les points e_r $(r = 1, \ldots, \nu)$ et $e_{r+\nu}$ soient situés sur la r-ième de nos droites. Pour construire la multiplicité ν-dimensionnelle cherchée des plans m-dimensionnels il faut prendre $\nu(m+1)$ nombres ξ_α^r $(r = 1, \ldots, \nu;$ $\alpha = 1, \ldots, m+1)$ tels que

$$\sum_r \xi_\alpha^r \xi_\beta^r = \begin{cases} 1 & \alpha = \beta, \\ 0 & \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

Les plans m-dimensionnels qui appartiennent à cette multiplicité dépendront de ν paramètres $\lambda_1, \ldots, \lambda_\nu$, qui varient de zéro à π. Les

coordonnées de Plücker du plan courant à m dimensions d'une telle multiplicité ont la forme

$$p^{i_1 \dots i_{m+1}} = x_1^{[i_1} x_2^{i_2} \dots x_{m+1}^{i_{m+1}]} \; (i_\alpha = 1, \dots, n+1;\ \alpha = 1, \dots, m+1),$$

$$x_\alpha^{i_\alpha} = \begin{cases} \xi_\alpha^r \cos \lambda_r & i_\alpha = r = 1, \dots, \nu \\ \xi_\alpha^r \sin \lambda_r & i_\alpha = r + \nu = \nu + 1, \dots, 2\nu \\ 0 & i_\alpha = 2\nu + 1, \dots, n+1. \end{cases}$$

Pour l'ensemble des plans m-dimensionnels de l'espace à n dimensions la dimension ν des multiplicités à métrique euclidienne peut être égale à $m+1,\ m+2, \dots, \left[\frac{n+1}{2}\right]$.

On démontre que les multiplicités de ce type pour $\nu = m+1$ sont des surfaces parfaitement géodésiques dans notre espace riemannien.

On trouve aussi dans l'article une expression pour l'angle entre deux directions dans l'ensemble des plans m-dimensionnels.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADEMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 5 (1941), 369—376 Série mathématique

Н. А. УРМАЕВ

ПРИВЕДЕННАЯ ДЛИНА ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ЛИНИИ

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

В статье рассматривается способ вычисления приведенной длины геодезической линии, основанный на интегрировании ее дифференциального уравнения при помощи ряда Маклорена с точностью до членов шестого порядка. Полученная формула является основной во многих теоретических вопросах высшей геодезии.

При изучении многих теоретических вопросов сфероидической геодезии приведенная длина геодезической линии играет весьма существенную роль. Введенная в высшую геодезию еще Кристоффелем ([1]), она в дальнейшем изучалась Гельмертом ([2]) и Гроссманом ([3]).

Задаваясь целью получить строгую формулу для приведенной длины геодезической линии, Гельмерт с самого начала проводит преобразование переменной в исходном интеграле, пользуясь для этого бесселевым изображением эллипсоида вращения на шаре.

Гроссман в основу своего исследования положил уравнение эллипсоида вращения, отнесенное к прямоугольным осям координат, расположенным так, что плоскость xy совпадает с касательной плоскостью к поверхности в начальной точке, а ось z направлена по внутренней нормали. В дальнейшем Гроссман разложил координаты x, y и z в ряды по степеням s (s — длина геодезической линии) и получил приведенную длину геодезической линии (m) с точностью до величин порядка $\left(\frac{s}{N}\right)^6$, где N — радиус кривизны нормального сечения, перпендикулярного к меридиану. Конечный результат получен Гроссманом путем весьма обширных преобразований.

В настоящей статье я привожу новую формулу для приведенной длины геодезической линии, из которой без особого труда можно получить не только строгую формулу Гельмерта, но и более коротким путем конечную формулу Гроссмана. Попутно можно еще вывести при этом и производную $\frac{dm}{ds}$ в конечном виде, которая имеет большое значение в теоретических вопросах высшей геодезии.

Напишем уравнение поверхности эллипсоида вращения в параметрической форме

$$x = a\cos u\cos l,\quad y = a\cos u\sin l,\quad z = b\sin u,$$

где u — приведенная широта, l — долгота, a и b — полуоси эллипсоида вращения. Сжатие эллипсоида, т. е. величину $\frac{a-b}{a}$, будем считать величиной малой первого порядка.

По новейшим исследованиям Ф. Н. Красовского, основанным на данных градусных измерений СССР, Западной Европы и США, сжатие равно 1 : 298,3. Имея уравнение поверхности эллипсоида вращения, легко найти выражение для линейного элемента поверхности. Мы имеем

$$dS^2 = E\,du^2 + G\,dl^2, \tag{1}$$

где $E = a^2(1 - e^2\cos^2 u)$, $G = a^2\cos^2 u$, причем e представляет собою эксцентриситет меридианного эллипса.

От приведенной широты u можно перейти к широте геодезической φ по известной формуле $\operatorname{tg} u = \sqrt{1-e^2}\operatorname{tg}\varphi$.

Для нахождения уравнения геодезической линии на поверхности эллипсоида вращения мы можем воспользоваться дифференциальным уравнением Лагранжа-Эйлера, которое в нашем случае даст следующее дифференциальное уравнение геодезической линии

$$\frac{dl}{du} = \frac{c\sqrt{1 - e^2\cos^2 u}}{\cos u\sqrt{\cos^2 u - c^2}} \tag{2}$$

или уравнение в форме Клеро

$$\cos u\sin\alpha = c, \tag{3}$$

где α — азимут геодезической линии и c — постоянная.

Построим теперь на поверхности эллипсоида вращения систему полярных геодезических координат. Для этого в некоторой заданной точке P_1 проведем пучок геодезических линий. На каждой линии этого пучка будем откладывать от точки P_1 одну и ту же длину s. Соединяя концы отрезков и изменяя параметр s, мы получим систему геодезических окружностей s-const. В связи с тем, что геодезическая кривизна геодезических линий (α-const) равна нулю, линии α-const и s-const будут ортогональны и линейный элемент поверхности мы можем написать в новой форме

$$dS^2 = ds^2 + m^2\,d\alpha_1^2,$$

где m — приведенная длина геодезической линии и α_1 — азимут геодезической линии в точке P_1.

Проектируя элемент геодезической окружности $m\,d\alpha_1$ на меридиан конечной точки геодезической линии, мы получим

$$\sqrt{E}\,du = -m\sin\alpha\,d\alpha_1,$$

откуда

$$du = -\frac{m\sin\alpha}{a\sqrt{1 - e^2\cos^2 u}}\,d\alpha_1. \tag{4}$$

С другой стороны, имея уравнение геодезической линии (2) и выражение линейного элемента поверхности (1), мы без особого труда можем написать для длины геодезической линии следующую формулу:

$$s = a \int_{u_1}^{u} \frac{\cos u \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u}}{\sqrt{\cos^2 u - c^2}}\, du. \tag{5}$$

Представим себе, что геодезическая линия неизменной длины вращается вокруг точки P_1 с приведенной широтой u_1. При этом будет изменяться и постоянная c. Из (3) найдем

$$\cos u_1 \cos \alpha_1\, d\alpha_1 = dc,$$

или

$$dc = \sqrt{\cos^2 u_1 - c^2}\, d\alpha_1 . \tag{6}$$

Дифференцируя (5) по параметру c при переменном верхнем пределе интеграла, получим

$$0 = du \frac{a \cos u \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u}}{\sqrt{\cos^2 u - c^2}} + aIc\, dc,$$

где

$$I = \int_{u_1}^{u} \frac{\cos u \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u}}{(\cos^2 u - c^2)^{3/2}}\, du. \tag{7}$$

Отсюда, принимая во внимание (3) и (6), мы получим

$$du = -\frac{a \sqrt{\cos^2 u_1 - c^2} \sqrt{\cos^2 u - c^2}\, I \sin \alpha}{a \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u}}\, d\alpha_1.$$

Сравнивая эту формулу с (4), мы находим, что приведенная длина геодезической линии может быть вычислена следующим образом:

$$m = a \sqrt{\cos^2 u_1 - c^2} \sqrt{\cos^2 u - c^2}\, I. \tag{8}$$

Для практических приложений в области высшей геодезии приведенная длина геодезической линии может быть вычислена двумя способами.

Принимая во внимание, что интеграл (7) не выражается в элементарных функциях, мы в первом способе можем представить приведенную длину геодезической линии в виде ряда, расположенного по степеням e^2. Это решение, годное для любых расстояний на поверхности эллипсоида вращения малого сжатия, было дано мною в работе [4].

Здесь мы рассмотрим другой способ вычисления приведенной длины геодезической линии, в котором последняя представляется в виде разложения по степеням $\frac{s}{N}$.

Дифференцируя (8) по s, мы найдем

$$\frac{dm}{ds} = \frac{\sqrt{\cos^2 u_1 - c^2}}{\sqrt{\cos^2 u - c^2}} - \frac{m \sin u}{a \sqrt{\cos^2 u - c^2} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u}} . \tag{9}$$

Если же перейти от приведенной широты к геодезической, то из (9) мы получим известную формулу Гельмерта

$$\frac{dm}{ds} = \frac{N_1 \cos \varphi_1 \cos \alpha_1}{N \cos \varphi \cos \alpha} - \frac{m \operatorname{tg} \varphi}{N \cos \alpha} .$$

Дифференцируя (9) по s, находим

$$\frac{d^2m}{ds^2} = -mK, \tag{10}$$

где

$$K = \frac{1-e^2}{a^2(1-e^2\cos^2 u)^2}$$

представляет собою полную кривизну поверхности.

Формула (10) является частным случаем теоремы Гаусса (theorema egregium), гласящей, что полная кривизна поверхности есть рациональная функция от коэффициентов первой основной дифференциальной формы и их производных по криволинейным координатам.

Формула (10) позволяет сравнительно легко найти m путем разложения в ряд Маклорена. Если мы условимся обозначать производные по s штрихами или римскими цифрами, поставленными вверху, то можно написать

$$m = m_0 + \frac{m_0'}{1}s + \frac{m_0''}{2}s^2 + \frac{m_0'''}{6}s^3 + \frac{m_0^{IV}}{24}s^4 + \ldots \tag{11}$$

Индекс нуль означает, что величина m или ее производная должны быть вычислены при $s=0$.

Из формулы (5) следует, что при s, стремящемся к нулю, m обращается в нуль, т. е. $m_0=0$. Из формулы (9) найдем, что

$$\left(\frac{dm}{ds}\right)_0 = m_0' = 1\,.$$

Из формулы (10), представленной в виде

$$m'' = -mK, \tag{12}$$

следует,что $m_0''=0$.

Далее имеем следующие последовательные производные:

$$\begin{aligned}
m''' &= -m'K - mK',\\
m^{IV} &= -m''K - 2m'K' - mK'',\\
m^{V} &= -m'''K - 3m''K' - 3m'K'' - mK''',\\
m^{VI} &= -m^{IV}K - 4m'''K' - 6m''K'' - 4m'K''' - mK^{IV},\\
m^{VII} &= -m^{V}K - 5m^{IV}K' - 10m'''K'' - 10m''K''' - 5m'K^{IV} - mK^{V},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Отсюда легко получим при $m_0=0$, $m_0'=1$ и $m_0''=0$, что

$$\left.\begin{aligned}
m_0''' &= -K,\\
m_0^{IV} &= -2K',\\
m_0^{V} &= K^2 - 3K'',\\
m_0^{VI} &= 6KK' - 4K'''\\
m_0^{VII} &= -K^3 + 13KK'' - 5K^{IV}.\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Таким образом, задача сводится к вычислению последовательных производных полной кривизны K по s.

В обозначениях Иордана ([5]) мы имеем

$$K = \frac{V^4}{c^2}; \quad \frac{d\varphi}{ds} = \frac{V^3}{c}\cos\alpha; \quad \frac{d\alpha}{ds} = \frac{Vt}{c}\sin\alpha; \qquad t = \operatorname{tg}\varphi; \quad c = \frac{a}{\sqrt{1-e^2}}$$

и кроме того

$$V^2 = 1 + \eta^2 = 1 + e'^2\cos^2\varphi; \quad \frac{dV}{d\varphi} = -\frac{\eta^2 t}{V}; \quad \frac{d\eta}{d\varphi} = -\eta t; \quad \frac{dt}{d\varphi} = 1 + t^2;$$

$$e'^2 = \frac{e^2}{1-e^2}.$$

Тогда мы можем вычислить

$$\frac{dK}{ds} = K' = -\frac{4V^3}{c^2}\cdot\frac{\eta^2 t}{V}\cdot\frac{V^3}{c}\cos\alpha,$$

или

$$K' = -\frac{4V^5\eta^2 t}{c^3}\cos\alpha. \tag{14}$$

Для вычисления K'' обозначим предварительно

$$A = V^5\eta^2 t.$$

Тогда

$$\frac{dA}{d\varphi} = -5V^3\eta^4 t^2 - 2V^5\eta^2 t^2 + V^5\eta^2(1+t^2) =$$
$$= V^3\eta^2[-5\eta^2 t^2 - 2(1+\eta^2)t^2 + (1+\eta^2)(1+t^2)] =$$
$$= V^3\eta^2(1 - t^2 + \eta^2 - 6\eta^2 t^2).$$

Далее имеем

$$\frac{dA}{ds} = \frac{V^6}{c}\eta^2\cos\alpha(1 - t^2 + \eta^2 - 6\eta^2 t^2). \tag{15}$$

Дифференцируя (14) и принимая во внимание (15), получим

$$K'' = -\frac{4V^6}{c^4}\eta^2\cos^2\alpha(1 - t^2 + \eta^2 - 6\eta^2 t^2) + \frac{4V^5\eta^2 t}{c^3}\sin\alpha\frac{Vt}{c}\sin\alpha =$$
$$= -\frac{4V^6}{c^4}\eta^2\cos^2\alpha(1 - t^2 + \eta^2 - 6\eta^2 t^2) + \frac{4V^6\eta^2 t^2}{c^4}\sin^2\alpha.$$

Окончательно получим

$$K'' = -\frac{4V^6}{c^4}\eta^2\cos^2\alpha(1 + \eta^2 - 6\eta^2 t^2) + \frac{4V^6}{c^4}\eta^2 t^2. \tag{16}$$

Вычисляя m_0^V, найдем

$$m_0^V = \frac{V^8}{c^4} + \frac{12V^6}{c^4}\eta^2\cos^2(1 + \eta^2 - 6\eta^2 t^2) - \frac{12V^6}{c^4}\eta^2 t^2 =$$
$$= \frac{V^6}{c^4}[1 + \eta^2 + 12\eta^2\cos^2\alpha(1 + \eta^2 - 6\eta^2 t^2) - 12\eta^2 t^2].$$

Отбрасывая в этой формуле члены порядка η^4, получим

$$m_0^V = \frac{1}{N^4}(1 + 2\eta^2 + 12\eta^2\cos^2\alpha - 12\eta^2 t^2). \tag{17}$$

Для вычисления K''' мы отбросим в формуле (16) члены порядка η^4 и представим ее в следующем виде

$$K'' = \frac{4V^6\eta^2}{c^4}(t^2 - \cos^2\alpha).$$

Дифференцируя эту формулу по s, мы без особого труда найдем

$$K''' = \frac{16V^7}{c^5}\eta^2 t\cos\alpha.$$

Отсюда получим

$$m_0^V = -\frac{88V^5}{c^5}\eta^2 t\cos\alpha.$$

Наконец, последняя формула (13) даст нам, если отбросить члены порядка η^2,

$$m_0^{VII} = -K^3 \approx -\frac{1}{N^6}.$$

Полученные результаты подставим в формулу (11) и найдем

$$m = s\Big[1 - \frac{s^2}{6N^2}(1+\eta^2) + \frac{s^3}{3N^3}V^2\eta^2 t\cos\alpha + \frac{s^4}{120N^4}(1 + 2\eta^2 + 12\eta^2\cos^2\alpha - 12\eta^2 t^2) - \frac{11}{90}\frac{s^5}{N^5}\eta^2 t\cos\alpha - \frac{s^6}{5040N^6} + \ldots\Big], \tag{18}$$

что полностью совпадает с формулой Гроссмана.

Рассмотрим здесь одно из многих применений приведенной длины геодезической линии, для чего напишем формулу (18) в более упрощенном виде, отбросив члены порядков $\frac{s^3}{N^3}\eta^4$, $\frac{s^4}{N^4}\eta^2$ и выше. Тогда из (18) получим

$$m = s\Big[1 - \frac{s^2}{6R^2} + \frac{s^3}{3R^3}\eta^2 t\cos\alpha + \frac{s^4}{120R^4} - \ldots\Big], \tag{19}$$

где R — средний радиус кривизны.

Далее построим на шаре радиуса R равнопромежуточное изображение некоторой области поверхности эллипсоида вращения, ограниченной геодезической окружностью «радиуса» s. Если геодезическим линиям поверхности эллипсоида будут соответствовать на поверхности шара вертикалы, а геодезическим окружностям — альмукантараты, то масштаб по вертикалам будет равен единице, а масштаб по альмукантаратам будет $\frac{m_c}{m}$, где m_c получится из (19) при $\eta = 0$ следующим образом:

$$m_c = s\Big[1 - \frac{s^2}{6R^2} + \frac{s^4}{120R^4} - \ldots\Big]. \tag{20}$$

Отсюда относительное искажение длин вдоль альмукантаратов будет

$$v = \frac{m - m_c}{m} = \frac{1}{3}\left(\frac{s}{N}\right)^3\eta^2 t\cos\alpha.$$

Наибольшее изменение искажения будет иметь место в интервале от $\alpha = 0$ до $\alpha = \pi$. Тогда

$$v_{\max} = \frac{2}{3}\left(\frac{s}{N}\right)^3 e'^2\cos^2\varphi\,\mathrm{tg}\,\varphi,$$

или

$$v_{\max} = \frac{1}{3}\left(\frac{s}{N}\right)^3 e^2\sin 2\varphi. \tag{21}$$

Пусть $v_{\max} = 0{,}05$ единиц седьмого знака логарифма и $\varphi = 45°$. Легко подсчитать, что формула (21) даст $s = 110$ км, т. е. область, взятая на поверхности земного эллипсоида и ограниченная геодезической окружностью диаметра 220 км или 2°, изображается на поверхности шара практически без искажения.

Военно-инженерная академия
Красной Армии им. В. В. Куйбышева

Поступило
5 III 1941

ЛИТЕРАТУРА

[1] Christoffel, Allgemeine Theorie der geodätischen Dreiecke, Abh. der mathem. Klasse der Königl. Akademie der Wissenschaften, 1868, Berlin, 1869, S. 119 ff.

[2] Helmert, Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie, I Teil, Die mathematischen Theorien; 6 Kapitel, S. 265 ff.

[3] Grossmann W., Die reduzierte Länge der geodätischen Linie und ihre Anwendung bei der Berechnung rechtwinkliger Koordinaten in der Geodäsie, Zeitschr. f. Vermessungswesen, B. LXII, 1933, H. 16, S. 401 ff.

[4] Урмаев Н. А., О приведенной длине геодезической линии, Редбюро ГУГК, М. 1939.

[5] Jordan, Handbuch der Vermessungskunde, 1923, B. III, S. 225 ff.

N. URMAJEV. DIE REDUZIERTE LÄNGE DER GEODÄTISCHEN LINIE

ZUSAMMENFASSUNG

In der höheren Geodäsie spielt die reduzierte Länge der geodätischen Linie eine wichtige Rolle. Vom Standpunkt der allgemeinen Flächentheorie aus hat sie eine einfache Bedeutung.

Es sei

$$ds^2 + m^2 d\alpha_1^2$$

das Linienelement auf dem Rotationsellipsoid, wobei s und α_1 Länge und Azimut einer geodätischen Linie (geodätische Polarkoordinaten) sind.

Man nennt die Grösse m die reduzierte Länge der geodätischen Linie.

Auf dem Rotationsellipsoid lautet die Formel für die Länge der geodätischen Linie

$$s = a \int\limits_{u_1}^{u} \frac{\cos u \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u}}{\sqrt{\cos^2 u - c^2}} du,$$

wobei u die reduzierte Breite ist.

Wenn das Azimut α_1 bei konstanter Länge der geodätischen Linie um den kleinen Winkel $d\alpha_1$ vergrössert wird, so beschreibt der Endpunkt der geodätischen Linie ein Bogenelement $m\,d\alpha_1$ des geodätischen Kreises.

Hieraus kann man für die reduzierte Länge der geodätischen Linie folgenden Ausdruck in geschlossener Form erhalten:

$$m = a\sqrt{\cos^2 u_1 - c^2}\sqrt{\cos^2 u - c^2}\, I \cdot$$

$$I = \int\limits_{u_1}^{u} \frac{\cos u \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u}}{(\cos^2 u - c^2)^{3/2}} du.$$

Für die praktische Anwendung kann man diese Formeln zweifach umformen.

Erstens kann man das Integral I als Reihe nach wachsenden Potenzen von e^2 darstellen. Die Lösung ist vom Verfasser in: «Über die reduzierte Länge der geodätischen Linie» angegeben (Vrf. des Redaktionsbureaus der Höheren Geodätischen Verwaltung, Moskau, 1939).

In vorliegender Arbeit wird ein anderes Berechnungsverfahren für die reduzierte Länge der geodätischen Linie entwickelt, das auf die Integration der Differentialgleichung

$$\frac{d^2m}{ds^2} = -mK,$$

wobei K das Krümmungsmass ist, zurückgeht.

Man kann für alle praktischen Aufgaben mit einer Genauigkeit bis auf Glieder sechster Ordnung auskommen.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 5 (1941), 377—380 Série mathématique

Н. П. ЕРУГИН

ЗАМЕЧАНИЕ К СТАТЬЕ Л. М. ШИФНЕРА

(*Представлено академиком* **Н. Е. Кочиным**)

В заметке рассматриваются условия, при которых решение системы дифференциальных уравнений (1) можно получить в конечном виде (9).

В. И. Смирнов предложил мне проверить необходимость некоторых требований, налагаемых Л. М. Шифнером в его статье «Еще об интегрировании дифференциальных систем в конечном виде» (Известия Акад. Наук СССР, серия матем., т. 4, 1940, 417—422) на матрицы, казавшихся не совсем естественными. Подробное рассмотрение этой статьи подтвердило возможность ослабления условий, необходимых для решения поставленной задачи.

Пусть дана система дифференциальных уравнений

$$\frac{dY}{dx} = Y\,[U_1\varphi_1(x) + U_2\varphi_2(x)], \tag{1}$$

где U_1 и U_2 — постоянные матрицы, $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$—скалярные функции и Y—интегральная матрица. Введем обозначения:

$$\begin{gathered}[XY] = XY - YX, \quad \text{где } X \text{ и } Y \text{ матрицы;}\\ f_1 = U_2U_1 - U_1U_2 = [U_2U_1],\ f_2 = [U_2\,[U_2U_1]],\\ f_n = [U_2\,[U_2\,\ldots\,[U_2\,[U_2U_1]\,\ldots\,]] \quad (n \text{ скобок}),\end{gathered} \tag{2}$$

$$\left.\begin{gathered}L_2 = \int_b^x \varphi_2(x)\,dx, \quad L_{2^n} = \int_b^x \varphi_2(x)\,L_{2^{n-1}}\,dx, \quad L_{2^n1} = \int_b^x \varphi_1(x)\,L_{2^n}\,dx,\\ L_1 = \int_b^x \varphi_1(x)\,dx.\end{gathered}\right\} \tag{3}$$

Легко видеть, что

$$L_{2^n} = \frac{L_2^n}{n!} \tag{4}$$

Л. М. Шифнер в его упомянутой статье показал следующее. Если

$$[U_1\,[U_2U_1]] = 0, \tag{5}$$

матрица U_1 имеет для каждого характеристического числа один элементарный делитель и ряд

$$U_1L_1 + f_1L_{21} + f_2L_{221} + \ldots \tag{6}$$

сходится, то решение системы (1), нормированное в точке $x=b$, можно представить в виде

$$Y = \exp(U_1L_1 + f_1L_{21} + f_2L_{221} + \dots)\exp(U_2L_2). \tag{7}$$

Если, кроме условия (5), еще имеем $f_{n+1}=0$, то

$$Y = \exp(U_1L_1 + f_1L_{21} + f_2L_{221} + \dots + f_nL_{2n1})\exp(U_2L_2). \tag{8}$$

Следует отметить, что уже при выполнении только условия (5) решение Y можно представить в конечном виде с помощью известных функций. Поставим себе задачу: найти условия, которым должны удовлетворять матрицы U_1 и U_2, чтобы решение системы (1) можно было представить в виде

$$Y = e^S e^{U_2L_2}, \tag{9}$$

где матрица S обладает свойством

$$\frac{dS}{dx}S = S\frac{dS}{dx}. \tag{10}$$

При выполнении равенства (10) мы можем написать

$$\frac{dY}{dx} = e^S\frac{dS}{dx}e^{U_2L_2} + e^Se^{U_2L_2}U_2\varphi_2.$$

Подставляя это в систему (1), получим

$$e^S\frac{dS}{dx}e^{U_2L_2} + e^Se^{U_2L_2}U_2\varphi_2 = e^Se^{U_2L_2}U_1\varphi_1 + e^Se^{U_2L_2}U_2\varphi_2,$$

откуда после сокращения имеем

$$\frac{dS}{dx} = e^{U_2L_2}U_1e^{-U_2L_2}\varphi_1 \tag{11}$$

и

$$S = \int_b^x e^{U_2L_2}U_1e^{-U_2L_2}\varphi_1\,dx. \tag{12}$$

Теперь покажем, что при условии (5) матрица S, определенная равенством (12), обладает свойством (10). Имеем из (11)

$$\frac{dS}{dx} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{U_2^{\nu}L_2^{\nu}}{\nu!}U_1\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}U_2^{\nu}L_2^{\nu}}{\nu!}\varphi_1 = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\sum_{s=0}^{\nu}(-1)^s\binom{\nu}{s}U_2^{\nu-s}U_1U_2^s\right)\frac{L_2^{\nu}}{\nu!}\varphi_1.$$

У Шифнера показано, что

$$f_\nu = \sum_{s=0}^{\nu}(-1)^s\binom{\nu}{s}U_2^{\nu-s}U_1U_2^s.$$

Поэтому

$$\frac{dS}{dx} = \sum_{\nu=0}^{\infty}f_\nu\frac{L_2^{\nu}}{\nu!}\varphi_1, \qquad f_0 = U_1 \tag{13}$$

и формулу (12) можно записать в виде

$$S = \sum_{\nu=0}^{\infty}f_\nu\int_b^x\frac{L_2^{\nu}}{\nu!}\varphi_1\,dx = \sum_{\nu=0}^{\infty}f_\nu L_{2\nu1}. \tag{14}$$

Это и есть ряд (6), сходимость которого Шифнер предполагает. Но здесь из самого его происхождения следует, что он просто целый, т. е. сходится при всех U_1 и U_2.

Пользуясь (13) и (14), мы можем условия (10) записать в виде

$$\frac{dS}{dx}S - S\frac{dS}{dx} = \sum_{k,\nu=0}^{\infty}(f_kf_\nu - f_\nu f_k)\frac{L_2^kL_{2\nu1}}{k!}\varphi_1 \equiv 0 \tag{15}$$

относительно x и при всяких φ_1 и φ_2. Полагая $\varphi_2 = \varphi_1$, получим

$$L_2^{\nu}{}_1 = \int_b^x \frac{L_2^{\nu}}{\nu!} \varphi_2 \, dx = \frac{L_2^{\nu+1}}{(\nu+1)!},$$

и формулу (15) можно переписать так:

$$\frac{dS}{dx} S - S \frac{dS}{dx} = \sum_{k,\nu=0}^{\infty} (f_k f_\nu - f_\nu f_k) \frac{L_2^{k+\nu+1}}{k!\,(\nu+1)!} \varphi_1 \equiv 0 \tag{16}$$

или

$$(f_0 f_1 - f_1 f_0) \frac{L_2^2}{2!} \varphi_1 + (f_1 f_0 - f_0 f_1) \frac{L_2^2}{1} \varphi_1 + \sum_{k,\nu=1}^{\infty} (f_k f_\nu - f_\nu f_k) \frac{L_2^{k+\nu+1}}{k!\,(\nu+1)!} \varphi_1 \equiv 0, \tag{17}$$

т. е. для выполнения равенства (10) необходимо, чтобы $f_0 f_1 - f_1 f_0 = 0$, или, так как $f_0 = U_1$,

$$U_1 f_1 - f_1 U_1 = 0. \tag{18}$$

Это и есть условие (5).

Теперь покажем достаточность равенства (18) для выполнения равенства (10). Именно, мы покажем, что при выполнении равенства (18) матрицы f_k и f_ν коммутируют при любых k и ν, т. е. коэффициенты разложения (15) будут равны нулю.

Как и Шифнер, будем предполагать, что каждому характеристическому числу матрицы U_1 соответствует один только элементарный делитель. В этом случае, как это следует из работы Л. М. Шифнера «Об интегрировании в конечном виде некоторых дифференциальных систем» (там же, стр. 341—348), достаточно рассмотреть случай, когда $U_1 = J_n(0)$.

Итак, пусть равенство (18) выполнено. Тогда f_1 имеет вид (Шифнер, op. cit., формулы (9) и (9′) на стр. 342):

$$U_2 U_1 - U_1 U_2 = f_1 = P_1(U_1) \tag{19}$$

где P_1 — полином. Пользуясь формулой (19), получим

$$U_2 U_1^k = (U_1 U_2 + P_1(U_1)) U_1^{k-1} = U_1 U_2 U_1^{k-1} + P_2(U_1), \tag{20}$$

откуда находим по индукции

$$U_2 U_1^k - U_1^k U_2 = P_3(U_1), \tag{21}$$

где $P_3(U_1)$ — полином от U_1. Из формул (19) и (21) следует

$$f_2 = U_2 f_1 - f_1 U_2 = P_4(U_1), \tag{22}$$

где $P_4(U_1)$ также полином от U_1. И так как $f_n = U_2 f_{n-1} - f_{n-1} U_2$, то вообще

$$f_n = P(U_1), \tag{23}$$

где $P(U_1)$ — опять полином от U_1.

Теперь ясно, что f_k и f_ν коммутируют при любых k и ν и, следовательно, равенство (10) будет выполнено.

Отметим, что если одному характеристическому числу матрицы U_1 соответствует несколько элементарных делителей, то среди матриц, удовлетворяющих равенству (18), есть такие, для которых формула (19) также имеет место и, следовательно, опять будем иметь решение в виде (9). Но есть и такие матрицы U_2, для которых формула (19)

не выполняется, и нет оснований утверждать, что получим решение в виде (9). Так, например, если возьмем

$$U_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \tag{24}$$

то матрица $f_1 = U_2U_1 - U_1U_2$, удовлетворяющая равенству $U_1f_1 - f_1U_1 = 0$, имеет вид

$$f_1 = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & c \\ d & 0 & e \end{vmatrix} \quad (a, b, c, d, e \text{ — произвольные числа}). \tag{25}$$

Полагая

$$U_2 = \begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{vmatrix}, \tag{26}$$

получим

$$f_1 = U_2U_1 - U_1U_2 = \begin{vmatrix} U_{12} & 0 & 0 \\ U_{22} - U_{11} & -U_{12} & -U_{13} \\ U_{32} & 0 & 0 \end{vmatrix}. \tag{27}$$

Сравнивая это с (25), будем иметь

$$U_2 = \begin{vmatrix} U_{11} & 0 & -c \\ U_{21} & U_{11} + b & U_{23} \\ U_{31} & d & U_{33} \end{vmatrix}, \quad f_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & c \\ d & 0 & 0 \end{vmatrix}, \tag{28}$$

откуда

$$f_2 = U_2f_1 - f_1U_2 = \begin{vmatrix} -cd & 0 & 0 \\ b^2 + U_{23}d - U_{31}c & -cd & c(U_{11} + 2b - U_{33}) \\ bd + U_{33}d - U_{11}d & 0 & 2cd \end{vmatrix},$$

и легко найдем

$$f_1f_2 - f_2f_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ cd(2U_{33} - 2U_{11} - b) & 0 & 3c^2d \\ -3cd^2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Простым вычислением можно убедиться, что в разложении (15) коэффициент при L_2^3 отличен от нуля для взятых матриц (24) и (28). Таким образом, равенство (15) не будет выполнено, и мы не получим решения в виде (9), где S обладало бы свойством (10).

Ленинградское отделение
Математического института имени В. А. Стеклова
Академии Наук СССР

Поступило
15 IV 1941

N. EROUGIN. UNE REMARQUE SUR L'ARTICLE DE L. SHIFNER

RÉSUMÉ

Soit donné un système d'équations différentielles

$$\frac{dY}{dx} = Y\,[U_1\varphi_1(x) + U_2\varphi_2(x)],$$

où U_1 et U_2 sont deux matrices constantes $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ des fonctions scalaires et Y une matrice intégrale. Supposons que

$$2U_1U_2U_1 = U_1^2U_2 + U_2U_1^2$$

et qu'à chaque nombre caractéristique correspond un seul diviseur élémentaire. Nous démontrons que dans ces conditions la matrice intégrale peut être exprimée en forme finie [v. les formules (9) et (11)].

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 5 (1941), 381—387 Série mathématique

КРИТИКА И БИБЛИОГРАФИЯ

В. НЕМЫЦКИЙ, М. СЛУДСКАЯ, А. ЧЕРКАСОВ. Курс математического анализа, под общей редакцией проф. В. Немыцкого, т. I, 459 стр. М.—Л., Гос. изд. технико-теоретич. литературы, 1940.

Рецензируемая книга представляет собой курс математического анализа, предназначенный служить учебником для университетов и педагогических институтов.

Книга состоит из следующих разделов: 1. Число и числовая последовательность. 2. Функция и предел. 3. Дифференциальное исчисление. 4. Интегральное исчисление. Укажем вкратце содержание этих разделов.

В первом разделе излагается теория вещественного числа по Кантору, теория пределов для нумерованной переменной и основы теории рядов с постоянными членами.

Второй раздел посвящен понятию функции. Сюда относятся: определение и свойства пределов функций, теоремы о непрерывных функциях и основные свойства функциональных последовательностей. Здесь, как и в следующих разделах, авторы ограничиваются рассмотрением функций одного аргумента.

В третьем разделе изложены основные факты, связанные с понятием производной, формула Тэйлора с ее приложениями, раскрытие неопределенностей и способы изучения поведения функции.

Наконец, в четвертом разделе излагаются основы интегрального исчисления и его геометрические приложения.

Книга обладает рядом достоинств. К их числу мы относим:

1. Весьма строгое изложение материала. Так, например, теория пределов строится на подробно развитой теории иррациональных чисел, геометрические приложения интегрального исчисления базируются на полных теориях площадей и длин дуг. Во всех теоремах совершенно точно указаны условия, при которых эти теоремы верны. Доказательства нигде не апеллируют к геометрической интуиции, а носят чисто аналитический характер и т. п.

2. Хороший литературный язык.

3. Традиционное содержание курса значительно освежено привлечением более высокого материала, как-то: понятие о классификации Бэра, пример ван-дер-Вардена недифференцируемой функции, кривая Пеано, пример неквадрируемой области, понятие об исследовании функций, заданных интегралами*. Сюда же относится весьма

* Отметим кстати небольшую погрешность, допущенную авторами в этом месте. На стр. 313 утверждается, что $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{\pi}{2}$; в действительности этот интеграл равен $\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2 < \frac{\pi}{2}$.

ценная глава о функциях, не интегрируемых в конечном виде (теоремы Абеля и Лиувилля о гиперэллиптических интегралах).

4. Следует признать удачной замену теории иррациональных чисел Дедекинда теорией Кантора. Хотя само определение иррационального числа может быть и несколько менее наглядно, но зато строгое доказательство всех свойств действий над вещественными числами проводится гораздо проще. Кстати, и изложение в этой части хорошо разработано в методическом отношении.

5. К методическим достоинствам книги следует отнести также обилие удачных примеров, иллюстрирующих необходимость тех или иных условий доказываемых теорем. Необходимость существования предела отношения производных в теореме Лопиталя устанавливается рассмотрением предела $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$. То обстоятельство, что обычные правила (исследование знака первой производной, применение формулы Тэйлора) не всегда позволяют обнаружить наличие экстремума, когда он имеется, также проиллюстрировано двумя примерами (стр. 263—265).

6. Подробно и хорошо изложены основные методы интегрирования функций.

Наряду с указанными достоинствами в книге имеются и существенные недостатки.

1. Не вполне удачна структура книги. Теория пределов разбросана по отдельным главам и даже разделам. Слишком далеко отодвинуто начало дифференциального исчисления—равномерная сходимость раньше определения производной! Плохо расположен материал, связанный с теорией рядов (см. ниже).

2. В интегральном исчислении неудачен путь, избранный для доказательства теорем существования неопределенного и определенного интегралов. По существу авторы два раза одинаковым методом доказывают теорему существования определенного интеграла, но первый раз делают это для более сложного случая интеграла с переменным верхним пределом. Проще было бы доказать теорему существования для определенного интеграла, а затем дифференцировать его по верхнему пределу, как это и делается обычно. Если же начинать с теоремы существования примитивной, то, опираясь на нее, интегрируемость непрерывной функции можно доказать гораздо проще, чем сделано в книге.

3. Отсутствует теория функциональных рядов. Это тем более странно, что авторы располагают теорией числовых рядов, теорией функциональных последовательностей, формулой Тэйлора с остаточным членом и его исследованием для элементарных функций. Незавершенность и разбросанность этого материала производят весьма досадное впечатление.

4. Совсем не освещена роль математического анализа как орудия познания природы. Нет почти ни одного примера приложения понятий анализа к конкретным физическим или техническим вопросам. Пренебрежение этой стороной дела сказалось и на отсутствии приложений анализа к вопросам приближенных вычислений. Нет даже обычно фигурирующих в курсах анализа формул приближенного интегрирования. Вообще уделено недостаточно внимания развитию техники и вкуса к вычислениям (специальные приемы, трудные задачи и т. п.). Все это придает книге несколько однобокий характер.

Кроме указанных принципиальных недостатков можно отметить большое число недостатков, так сказать, «локального» характера. Сюда относятся неудачные формулировки, мелкие неточности, фактические ошибки и другие погрешности, производящие впечатление неряшливости. Остановимся подробнее на дефектах этого рода.

a) Неверное определение фундаментальной последовательности: «последовательность называется фундаментальной, если, каково бы ни было $\varepsilon > 0$ и каково бы ни было целое число $p > 0$, всегда можно найти такое число N, что если $n > N$, то $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$» (стр. 22). Получается, что N зависит от p.

b) Неясное определение выпуклой кривой: «Назовем рассматриваемую кривую выпуклой в окрестности точки M, если в этой окрестности кривая лежит ниже каса-

тельной» (стр. 268). Не сказано, о какой именно касательной идет речь, только ли в самой точке или в окрестных точках, причем это не выясняется и из дальнейшего изложения.

c) Неверное определение границы точечного множества: «Подмножество всех граничных точек множества K образует границу этого множества» (стр. 428). Границ множества не обязана быть его подмножеством.

d) Крайне неясное изложение вопроса об инвариантном характере понятия площади (стр. 432—436). Рецензенты затрудняются признать основную теорему доказанной.

e) Неудачно определение верхней грани функции. Следует отчетливо сформулировать понятия грани числового множества в общем виде, а не выделять понятие грани функции в самостоятельное определение.

f) Доказательство формулы Лейбница методом индукции на этой ступени обучения тривиальным признать нельзя. Поэтому авторы напрасно опускают это доказательство, предоставляя его читателю.

g) Плохо сформулирована «аксиома порядка» (стр. 15). Понятие «следует» нужно выразить через «предшествует» по определению, а не вводить его как независимое понятие.

h) Слишком сложно доказана достаточность признака строгой монотонности функции (стр. 251). Не нужно рассматривать три значения аргумента, а достаточно двух. Кстати, нам не кажется оправданным изменение общепринятой терминологии в вопросе о монотонных функциях (авторы соглашаются называть монотонной только функцию монотонную в строгом смысле).

i) Недостаточно строго изложен вопрос о спрямлении кривой, заданной в параметрической форме (стр. 423).

k) Напрасно в признаках Куммера и Раабе не рассмотрен вопрос об условиях, обеспечивающих расходимость ряда.

Число примеров погрешностей этого рода можно было бы еще увеличить.

Мы находим уместным остановиться еще на одном вопросе, имеющем более широкий характер. Речь идет о том, что в учебной литературе нам не известно ни одно изложение теории пределов, которое полностью удовлетворяло бы нас. В учебниках отсутствует единое понятие о пределе, оно заменяется частными формами проявления этого понятия: предел нумерованной последовательности, предел функции одного переменного, предел функции многих переменных, предел интегральных сумм и т. п. Эта множественность определений влечет за собой ряд ненужных осложнений и неудобств. Так, например, обычно остается недостаточно оправданным перенос теорем, доказанных для одной из указанных форм, на прочие.

С другой стороны, начинать курс анализа с абстрактных идей Мура—Смита—Шатуновского—Гливенко или с какой-либо другой формальной теории представляет столь значительные методические трудности, что настаивать на этом, пожалуй, и нельзя. Таким образом, мы не хотим предлагать здесь какие-либо пути решения проблемы, а лишь ставим ее.

Возвращаясь к рецензируемой книге, мы должны сказать, что и она далеко не решает поставленной проблемы. Она страдает теми же недостатками, что и другие курсы анализа. То обстоятельство, что авторы почти не пользуются понятиями бесконечно малой и бесконечно большой величины, хотя и отличает эту книгу от других, но не кажется нам ее достоинством. Не говоря уже об историческом значении этих понятий, это не соответствует также той роли, которую они играют и сейчас как в самой математике, так и, в особенности, в ее приложениях.

Все сказанное позволяет считать рецензируемую книгу полезным учебным пособием для университетов и педагогических институтов. Что же касается вопроса о создании основного учебника анализа, вполне приспособленного к нуждам математических факультетов университетов и педагогических институтов, то его нельзя считать разрешенным и данной книгой.

Л. В. Канторович, И. П. Натансон

А. ЗИГМУНД. Тригонометрические ряды. Перевод с английского Д. А. Райкова, М., ГОНТИ, 1939, 323 стр.

Рецензируемая книга А. Зигмунда является единственным полным курсом теории тригонометрических рядов, вышедшим на русском языке; даже и на иностранных языках нет ни одной книги, посвященной этой теории и трактующей ее с той же полнотой. Среди всех монографий по тригонометрическим рядам, пожалуй, наиболее подробной является книга L. Tonelli «Serie trigonometriche» (Bologna, 1928), но и она значительно беднее по своему содержанию, не говоря уже о том, что эта книга вышла в свет на семь лет раньше английского издания Зигмунда (A. Zygmund, Trigonometrical series, Monografje matematyczne, Warszawa—Lwów, 1935).

А. Зигмунд—один из крупнейших специалистов по теории тригонометрических рядов. Его перу принадлежит свыше 40 работ в этой области, причем он касался самых разнообразных проблем: сходимости, суммируемости различными методами, единственности разложения в ряд, поведения сопряженных рядов, переноса некоторых свойств тригонометрической системы на общие ортогональные, связи между тригонометрическими рядами и тригонометрическими интегралами и многих других.

Творческая сила автора и его громадная эрудиция ярко отразились на рецензируемой книге. Она содержит огромный, очень интересный материал, изложенный с абсолютной строгостью и доведенный до конца во всех деталях, а также богатейшую библиографию. Автор не предполагает у читателя других сведений, кроме знания анализа и интеграла Лебега, но он постоянно дает результаты, требующие значительно бóльших знаний, и не останавливается перед необходимостью попутно изложить все, что требуется для понимания этих результатов. Так, например, он затрагивает общие ортогональные системы, сообщает нужные сведения из функционального анализа, дает понятие об интеграле Лебега-Стильтьеса, об интеграле Бокса, вводит дробное интегрирование и дифференцирование и т. д.

Укажем весьма кратко содержание отдельных глав.

В главе I даются общие определения, рассматриваются ортогональные системы и доказывается полнота тригонометрической системы.

В главе II изучаются операции над рядами Фурье, интегрирование и дифференцирование этих рядов, признаки сходимости и их взаимоотношение, теоремы локализации.

В главе III рассматривается суммируемость рядов Фурье методом Фейера и ее многочисленные следствия; суммирование рядов Фурье и сопряженных к ним методами Чезаро дробного порядка, суммирование ряда, получаемого дифференцированием ряда Фурье.

В главе IV изучается связь между свойствами функций и их коэффициентами Фурье, а также поведением частных сумм их рядов Фурье. Выводится целый ряд полезных вспомогательных предложений (неравенства Юнга, Гёльдера, Минковского, Иенсена). Даются необходимые и достаточные условия для того, чтобы функция была ограниченной или непрерывной (условия налагаются на фейеровы суммы рядов Фурье для этих функций). Рассматриваются линейные и метрические пространства, функциональные операторы и доказывается теорема Банаха—Штейнгауза о последовательности линейных операторов. Эта теорема и ее следствия применяются к дальнейшему изучению связи между коэффициентами Фурье и видом функции.

В главе V изучаются ряды специального вида, как-то: ряды с коэффициентами, монотонно стремящимися к нулю, лакунарные ряды, аналогия между лакунарными рядами и системой Радемахера, применение функций Радемахера к изучению сходимости рядов вида $\Sigma \pm (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, где знаки $+$ или $-$ могут быть выбраны как угодно; доказываются интересные леммы ван-дер-Корпута, строится пример непрерывной функции, у которой $\Sigma(|a_n|^{2-\varepsilon} + |b_n|^{2-\varepsilon})$ расходится при любом $\varepsilon > 0$, и доказывается существование рядов Фурье с как угодно медленно стремящимися к нулю коэффициентами.

В главе VI изучается абсолютная сходимость как общих тригонометрических

рядов, так, в частности, и рядов Фурье. Кроме известных теорем Данжуа—Лузина, теоремы Фату, теоремы С. Н. Бернштейна, здесь вводится понятие базиса и изучаются тонкие свойства абсолютной сходимости, связанные со строением множеств меры нуль. Дана интересная теорема Шидона (Szidon) об абсолютной сходимости лакунарных рядов и теорема Винера, указывающая на связь «локальной» и «интегральной» абсолютной сходимости.

В главе VII рассматривается суммирование методом Абеля ряда, сопряженного к ряду Фурье, изучаются условия, при которых сопряженный ряд сам является рядом Фурье, вводится понятие интеграла Бокса и доказывается теорема Колмогорова об интегрируемости по Боксу функции, сопряженной к суммируемой. Здесь же изучается сходимость в среднем ряда Фурье, обобщение равенства Парсеваля для функций, интегрируемых в степени $p>2$, устанавливаются свойства сопряженной функции в зависимости от свойств данной (см., например, теорему Привалова).

В главе VIII рассматривается расходимость рядов Фурье. Здесь в первую очередь даны примеры непрерывных функций с расходящимися рядами Фурье, показывается невозможность обобщения признака сходимости Дини—Липшица, вводятся константы Лебега и путем привлечения теоремы Банаха—Штейнгауза о линейных операторах доказывается, что в пространстве непрерывных функций все функции, за исключением множества первой категории, имеют ряд Фурье со всюду плотным множеством точек расходимости. Далее подробно разбирается пример Колмогорова, показывающий существование всюду расходящегося ряда Фурье. Наконец, разъясняется явление Гиббса.

В главе IX автор снова возвращается к связи между видом функции и ее коэффициентами Фурье. В этом направлении доказаны интересные теоремы Хаусдорфа—Юнга, Пэли и некоторые другие. Рассматривается вопрос о том, при каких условиях, наложенных на последовательность чисел c_n она остается последовательностью коэффициентов Фурье, как бы мы ни изменяли порядок следования чисел c_n, или становится такой последовательностью при соответствующем изменении этого порядка. Доказывается теорема Банаха о коэффициентах лакунарных рядов, интересная теорема Винера о коэффициентах Фурье для непрерывной функции с ограниченным изменением.

В главе X даются различные усиления теоремы Фейера о суммируемости ряда Фурье, а также изучаются частные суммы ряда Фурье для функций с интегрируемым квадратом. Здесь доказывается теорема Колмогорова о сходимости почти всюду последовательности частных сумм $s_{n_k}(x)$ для $\frac{n_{k+1}}{n_k} > \lambda > 1$, теорема Колмогорова—Селиверстова и Плеснера о сходимости почти всюду ряда $\Sigma(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ в случае сходимости $\Sigma(a_n^2 + b_n^2)\lg n$, дается оценка роста частных сумм ($s_n(x) = o(\sqrt{\lg n})$ почти всюду; наконец, изучается суммирование рядов Фурье методами Чезаро любого дробного порядка.

В главе XI рассматриваются произвольные тригонометрические ряды. Здесь в первую очередь разбираются необходимые условия, налагаемые на коэффициенты для того, чтобы ряд сходился. Кроме известной теоремы Кантора—Лебега здесь дается тонкая теорема Штейнгауза. Затем подробно изучается так называемый принцип локализации Римана. Кроме теории Римана, мы находим здесь интересные результаты Райхмана, дополненные самим Зигмундом и прекрасно им изложенные. Эти результаты прилагаются к изучению единственности разложения функции в тригонометрический ряд. Эта тонкая проблема изложена автором с максимально возможной (на небольшом числе страниц) полнотой. Проблема обобщена также на случай суммируемости рядов.

В главе XII автор рассматривает интегралы Фурье. Как было им самим отмечено в предисловии, этой теме можно было бы посвятить отдельную монографию, поэтому не удивительно, что на 14 страницах этой главы удалось уместить чрезвычайно мало сведений из этой интересной и все более развивающейся теории.

Здесь были перечислены далеко не все те проблемы, которыми занимается Зигмунд

в своей монографии. Однако изложенного вполне достаточно, чтобы убедиться в богатстве материала; в связи с упомянутой уже выше строгостью и полнотой изложения это дает нам возможность сказать, что монография Зигмунда является несомненно очень крупным вкладом в математическую литературу. Тем более досадно, что наряду с этим приходится отметить и некоторые, на мой взгляд, существенные ее недостатки.

Прежде всего, к сожалению, отсутствует история возникновения тригонометрических рядов, а также какие бы то ни было указания на их приложения. Если иметь в виду неопытного читателя, то он, пожалуй, не сможет понять, какие вопросы в теории тригонометрических рядов являются основными. Автор, кроме того, на протяжении всей книги почти нигде не говорит, почему он собирается излагать ту или иную теорему и где на нее будет опираться.

Даже в тех случаях, когда он говорит, что такая-то теорема интересна или такой-то пример замечателен, то читателю приходится недоумевать, почему именно это так, или просто верить автору на слово (например, в главе V, стр. 113, говорится, что ряд $\Sigma\frac{\cos nx}{\lg n}$ играет важную роль в некоторых проблемах; на стр. 119 сообщается, что многими интересными свойствами обладает ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{icn\lg n}\frac{z^n}{n^{\frac{1}{2}+a}}$)

В некоторых случаях, прочитав несколько страниц, читатель понимает, почему теорема или пример были нужны, но хотелось бы заранее удовлетворить его естественное желание, и это в большинстве случаев легко было бы сделать. Отказываясь от таких разъяснений, автор часто создает у читателя тяжелое впечатление «падения с неба» некоторых определений, свойств, новых понятий.

Общий стиль изложения у Зигмунда напоминает английские учебники и с моей точки зрения самым невыгодным образом отличается от изящного французского изложения, где в первую очередь развиваются основные идеи, подчеркивается взаимная связь отдельных частей текста и никогда не бывает формул без соответствующего разъясняющего текста. Именно в таком духе написан курс H. Lebesgue'а «Leçons sur les séries trigonométriques» (Collection de monographies sur la théorie des fonctions, Paris, 1906). Конечно, в этой книге сравнительно очень мало материала, но зато ясна вся красота теории и раскрываются широкие горизонты. Напротив, в книге Зигмунда имеется огромное количество теорем и примеров, но часто именно из-за этого изобилия материала основная нить совершенно теряется. Повидимому, автор стремился вложить в свою книгу максимум фактов, которые можно уместить на данном числе страниц. В этом смысле он безусловно достиг цели. Но мне кажется, что лучше было бы пожертвовать частью материала и за счет этого поместить текст вступительного характера к новым разделам, а также текст, служащий связующим звеном между отдельными частями книги. Монография не есть энциклопедия, где ни один результат не должен быть пропущен, зато ее основная цель—возбуждать творческие идеи у читателя. А для этого не следует дезориентировать его, перегружая книгу мелочами.

Само расположение материала, как мне кажется, возникло не как результат такого плана, где красной нитью проходила бы взаимная связь отдельных проблем, а было продиктовано желанием доказать каждую отдельную теорему, затратив на нее минимум места. Благодаря этому, теоремы иногда попадали в такие главы, где, судя по названию этих глав, их никак нельзя было ожидать встретить. Например, теорема С. Н. Бернштейна о том, что если $t_n(x)$ есть тригонометрический полином порядка n и $|t_n(x)| \leqslant M$, то $|t'_n(x)| \leqslant 2nM$, помещена в главе VII, носящей название «Сопряженные ряды и применение методов теории аналитических функций в теории рядов Фурье»; теорема Вейерштрасса о приближении непрерывной периодической функции тригонометрическим полиномом находится в главе III, носящей название «Суммируемость рядов Фурье».

Таких примеров можно было бы привести чрезвычайно много. Неопытного читателя такое переплетение различных фактов должно безусловно затруднять, но и лицу,

уже знакомому с теорией тригонометрических рядов, оно причиняет крайнюю досаду. Желая посмотреть, каким методом в книге Зигмунда доказана какая-нибудь известная теорема, такое лицо вынуждено иногда долго разыскивать ее по отдельным главам; в конце концов, она всегда найдется, если только не была открыта после 1935 г., но будет затрачено много времени и сил на ее поиски. Поиски эти еще больше затрудняются одним дополнительным обстоятельством, вызванным все тем же желанием автора максимально экономить место: автор отказывается даже от самых незначительных повторений, предпочитая делать ссылки на готовую формулу и заставляя читателя утомляться непрерывным перелистыванием книги в поисках этих формул, имеющих, кроме того, тяжелую (английскую) нумерацию.

Вот небольшой пример. На стр. 283 читаем: «Если ряд 11.44 (1) сходится во всем интервале $a \leqslant x \leqslant b$ за исключением, быть может, счетного множества точек E, к интегрируемой функции $f(x)$, то ряд (1) равномерно сходится на (a, b) к интегралу от f». Что может понять человек, прочитавший такую формулировку (напечатанную курсивом)? Пока он не найдет формулу 11.44 (1) и не увидит ряда (1), он не в состоянии догадаться, о чем идет речь. Между тем загадочный ряд 11. 44(1) есть просто самый общий тригонометрический ряд $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, относительно коэффициентов которого не надо делать никаких предположений, а ряд (1) получается из него формальным интегрированием почленно.

Поэтому, если бы формулировать теорему так: «Если тригонометрический ряд сходится на интервале $a \leqslant x \leqslant b$ всюду, за исключением, быть может, счетного множества точек E, к интегрируемой функции f, то ряд, получаемый из него почленным интегрированием, равномерно сходится на (a, b) к интегралу от $f(x)$»,—то читатель был бы избавлен от необходимости перелистывать книгу и, кроме того, узнал бы полезную теорему при одном лишь просмотре формулировок, напечатанных курсивом.

Примеров такого рода, как только что указанный, можно было бы привести очень много. Много также и доказательств типа: «в силу теорем 2.13 и 4.36 (II), для того, чтобы ряд 7.4 (1) имел»... Понять эти предложения можно только при чтении книги подряд, но при просмотре ее никак нельзя уловить идей, лежащих в основе доказательств.

Приходится, наконец, очень пожалеть о том, что в книге нет ни одного чертежа, даже в тех местах, где автор описывает геометрическую структуру кривых (например, в явлении Гиббса).

Мне хотелось бы еще добавить, что в имеющихся в конце каждой главы параграфах под названием «Различные теоремы и примеры» содержится материал, представляющий значительный интерес, но если найти теоремы, помещенные в основном тексте, лишь иногда бывает трудно, то теоремы из этих параграфов, как правило, могут быть найдены лишь благодаря счастливой случайности. Замечу также, что автор слишком оптимистичен, когда в предисловии предлагает читателю доказывать эти теоремы (или, вернее, большинство их) в порядке упражнения; боюсь, что для этого от читателя потребовалась бы эрудиция, близкая к эрудиции самого автора.

Резюмируя, скажу, что книга Зигмунда очень интересна и полезна, но написана трудно. Для облегчения пользования ею было бы желательно хотя бы снабдить ее алфавитным указателем. Если этого не сделал сам автор, то можно было бы составить такой указатель для русского перевода. Отмечу, кстати, что книга переведена и проредактирована достаточно внимательно, но технически оформлена плохо: слишком мелкий шрифт и узкое расстояние между строками приводят к тому, что чтение утомительно для глаз (этого недостатка нет в английском подлиннике).

Огромная библиография, собранная в конце книги, дает возможность пользоваться ею почти как энциклопедией по теории тригонометрических рядов.

Н. Бари

Редактор издания В. А. Толстиков

Подписано к печати 11/VII 1941 г. А39720. Печ. л. $6^3/_4$ Уч.-авт. л. 9,7. Тираж 1560 экз.
Цена 12 руб. Заказ 1055.

Типография треста «Полиграфкнига», Москва, Трехпрудный пер., 9



И. И. ПРИВАЛОВ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 6 (1941), 389—394 Série mathématique

ИВАН ИВАНОВИЧ ПРИВАЛОВ

1891—1941

13 июля 1941 г. в Москве скончался Иван Иванович Привалов, профессор Московского университета и Военно-Воздушной Академии имени Жуковского, член-корреспондент Академии Наук СССР.

Иван Иванович Привалов родился 12 февраля 1891 г. в гор. Нижнем-Ломове, окончил Нижегородскую гимназию, в 1909 г. поступил в Московский университет и окончил его в 1913 г.. После окончания был оставлен при университете. С 1916 г.—приват-доцент, с 1918 г.—профессор Саратовского университета, с 1922 г.—профессор Московского университета, с 1923 г.—профессор Военно-Воздушной Академии. В 1939 г. избран членом-корреспондентом Академии Наук.

Научную работу И. И. Привалов начал еще студентом и продолжал ее до самой смерти. Его блестящий творческий талант проявлялся в самых разнообразных областях математического анализа, но бóльшая часть его работ связана с теорией функций комплексного переменного.

Первая большая работа И. И. Привалова (13)* по теории функций комплексного переменного—его монография (типа диссертации) «Интеграл Коши». Введенный в науку в начале текущего века интеграл Лебега первое время прилагался математиками почти исключительно к функциям действительного переменного. В указанной работе И. И. Привалов, примыкая к классической работе французского математика Фату, систематически применяет интеграл и меру Лебега к аналитическим функциям, заданным в области, ограниченной спрямляемой кривой. Им получен ряд результатов фундаментальной важности; упомянем, например, свойство сохранения углов при конформном отображении почти всюду на границе, существование почти всюду интеграла типа Коши, необходимые и достаточные условия для того, чтобы a priori заданная на границе области функция представляла предельные значения аналитической функции, совместный с Н. Н. Лузиным результат об инвариантности множества меры нуль на границе при конформном отображении.

Эта работа, вышедшая во время блокады РСФСР империалистическими странами, долго оставалась неизвестной за границей, и некоторые результаты И. И. Привалова частично были получены иностранными учеными (Ф. Рисом и др.). Поэтому в 1925 г. И. И. Привалов вернулся к этой теме

* Номера обозначают порядок работы в списке трудов, печатаемом ниже.

в двух французских мемуарах (25, 30), один из которых написан совместно с Н. Н. Лузиным. Здесь дается также решение ряда трудных и тонких вопросов о единственности определения аналитической функции значениями, которые она принимает на границе—например, на единичной окружности, при приближении по радиальным путям.

К тому же периоду относятся важные исследования И. И. Привалова по теории однолистных функций, дающих конформные отображения областей специального вида (19).

С 1934 г. начинается второй большой цикл работ Ивана Ивановича, относящийся к теории субгармонических функций. Класс субгармонических функций, введенный в науку Ф. Рисом в двадцатых годах нынешнего века, до работ Привалова изучался математиками лишь эпизодически. И. И. Привалов в ряде работ поставил и разрешил задачу создания общей теории этого важного класса функций, связав эту теорию с теорией гармонических функций.

В этих работах И. И. Привалов плодотворно использует и обобщает введенное им еще в 1925 г. (28) новое определение гармонической функции посредством интегрального оператора, систематически изучает различные классы субгармонических функций, их граничные значения, связь аналитического представления со свойствами этих функций и т. п. Эти работы сведены в одно целое в монографии «Субгармонические функции» (51).

Эти же исследования дали И. И. Привалову повод вернуться к кругу идей первого цикла—интегралу Коши, в связи с чем в 1941 г. появилась блестящая монография «Граничные свойства однозначных аналитических функций» (78), где разнообразные работы автора сведены в одно стройное целое.

Из результатов, не относящихся к теории аналитических функций, следует отметить крупный вклад в исследование свойств сопряженных рядов Фурье, касающихся сходимости сопряженного ряда и его дифференциальных свойств (9, 10, 14, 27, отчасти 13).

Иван Иванович был блестящим лектором. В изложение математической науки он вносил подлинный энтузиазм. Наряду с университетскими курсами, вводившими слушателей в современное состояние науки, он много сил и энергии вкладывал в преподавание математики в высшей технической школе. В результате этой работы Иван Иванович создал ряд первоклассных учебников для университетов: «Введение в теорию функций комплексного переменного» (6 изданий), «Ряды Фурье» (3 издания), «Интегральные уравнения» (2 издания) и для технической школы: «Аналитическая геометрия» (12 изданий). Следует упомянуть также коренную переработку курсов Анализа Аппеля и Посее.

Наряду с этим, И. И. Привалов энергично вел молодежь по пути самостоятельного научного исследования; он воспитал целый ряд аспирантов, которые продолжают его исследования, а также находят свои собственные пути в теории функций комплексного переменного.

Свою научную и педагогическую деятельность И. И. Привалов сочетал с обширной общественной работой: в Математическом обществе—в послед-

ние годы вице-президент Общества, во Всесоюзном комитете по делам Высшей школы—член Высшей аттестационной комиссии, в Красно-Пресненском районном совете—депутат.

За выдающиеся ученые и общественные заслуги в 1940 г., в связи с юбилеем Московского университета, И. И. Привалов был награжден орденом Трудового Красного Знамени.

В. Степанов

СПИСОК ТРУДОВ И. И. ПРИВАЛОВА

1914

1. Свойства рядов по ортогональным функциям (*Матем. сборник*, т. XXIX, стр. 182—184).
2. К теории интегральных уравнений с ядром «simmetrisable» (*Матем. сборник*, т. XXIX, стр. 185—189).

1915

3. По поводу теоремы Vitali и одного результата проф. Стеклова (*Матем. сборник*, т. XXIX, стр. 293—298).

1916

4. Интеграл Poisson'a (*Матем. сборник*, т. XXX, стр. 314—319).
5. Sur la dérivation des séries de Fourier (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, t. 41, p. 202—206).
6. О диференцировании рядов Fourier (*Матем. сборник*, т. XXX, стр. 320—324).
7. О тригонометрических суммах, наименее уклоняющихся от нуля (*Матем. сборник*, т. XXX, стр. 474—478).
8. О сходимости рядов Sturm'a-Liouville'я и Legendre'a (*Сообщения Харьк. Матем. общ.*, т. 15, стр. 148—160).
9. Sur les fonctions conjuguées (*Bull. de la Soc. Math. de France*, t. 44, p. 100—103).
10. Sur la convergence des séries trigonométriques conjuguées (*Comptes rendus*, Paris, t. 162, p. 123—126).

1918

11. О приближении суммами Fejer'a функций, удовлетворяющих условию Lipschitz'a (*Матем. сборник*, т. XXX, стр. 521—526).
12. О суммировании ряда Legendre'a (*Матем. сборник*, т. XXX, стр. 527—534).

1919

13. Интеграл Cauchy (Монография). (*Известия Саратовск. гос. унив.*, 94+II стр.).

1923

14. К теории сопряженных тригонометрических рядов (*Матем. сборник*, т. XXXI, стр. 224—228).
15. Обобщение теоремы Paul du Bois-Raymond'a (*Матем. сборник*, т. XXXI), стр. 229—231).
16. Обобщение теоремы Фату (*Матем. сборник*, т. XXXI, стр. 232—235).

1924

17. О ряде Тейлора (*Матем. сборник*, т. XXXI, стр. 345—349).
18. Sur les suites des fonctions analytiques (*Comptes rendus*, Paris, t. 178, p. 178—180).
19. О функциях, дающих однолистное конформное отображение (*Матем. сборник*, т. XXXI, стр. 350—365).

20. Sur certaines propriétés métriques des fonctions analytiques (*Comptes rendus*, Paris, t. 178, p. 611—614).
21. Sur l'unicité et la multiplicité des fonctions analytiques (*Comptes rendus*, Paris, t. 178, p. 456—459) (совм. с Н. Н. Лузиным).
22. Eine Erweiterung des Satzes von Vitali über Folgen analytischer Funktionen (*Math. Annalen*, B. 93, S. 149—152).
23. О последовательностях аналитических функций (*Матем. сборник*, т. XXXII, стр. 45—49).
24. Über einen Mittelwertsatz in der Theorie der analytischen Funktionen (*Матем. сборник*, т. XXXII, стр. 50—54).
25. Sur certaines propriétés métriques des fonctions analytiques (*Journ. de l'École Polyt.*, t. 24, p. 77—112).
26. Переработка для высших технич. учебн. завед. курса Анализа Аппеля (Аппель, Элементы математического анализа), ч. I (219 стр.), ч. II (132 стр.) (Гос. технич. изд., М.).

1925

27. О сходимости сопряженных тригонометрических рядов (*Матем. сборник*, т. XXXII, стр. 357—363).
28. Sur les fonctions harmoniques (*Матем. сборник*, т. XXXII, стр. 464—471).
29. Об одном новом процессе суммирования бесконечных рядов (*Матем. сборник*, т. XXXII, стр. 711—722).
30. Sur l'unicité et la multiplicité des fonctions analytiques (*Ann. de l'École Normale Sup.*, XLII, p. 143—191) (совм. с Н. Н. Лузиным).

1926

31. Sur les suites des fonctions analytiques (*Матем. сборник*, т. XXXIII, стр. 113—128).

1928

32. По поводу предложения Bloch'a (*Матем. сборник*, т. XXXV, стр. 111—121).
33. О полиномах Чебышева (*Известия ассоц. научно-исслед. институтов М.Г.У.*, т. I, вып. 1—2, стр. 23—36).
34. Современное состояние теории функций комплексного переменного (*Труды съезда математиков в Москве за 1937 г.*; М.—Л., стр. 33—49).
35. Общий очерк развития теории функций комплексного переменного в СССР за время с 1917 по 1927 г. (*Матем. сборник*, т. XXXV (доп. вып.), стр. 5—20) (совм. с М. А. Лаврентьевым).
36. Sur une propriété générale des fonctions analytiques (*Comptes rendus*, Paris, t. 187, p. 927—929).

1930

37. Об областях, образованных из точек, изображающих общие значения пары аналитических функций (*Матем. сборник*, т. XXXVII, стр. 79—90).

1933

38. Стенограмма лекций по высшей математике, чит. в Военно-Возд. Академии в 1933 г. (*Военно-Возд. Академия РККА*, в. I, 175 стр.).

1934

39. Об одной граничной задаче субгармонических функций (*Матем. сборник*, т. XLI, стр. 3—10).
40. Об одной граничной задаче теории аналитических функций (*Матем. сборник*, т. XLI, стр. 519—526).

41. О некоторых вопросах теории субгармонических и аналитических функций (*Матем. сборник*, т. XLI, стр. 527—550).
42. Ряды Фурье (изд. 6 пер. и доп., М.—Л., ГТТИ, 164 стр.)*.

1935

43. Граничная задача теории функций (*Известия Ак. Наук СССР*, VII сер., № 2, стр. 301—306).
44. Обобщение формулы Jensen'а, I (*Известия Ак. Наук СССР*, VII сер., № 6—7, стр. 837—847).
45. Обобщение формулы Jensen'а, II (*Известия Ак. Наук СССР*, VII сер., № 6—7, стр. 848—856).
46. Современные проблемы теории функций комплексного переменного (*Известия Н.-И.И. матем. и мех. при Томск. гос. унив.*, т. I, вып. 2, стр. 107—119).
47. Обобщение метода Линделёфа (*Известия Н.-И. И. матем. и мех. при Томск. гос. унив.*, т. I, вып. 2, стр. 126—143).
48. Основы анализа бесконечно-малых (пособие для учителей) (Учпедгиз, М., 159 стр.) (совм. с С. А. Гальперном).

1936

49. К общей теории гармонических и субгармонических функций (*Матем. сборник*, т. 1 (43), стр. 103—122).
50. О некоторых экстремальных задачах теории субгармонических функций (*Матем. сборник*, т. 1 (43), стр. 297—302).

1937

51. Субгармонические функции. Монография (ГТТИ, М.—Л., 199 стр.).
52. Некоторые замечания к теории нормальных семейств непрерывных функций (*Матем. сборник*, т. 2 (44), стр. 739—744).
53. К общей теории полигармонических функций (*Матем. сборник*, т. 2 (44), стр. 745—758) (совм. с Б. Пчелиным).
54. Интегральные уравнения (изд. 2 исп., М.—Л., ГТТИ, 248 стр.).

1938

55. Граничные задачи теории гармонических и субгармонических функций в пространстве (*Матем. сборник*, т. 3 (45), стр. 3—26).
56. Приложения понятия гармонической меры к некоторым проблемам теории функций (*Доклады Ак. Наук СССР*, т. XVIII, стр. 3—7).
57. Граничные задачи теории гармонических и субгармонических функций в пространстве (*Доклады Ак. Наук СССР*, т. XVIII, стр. 7—8).
58. Приложения понятия гармонической меры множества к некоторым проблемам теории функций (*Матем. сборник*, т. 3 (45), стр. 527—534).
59. Приложения понятия гармонической меры к некоторым задачам теории субгармонических функций (*Матем. сборник*, т. 3 (45), стр. 535—542).
60. Различные классы субгармонических функций в связи с их аналитическими представлениями (*Доклады Ак. Наук СССР*, т. XVIII, стр. 507—510).
61. Различные классы субгармонических функций в связи с их аналитическими представлениями (*Известия Ак. Наук СССР*, сер. матем., № 2, стр. 191—220).
62. Об одном классе субгармонических функций в связи с его аналитическим представлением (*Известия Ак. Наук СССР*, сер. матем., № 3, стр. 303—312).
63. Обобщенный принцип максимума для субгармонических функций (*Доклады Ак. Наук СССР*, т. XIX, стр. 27—29).

* В списке указываются лишь последние издания учебников.

64. О предельных значениях аналитической функции (*Доклады Ак. Наук СССР*, т. XIX, стр. 663—665).
65. О предельных значениях интеграла типа Коши-Стильтьеса (*Известия Н.-И. И. матем. и мех. Томск. гос. унив.*, т. II, в. 2, стр. 43—52) (совм. с Бродским).

1939

66. Некоторые замечания к теории субгармонических функций (*Известия Ак. Наук СССР*, сер. матем., № 1, стр. 7—12).
67. К проблеме Ватсона (*Известия Ак. Наук СССР*, сер. матем., № 1, стр. 13—23).
68. Граничные задачи и различные классы гармонических и субгармонических функций, определенных в произвольных областях (*Матем. сборник*, т. 6 (48), стр. 345—376) (совм. с П. И. Кузнецовым).
69. Аналитическая геометрия (изд. 12, М.—Л., ГТТИ, 232 стр.).
70. Курс диференциального исчисления (изд. 5, М.—Л., ГТТИ, 355 стр.), (перераб. курса Поссе).
71. Курс интегрального исчисления (изд. 4, М.—Л., ГТТИ, 480 стр.), (перераб. курса Поссе).
72. Элементы теории эллиптических функций (изд. Московск. гос. унив., 46 стр.).

1940

73. Об интеграле типа Коши-Стильтьеса (*Известия Ак. Наук СССР*, сер. матем., т. 4, стр. 261—276).
74. Об интеграле типа Коши-Стильтьеса (*Доклады Ак. Наук СССР*, т. XXVII, стр. 195—198).
75. Введение в теорию функций комплексного переменного (изд. 6 пер. и доп., М.—Л., ГТТИ, 407 стр.).

1941

76. О потенциале двойного слоя в пространстве (*Матем. сборник*, т. 9 (51), стр. 429—436) (совм. с В. В. Сагателяном).
77. On a theorem of S. Saks (*Матем. сборник*, т. 9 (51), стр. 457—460).
78. Граничные свойства однозначных аналитических функций. Монография (изд. М. Г. У., М., 206 стр.).
79. К определению субгармонической функции (*Известия Ак. Наук СССР*, сер. матем., т. 5, стр. 281—284).

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 6 (1941), 395—398 Série mathématique

З. М. ЛЮБЕЛЬСКИЙ

О ДВУХ ТЕОРЕМАХ ВЕГНЕРА

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

Обобщаются две теоремы Вегнера о существовании простых чисел, по которым, как по модулям, данный многочлен имеет данное разложение.

§ 1

Удо Вегнер доказал теорему, которая может быть противопоставлена известной теореме Бауэра о существовании простых делителей полинома в некоторых арифметических прогрессиях [1]. Эту теорему Вегнера мы обобщим на произвольные полиномы, степень которых не должна быть обязательно простым числом:

Пусть $f(x)$ — целый целочисленный нормированный неприводимый полином степени n, причем n не делится на точный квадрат; пусть $q>1$ — произвольный простой делитель n, не являющийся делителем функции Гаусса $\varphi(m)$. Пусть, наконец, $Q(\alpha)$ обозначает поле, образованное корнем α полинома $f(x)$. Тогда существует бесконечное множество простых чисел $p\equiv 1 \pmod m$, которые имеют в $Q(\alpha)$ простой идеальный делитель степени q.

Доказательство. Пусть α — корень целого целочисленного нормированного полинома $f(x)$ и $Q(\alpha)$ — поле, образованное α. Обозначим через $K_m(x)$ неприводимый полином деления окружности степени m и через ε — один из корней $K_m(x)$ (ε является, таким образом, корнем степени m из единицы). Через $Q(\varepsilon)$ обозначим поле корней степени m из единицы. Пусть, далее, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$ обозначают группы Галуа соответственно полиномов $f(x)\,K_m(x)$, $f(x)$, $K_m(x)$. Так как $Q(\varepsilon)$ является нормальным полем, то можно применить следующую теорему Фробениуса [2]:

Пусть K_1 и K_2 — совершенные алгебраические поля степеней n_1 и n_2. Через n обозначим степень пересечения K полей K_1 и K_2, а через K_3 и n_3 — сумму полей K_1 и K_2 и ее степень. Тогда, если K_2 — поле Галуа, то $n_3=\frac{n_1n_2}{n}$.

По этой теореме степень суммы полей $Q(\alpha)$ и $Q(\varepsilon)$ равна $\frac{n\varphi(m)}{d}$, где d — степень пересечения $Q(\alpha)$ и $Q(\varepsilon)$. Следовательно, $d\mid\varphi(m)$, и таким образом порядок группы $\mathfrak{G}$ должен делиться на n. Если q — произвольный простой делитель n, то $\mathfrak{G}$ содержит, следовательно, q-силовскую

группу $\mathfrak{S}$. Заметим теперь, что все перестановки из $\mathfrak{G}$ возникают в результате перемножения некоторых перестановок, принадлежащих группам $\mathfrak{G}_1$ и $\mathfrak{G}_2$. Пусть S — одна из перестановок из $\mathfrak{S}$, отличная от тождественной. Так как $(q, \varphi(m)) = 1$, то перестановка S получается в результате перемножения некоторой перестановки S_1, принадлежащей $\mathfrak{G}_1$ и содержащей цикл порядка q, с тождественной перестановкой из $\mathfrak{G}_2$. По известной теореме плотностей Фробениуса существует бесконечное множество простых чисел p, обладающих тем свойством, что

$$f(x)\,K_m(x) \equiv \prod f_1(x) \prod K_j(x) \pmod p,$$

$$f(x) \equiv \prod f_1(x) \pmod p, \quad K_m(x) \equiv \prod K_j(x) \pmod p,$$

причем, например, $f_1(x) \bmod p$ имеет степень q, а все $K_j(x) \bmod p$ линейны. Следовательно, такие $p \equiv 1 \pmod m$, если только $(p, m) = 1$. По теореме Дедекинда о связи между теорией идеалов и теорией сравнений p содержит, таким образом, простой идеальный делитель степени q.

Замечание. Если n простое число и $n = m$, мы получаем теорему Вегнера.

§ 2

Ван-дер-Верден и Вегнер показали ([3]), что произведение

$$(x^2 - D) f(x),$$

где $f(x)$ — целый целочисленный неприводимый алгебраически разрешимый полином простой степени и D — его дискриминант, для почти всех простых чисел p содержит $\bmod p$ линейные множители. Покажем, что этим свойством обладают все алгебраически разрешимые, целые целочисленные неприводимые правильные полиномы. При этом правильность мы определяем следующим образом [ср. ([4])]:

Определение. Поле K степени p^m, где p — простое число, назовем правильным, если: 1° $m = 1$, 2° при m, отличном от единицы, K содержит правильное поле K_1 степени p^{m-1}.

Для алгебраически разрешимых правильных полиномов мы доказали следующую теорему:

Пусть K — правильное поле степени p^m над совершенным полем k, K_1 — содержащееся в K поле степени p^{m-1}, $\mathfrak{G}_i = \mathfrak{A}_i - \mathfrak{P}_i$, где $\mathfrak{P}_i$, $\mathfrak{A}_i$ — циклические группы соответственно порядков p и d_i, причем $d_i \mid p - 1$. Обозначим через $\mathfrak{G}$ прямое произведение групп $\mathfrak{G}_i$, $i = 1, 2, \ldots, p^{m-1}$, и через $\mathfrak{G}'$ — группу Галуа поля K. Пусть, наконец, $\overline{\mathfrak{G}}$ — группа, к которой K_1 принадлежит в наименьшем нормальном поле K, и $\mathfrak{G}''$ — нормальный делитель $\mathfrak{G}'$, изоморфный некоторой подгруппе группы $\mathfrak{G}$. Тогда для того, чтобы K было алгебраически разрешимо, необходимо и достаточно, чтобы группа $\overline{\mathfrak{G}}$ была изоморфна некоторой факторгруппе $\mathfrak{G}'/\mathfrak{G}''$.

Если, следовательно, $\left(\frac{D}{P}\right) = -1$, где P обозначает простое число, а D — дискриминант $f(x)$, и $f(x)$ не имеет линейных множителей $\mathrm{mod}\, P$, то, по сформулированной теореме и известной теореме Дедекинда, $f(x)$ имеет $\mathrm{mod}\, P$ p^{m-1} неприводимых множителей. Следовательно, по теореме Штикельберга и Вороного,

$$\left(\frac{D}{P}\right) = (-1)^{p^{m-1}+p^m} = (-1)^{p^{m-2}(p-1)} = 1,$$

что противоречит условию $\left(\frac{D}{P}\right) = -1$.

Если же $\left(\frac{D}{P}\right) = 1$, то $x^2 - D$ имеет линейный множитель $\mathrm{mod}\, P$.

Гос. педагогический институт
Белосток

Поступило
14 IV

ЛИТЕРАТУРА

[1] Wegner U., Ein Satz über die Zerlegung von Primzahlen bestimmter arithmetischer Progressionen in algebraischen Zahlkörpern, Journ. für die reine Mathem., 168 (1932), 231—232.

[2] Frobenius G., Gegenseitige Reduktion algebraischer Körper, Math. Annalen, 70 (1911), 457—458; ср. также Lubelski S., Zur Reduzibilität von Polynomen in der Kongruenztheorie II. Acta Arithmetica, 2 (1937), 256.

[3] Van der Waerden B. L., Noch eine Bemerkung zu der Arbeit «Zur Arithmetik der Polynome von U. Wegner» in Math. Annalen, 105, 628—631, Math. Annalen, 109, 679—680.

[4] Lubelski S., Zur Verallgemeinerung des Galoisschen Kriteriums der algebraischen Auflösbarkeit, Acta Arithmetica, 3 (1938), 130—131.

S. LUBELSKI. ÜBER ZWEI WEGNERSCHE SÄTZE

ZUSAMMENFASSUNG

Es werden zwei folgende Sätze von Wegner verallgemeinert.

I. Wenn $f(x)$ ein ganzes ganzzahliges normiertes irreduzibles Polynom vom Grade n ist, n quadratfrei, $q > 1$ ein beliebiger Primteiler von n, der in der Gausschen Funktion $\varphi(m)$ nicht aufgeht, $\theta(\alpha)$ der durch eine Wurzel α von $f(x)$ gebildete Körper, dann existieren unendlich viele Primzahlen $p \equiv 1 \pmod{m}$, die in $\theta(\alpha)$ einen Primidealteiler vom q-ten Grade enthalten.

Man enthält den Wegnerschen Satz wenn n eine Primzahl und $m = n$ ist.

II. Wenn $f(x)$ ein «reguläres» ganzzahliges normiertes irreduzibles Polynom ist und D — seine Diskriminante, so hat $(x^2 - D)f(x)$ für fast alle Primzahlen p lineare Teiler $(\bmod\ p)$.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 6 (1941), 399—400 Série mathématique

З. М. ЛЮБЕЛЬСКИЙ

ОБОБЩЕНИЕ И ОБРАЩЕНИЕ ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ ГИЛЬБЕРТА

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

Даются условия, необходимые и достаточные для того, чтобы в данном абелевом поле существовал нормальный базис.

Д. Гильберт* доказал следующую теорему:

Всякое абелево поле K степени M, дискриминант D которого взаимно прост с M, имеет нормальный базис.

Обратное предложение, как показано в примечании к этой заметке, не имеет места. Поэтому мы обобщаем эту теорему таким образом, что она становится обратимой. Именно, мы докажем следующую теорему:

Пусть K — абсолютно абелево поле, Q — произвольное циклическое поле, содержащееся в K, степень которого g является степенью простого числа p, и d — дискриминант Q. При этих условиях K содержит фундаментальный нормальный базис тогда и только тогда, когда для всех Q $(g, d) = 1$.

Доказательство. Докажем сначала, что приведенные условия достаточны. С этой целью рассмотрим поле деления окружности K. Как известно, K можно представить в виде суммы циклических полей деления окружности Q_m простых степеней g_m и дискриминанта d_m. По условию $(g_m, d_m) = 1$. По теореме Гильберта, Q_m содержит, следовательно, нормальный базис. Пусть эти нормальные базисы суть

$$w_1, w_2, \ldots, w_{g_1}; \qquad w_2', w_2', \ldots, w_{g_2}'; \ldots;$$

тогда система чисел $w_l^h w_l^{h'} \ldots$, где показатели $h, h', \ldots$ пробегают соответственно числа $1, 2, \ldots, g_1$; $1, 2, \ldots, g_2$; $\ldots$, есть базис, который, очевидно, является нормальным базисом K (см. теорему 88 и доказательство теоремы 132 цитированной работы Гильберта), что и требовалось доказать.

Для доказательства необходимости условий примем, что Q — циклическое поле, содержащееся в K степени $g = p^l$, где p — простое число, и $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_g$ — фундаментальный базис Q. Через $a_1, a_2, \ldots, a_g$ обозначим такие целые рациональные числа, что для них имеет место

$$1 = a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \ldots + a_g\xi_g.$$

* D. Hilbert, Gesammelte Abhandlungen, Bd. I, Berlin, 1932, S. 217 — 218.

Так как группа автоморфизмов Q представима с помощью подстановок (ξ_i, ξ_j) и так как числа $a_1, a_2, \ldots, a_g$ однозначно определены, то должно быть

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_g = a.$$

Таким образом, должно быть $a = \pm 1$. Мы получаем, следовательно,

$$\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_g = \pm 1.$$

Поэтому для произвольного целого числа v имеем

$$\xi_1 + v^m \xi_2 + v^{2m} \xi_3 + \ldots + v^{(g-1)m} \xi_g \equiv \pm 1 \pmod{(1-v)}. \quad (1)$$

Предположим теперь, что v равно некоторому примитивному корню ε уравнения $x^{p^t} - 1 = 0$ и обозначим через Z циркулянту

$$Z = \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \ldots & \xi_g \\ \xi_2 & \xi_3 & \ldots & \xi_{g-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_g & \xi_{g-1} & \ldots & \xi_1 \end{vmatrix}.$$

По известной теореме имеем

$$Z = \prod (\xi_1 + v^m \xi_2 + v^{2m} \xi_3 + \ldots + v^{(g-1)m} \xi_g, \quad v = \varepsilon. \quad (2)$$

Если d означает дискриминат Q, то по (1) и (2)

$$d = Z^2 \equiv 1 \pmod{(1-\varepsilon)},$$

Так как $1 - \varepsilon \mid p$, то должно быть $(p, d) = 1$.

Примечание. Если p_1, p_2, p_3 — три различных нечетных простых числа, для которых $p_1 \mid p_2 - 1$ и $p_2 \mid p_3 - 1$, и K_1 и K_2 — циклические поля соответственно степеней p_1 и p_2, содержащиеся соответственно в p_2-м и p_3-м поле деления окружности, то сумма K полей K_1 и K_2 содержит, по нашей теореме, фундаментальный базис. С другой стороны, так как дискриминанты K_1 и K_2 взаимно просты, находим, что степень K равна $p_1 p_2$ (см., например, теорему 87 в цитированной работе Гильберта). Но дискриминант K делится на $p_2 p_3$ (см., например, теорему 85 там же). Таким образом, степень K не взаимно проста с его дискриминантом. Но так как K все же имеет нормальный базис, то теорема Гильберта необратима.

Гос. педагогический институт
Белосток

Поступило
14 IV 1941

S. LUBELSKI. VERALLGEMEINERUNG UND UMKEHRUNG EINES HILBERTSCHEN SATZES

ZUSAMMENFASSUNG

Der Autor gibt solch eine Verallgemeinerung eines bekannten Satzes von Hilbert, welche auch umkehrbar ist. Der Satz lautet: *K sei ein absolut Abelscher Körper, Q ein beliebiger zyklischer Unterkörper von K, dessen Grad g eine Potenz der Primzahl p ist, d die Diskriminante von Q. Dann enthält K dann und nur dann eine normale Fundamentalbasis, wenn für alle solche Unterkörper Q stets $(g, d) = 1$ ist.*

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 6 (1941), 401—410 Série mathématique

Б. И. СЕГАЛ

СУММЫ ХАРАКТЕРОВ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В работе выводятся некоторые общие асимптотические формулы, относящиеся к элементарной теории чисел.

1. Введение

В настоящей работе мы будем пользоваться следующими обозначениями:

1) p — простое число $\geqslant 5$;

2) q — целое положительное число, удовлетворяющее условию $q < p - 1$;

3) σ — число различных простых делителей $p - 1$;

4) если α — вещественное число, то (α) означает расстояние от α до ближайшего целого;

5) одной и той же буквой Θ мы будем обозначать различные вещественные числа, по абсолютному своему значению меньшие единицы;

6) если k целое число $\geqslant 2$, то

$$\theta_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{при } k = 2, \\ \frac{1}{4} & \text{»} \ k = 3, \\ \frac{3}{2(k+4)} & \text{»} \ k \geqslant 4; \end{cases}$$

$$\rho_k = \frac{3}{8(k+2)}.$$

Пусть m — целое положительное число. Рассмотрим конечное поле (поле Галуа) $[p^m]$, составленное из p^m элементов. Пусть $f_1(x), \ldots, f_r(x)$ означают отличные друг от друга неприводимые многочлены над полем $[p^m]$ со старшими коэффициентами, равными единице, соответственно степеней $k_1, \ldots, k_r$. Обозначим $k = k_1 + \ldots + k_r$. Пусть, далее, $\chi_1, \ldots, \chi_r$ означают любые, неглавные характеры мультипликативной группы поля $[p^m]$ с дополнительным условием $\chi(0) = 0$. При этих предположениях H. Davenport в своей работе ([1]) доказал для суммы характеров вида

$$S(f, \chi) = \sum_{x \in [p^m]} \chi_1(f_1(x)) \ldots \chi_r(f_r(x)) \tag{1}$$

следующее важное неравенство:

$$|S(f, \chi)| \leqslant (k-1)\, p^{m(1-\theta_k)}, \tag{2}$$

причем θ_k может быть заменено через θ_{k-1}, если $\chi_1 \ldots \chi_r = \chi_0$.

Ниже мы воспользуемся неравенством (2) для частного случая $m=1$ (когда данное конечное поле есть полная система вычетов по простому модулю p) и выведем оценку для частичной суммы

$$S(f, \chi;\, q) = \sum_{x=0}^{q} \chi_1(f_1(x)) \ldots \chi_r(f_r(x)) \tag{3}$$

в форме

$$|S(f, \chi;\, q)| < 2\sqrt{r(r-1)+2k}\; p^{1-\theta_k} \log p, \tag{4}$$

где $f_1, \ldots, f_r, \chi_1, \ldots, \chi_r$ удовлетворяют указанным выше условиям.

Случай, когда $k=1$, рассматривался Виноградовым, Polya и Schur'ом *. Случай $k=2$ рассмотрен ранее H. Davenport'ом в его работе [3] (теорема 7), причем полученный им результат в этом частном случае точнее получаемого по формуле (4).

Оценки (2) и (4) мы применяем для вывода некоторых общих теорем о распределении степенных вычетов, первообразных корней и индексов. Частные случаи этих теорем рассматривались в разное время И. М. Виноградовым.

2. Вывод неравенства (4)

Рассмотрим сумму

$$S_b(f, \chi) = S_b = \sum_{x=0}^{p-1} \chi_1(f_1(x)) \ldots \overline{\chi}_r(f_r(x))\, e^{2\pi i \frac{bx}{p}},$$

где b целое, а $\chi_1, \ldots, \chi_r, f_1(x), \ldots, f_r(x)$ удовлетворяют условиям, указанным в § 1. Имеем

$$|S_b|^2 = \sum_y \sum_x \chi_1(f_1(y))\, \overline{\chi}_1(f_1(x)) \ldots \chi_r(f_r(y))\, \overline{\chi}_r(f_r(x))\, e^{2\pi i \frac{b(y-x)}{p}},$$

где x и y независимо друг от друга пробегают полные системы вычетов по модулю p. Полагая $y = x+t$, находим

$$|S_b|^2 = \sum_{t=0}^{p-1} e^{2\pi i \frac{bt}{p}} \sum_{x=0}^{p-1} \chi_1(f_1(x+t))\, \overline{\chi}_1(f_1(x)) \ldots \chi_r(f_r(x+t))\, \overline{\chi}_r(f_r(x)) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{t=0}^{p-1} \left| \sum_{x=0}^{p-1} \chi_1(f_1(x+t))\, \overline{\chi}_1(f_1(x)) \ldots \chi_r(f_r(x+t))\, \overline{\chi}_r(f_r(x)) \right|. \tag{5}$$

---

* Ср., например, Satz 494 в книге [2].

Заметим, что если $f_1(x), \ldots, f_r(x)$ неприводимы, то при данном t многочлены $f_1(x+t), \ldots, f_r(x+t)$ также неприводимы. Кроме случая $t=0$, существует еще самое большее $r(r-1)$ значений t, при которых какой-либо из многочленов $f_1(x+t), \ldots, f_r(x+t)$ оказывается равным одному из многочленов $f_1(x), \ldots, f_r(x)$.

При каждом из этих $r(r-1)+1$ значений t мы воспользуемся для внутренней суммы правой части (5) очевидной оценкой, а при всех остальных значениях t мы можем воспользоваться неравенством (2). Поэтому

$$|S_b|^2 \leqslant (r(r-1)+1)\,p + (p - r(r-1) - 1)(2k-1)\,p^{1-\theta_{2k}} < \\ < r(r-1)\,p + 2kp^{2-\theta_{2k}} < (r(r-1)+2k)\,p^{2-\theta_{2k}},$$

откуда

$$|S_b(f, \chi)| < \sqrt{r(r-1)+2k} \cdot p^{1-\theta_{2k}}. \tag{6}$$

Далее имеем

$$p\,|S(f, \chi; q)| = \left|\sum_{y=0}^{q} \sum_{x=0}^{p-1} \sum_{b=0}^{p-1} \chi_1(f_1(x)) \ldots \chi_r(f_r(x))\, e^{2\pi i \frac{b(x-y)}{p}}\right| \leqslant \\ \leqslant \sum_{y=0}^{q} \left|\sum_{x=0}^{p-1} \chi_1(f_1(x)) \ldots \chi_r(f_r(x))\right| + \\ + \sum_{b=1}^{p-1} \left|\sum_{x=0}^{p-1} \chi_1(f_1(x)) \ldots \chi_r(f_r(x))\, e^{2\pi i \frac{bx}{p}}\right| \cdot \left|\sum_{y=0}^{q} e^{-2\pi i \frac{by}{p}}\right| = \\ = (q+1) \cdot |S_0(f, \chi)| + \sum_{b=1}^{p-1} |S_b(f, \chi)| \cdot \left|\sum_{y=0}^{q} e^{-2\pi i \frac{by}{p}}\right|.$$

Применяя неравенство (6) и замечая, что

$$\sum_{b=1}^{p-1} \left|\sum_{y=0}^{q} e^{-2\pi i \frac{by}{p}}\right| \leqslant \sum_{b=1}^{p-1} \frac{1}{2\left(\frac{b}{p}\right)} < p \log p,$$

находим

$$p\,|S(f, \chi; q)| < (q+1)\sqrt{r(r-1)+2k}\,p^{1-\theta_{2k}} + \sqrt{r(r-1)+2k}\,p^{1-\theta_{2k}}\,p\log p < \\ < 2\sqrt{r(r-1)+2k}\,p^{2-\theta_{2k}} \log p,$$

откуда и следует доказываемое неравенство (4).

3. Последовательности степенных вычетов

Пусть $\chi_1, \ldots, \chi_n$ означают n неглавных характеров по модулю p и пусть $l_1, \ldots, l_n$ — соответственно их порядки. Пусть, кроме того, заданы произвольные корни из единицы $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ соответственно степеней $l_1, \ldots, l_n$. Обозначим через $E(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ число последовательностей

$$x+1, \ldots, x+n \tag{7}$$

из ряда чисел 1, 2, ..., $p-1$, для которых

$$\chi_1(x+1)=\varepsilon_1, \ldots, \chi_n(x+n)=\varepsilon_n, \tag{8}$$

и через $E_q(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ — число последовательностей (7) из ряда чисел 1, 2, ..., q, для которых выполнены те же равенства (8).

В своей работе (¹) (§ 9) H. Davenport доказал при помощи неравенства (2) асимптотическую формулу

$$E(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)=\frac{p}{l_1 \ldots l_n}+\Theta \cdot n\,(p^{1-\vartheta_n}+1). \tag{9}$$

Докажем следующую теорему:

ТЕОРЕМА 1. *Если* $n \geqslant 2$, *то*

$$E_q(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)=\frac{q}{l_1 \ldots l_n}+\Theta \cdot 2\,(n+1)\,p^{1-\rho_n}\log p. \tag{10}$$

Доказательство. Легко проверить, что

$$(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)=\frac{1}{l_1 \ldots l_n}\sum_{x=0}^{q-n}\prod_{\lambda=1}^{n}\left(1+\varepsilon_\lambda^{-1}\chi_\lambda(x+\lambda)+\ldots+\varepsilon_\lambda^{-(l_\lambda-1)}\chi_\lambda^{l_\lambda-1}(x+\lambda)\right).$$

Действительно, каждое слагаемое суммы правой части равно $l_1, \ldots, l_n$, если исполнены все равенства (8), и равно нулю, если хотя одно из этих равенств не исполнено. Произведя умножение под знаком суммы, мы получим $l_1 \ldots l_n$ сумм, причем первая из этих сумм состоит из $q-n+1$ слагаемых, каждое из которых есть единица, а каждая из $l_1 \ldots l_n-1$ остающихся сумм представляет частичную сумму характеров вида

$$\sum_{x=0}^{q-n}\chi_1'(x+\lambda_1)\ldots\chi_r'(x+\lambda_r), \quad 1 \leqslant r \leqslant n,$$

с различными $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ и неглавными характерами $\chi_1', \ldots, \chi_r'$. При $r=1$ мы можем воспользоваться для оценки такой суммы теоремой 494 книги (²). При $r>1$ мы пользуемся для оценки такой суммы неравенством (4). Поэтому

$$E_q(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)=\frac{q-n+1}{l_1 \ldots l_n}+\frac{\Theta}{l_1 \ldots l_n}(l_1 \ldots l_n-1)\cdot 2\sqrt{n(n-1)+2n}\cdot p^{1-\rho_n}\log p=$$
$$=\frac{q}{l_1 \ldots l_n}+\Theta \cdot 2\,(n+1)\,p^{1-\rho_n}\log p,$$

что и требовалось доказать.

Если воспользоваться теоремой 7 работы Davenport'a (³), то остаточный член в асимптотической формуле (10) для частного случая $n=2$ может быть улучшен.

Из доказанной теоремы 1 может быть непосредственно выведено

Следствие 1. *Если* $n \geqslant 2$ *и*

$$2(n+1)\, l_1 \ldots l_n\, p^{1-\theta_n} \log p < q < p-1,$$

то среди чисел $1, 2, \ldots, q$ *имеется по меньшей мере одна последовательность* $x+1, \ldots, x+n$, *удовлетворяющая равенствам* (8).

4. Последовательности первообразных корней

Пусть каждое из чисел $l_1, \ldots, l_n$ не меньше двух и делит $p-1$. Обозначим через $H(l_1, \ldots, l_n)$ число последовательностей

$$x+1,\ x+2, \ldots, x+n, \tag{11}$$

находящихся среди чисел $1, 2, \ldots, p-1$, таких, что $x+\lambda$ есть вычет степени l_λ по модулю $p\,(\lambda=1, \ldots, n)$.

Полагая в асимптотической формуле (9)

$$\chi_1(y) = e^{2\pi i \frac{\operatorname{ind} y}{l_1}}, \ldots, \chi_n(y) = e^{2\pi i \frac{\operatorname{ind} y}{l_n}},$$
$$\varepsilon_1 = \ldots = \varepsilon_n = 1,$$

мы получаем

$$H(l_1, \ldots, l_n) = \frac{p}{l_1 \ldots l_n} + \Theta \cdot n\,(p^{1-\theta_n}+1). \tag{12}$$

Эта формула, очевидно, справедлива также и в случае, когда несколько или даже все числа $l_1, \ldots, l_n$ равны единице.

При помощи формулы (12) можно вывести асимптотическую формулу для числа $H_1(l_1, \ldots, l_{n-1})$ последовательностей (11), находящихся среди чисел $1, \ldots, p-1$, таких, что $x+\lambda$ есть вычет степени $l_\lambda\,(\lambda=1, \ldots, n-1)$, а $x+n$ — первообразный корень по модулю p. В самом деле, $x+n$ будет первообразным корнем по модулю p тогда и только тогда, когда $\operatorname{ind}(x+n)$ и $p-1$ взаимно простые. Поэтому

$$H_1(l_1, \ldots, l_{n-1}) = \sum_{l_n \mid p-1} \mu(l_n)\, H(l_1, \ldots, l_n) =$$
$$= \frac{p}{l_1 \ldots l_{n-1}} \sum_{l_n \mid p-1} \frac{\mu(l_n)}{l_n} + \Theta \cdot 2^{c} n\,(p^{1-\theta_n}+1).$$

Таким образом,

$$H_1(l_1, \ldots, l_{n-1}) = \frac{p}{l_1 \ldots l_{n-1}}\, \frac{\varphi(p-1)}{p-1} + \Theta \cdot 2^{c} n\,(p^{1-\theta_n}+1).$$

Пользуясь этой формулой, мы аналогично найдем для числа $H_2(l_1, \ldots, l_{n-2})$ последовательностей (11), находящихся среди чисел $1, \ldots, p-1$, таких, что $x+\lambda$ есть вычет степени $l_\lambda\,(\lambda=1, \ldots, n-2)$, а $x+n-1$ и $x+n$ суть одновременно первообразные корни по модулю p, следующую формулу

$$H_2(l_1, \ldots, l_{n-2}) = \frac{p}{l_1 \ldots l_{n-2}} \left(\frac{\varphi(p-1)}{p-1}\right)^2 + \Theta \cdot 2^{2c} n\,(p^{1-\theta_n}+1).$$

После n-кратного повторения этого процесса, мы получим для числа H_n последовательностей (11), находящихся среди чисел $1, \ldots, p-1$, таких что каждое из чисел этой последовательности есть первообразный корень по модулю p, следующую асимптотическую формулу:

$$H_n = p\left(\frac{\varphi(p-1)}{p-1}\right)^n + \Theta \cdot 2^{nc} \cdot n\,(p^{1-\delta_n} + 1). \qquad (13)$$

Итак, мы получили следующую теорему:

ТЕОРЕМА 2. *Если n целое $\geqslant 2$, то для числа H_n последовательностей, находящихся среди чисел $1, 2, \ldots, p-1$ и состоящих из n последовательных целых чисел, каждое из которых есть первообразный корень по модулю p, справедлива асимптотическая формула* (13).

Из этой теоремы непосредственно выводится

Следствие 2. *Для любого целого n можно указать постоянное C, зависящее только от n, такое, что для каждого $p > C$ существует n последовательных целых чисел, каждое из которых есть первообразный корень по модулю p.*

Применяя способ, изложенный при доказательстве теоремы 2 и пользуясь асимптотической формулой (10), можно доказать следующую теорему:

ТЕОРЕМА 3. *Если $n \geqslant 2$, то для числа $H_n(q)$ последовательностей $x+1, x+2, \ldots, x+n$, находящихся среди чисел $1, 2, \ldots, q$, таких, что каждый член этой последовательности есть первообразный корень, имеем*

$$H_n(q) = q\left(\frac{\varphi(p-1)}{p-1}\right)^n + \Theta\,(n+1)\,2^{nc+1}\,p^{1-\delta_n}\log p. \qquad (14)$$

Из этой теоремы непосредственно выводится

Следствие 3. *Если $n \geqslant 2$, и*

$$(n+1)\,2^{2nc+1}\,p^{1-\frac{3}{8(n+2)}}\log p < q < p-1,$$

то среди чисел $1, 2, \ldots, q$ имеется по меньшей мере одна последовательность, состоящая из n последовательных целых чисел, каждое из которых является первообразным корнем по модулю p.

5. Распределение значений многочлена, являющихся степенными вычетами или первообразными корнями

Пусть $f(x)$ — многочлен степени n с целыми коэффициентами (о старшем коэффициенте мы предполагаем лишь, что он не делится на p). Мы будем считать, что $f(x)$ по модулю p не делится на квадрат многочлена, отличного от постоянного. Другими словами, мы будем считать, что не существует многочленов $g_1(x)$ и $g_2(x)$, таких, что сравнение

$$f(x) \equiv (g_1(x))^2\, g_2(x) \pmod{p}$$

удовлетворяется при всех значениях x, причем $g_1(x)$ отлично от постоянного. Пусть χ означает характер порядка l по модулю p, где l — дели-

тель $p-1$, больший единицы. Тогда, как нетрудно вывести из неравенств (2) и (4),

$$\left|\sum_{x=0}^{p-1}\chi(f(x))\right| < (n-1)\,p^{1-\theta_n}, \tag{15}$$

$$\left|\sum_{x=0}^{q}\chi(f(x))\right| < 2(n+1)\,p^{1-\theta_n}\log p. \tag{16}$$

Допустим, что ε — заданный корень степени l из единицы и $f(x)$ удовлетворяет указанным выше условиям. Обозначим через $E(f;\varepsilon)$ число начении многочлена $f(x)$, получаемых при $x=0, 1, \ldots, p-1$, для которых $\chi(f(x))=\varepsilon$, а через $E_q(f;\varepsilon)$ — число значений многочлена $f(x)$, получаемых при $x=0, 1, \ldots, q$, для которых исполнено то же равенство, т. е. $\chi(f(x))=\varepsilon$. Имеем

$$E(f;\varepsilon)=\frac{1}{l}\sum_{x=0}^{p-1}\sum_{\lambda=0}^{l-1}\varepsilon^{-\lambda}\chi^{\lambda}(f(x)),$$

$$E_q(f;\varepsilon)=\frac{1}{l}\sum_{x=0}^{q}\sum_{\lambda=0}^{l-1}\varepsilon^{-\lambda}\chi^{\lambda}(f(x)).$$

Применяя к последним равенствам соотношения (2) и (4), находим

$$E(f;\varepsilon)=\frac{p}{l}+\Theta(n-1)\,p^{1-\theta_n}, \tag{17}$$

$$E_q(f;\varepsilon)=\frac{q}{l}+\Theta\cdot 2(n+1)\,p^{1-\theta_n}\log p. \tag{18}$$

Последние асимптотические формулы характеризуют распределение степенных вычетов по модулю p, являющихся значениями многочлена n-ой степени, если этот многочлен по модулю p не делится на квадрат другого многочлена, отличного от постоянного. При помощи формул (17) и (18) мы можем также вывести асимптотические формулы, характеризующие распределение значений такого же многочлена, являющихся первообразными корнями по модулю p. Для этого необходимо лишь к формулам (17) и (18) применить рассуждения, аналогичные изложенным в § 4, и мы получим следующую теорему:

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $f(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами степени n. Если $f(x)$ по модулю p не делится на квадрат другого многочлена, отличного от постоянного, то для числа $H(f)$ значений этого многочлена при $x=0, 1, \ldots, p-1$, являющихся первообразными корнями по модулю p, имеет место асимптотическая формула*

$$p\,\frac{\varphi(p-1)}{p-1}+\Theta\cdot 2^{c}(n-1)\,p^{1-\theta_n}, \tag{19}$$

а для числа $H_q(f)$ значений того же многочлена при $x=0, 1, \ldots, q$,

являющихся первообразными корнями по модулю p, имеет место асимптотическая формула

$$q\,\frac{\varphi(p-1)}{p-1}+\Theta\cdot 2^{\sigma+1}(n+1)\,p^{1-\rho_n}\log p. \tag{20}$$

6. Распределение индексов

При помощи неравенств (2) и (4) можно вывести ряд асимптотических формул, характеризующих распределение индексов. Мы ограничимся выводом двух таких формул. Пусть $Q_1, \dots Q_n$ — целые положительные числа, удовлетворяющие условиям $Q_\nu \leqslant p-1$, $\nu=1, \dots, n$. Обозначим через $L(Q_1, \dots, Q_n)$ число последовательностей $x+1, \dots, x+n$, находящихся среди чисел $1, \dots, p-1$, для которых одновременно исполнены неравенства

$$1 \leqslant \operatorname{ind}(x+1) \leqslant Q_1, \ \dots, \ 1 \leqslant \operatorname{ind}(x+n) \leqslant Q_n, \tag{21}$$

а через $L(Q_1, \dots, Q_n)$ — число таких же последовательностей, находящихся среди чисел $1, \dots, q$, для которых исполнены те же неравенства (21)

ТЕОРЕМА 4. *Если* $n \geqslant 2$, *то*

$$L(Q_1, \dots, Q_n)=\frac{Q_1 \dots Q_n}{(p-1)^{n-1}}+\Theta n 2^n (p^{1-\rho_n}+2)\log^n(p-1). \tag{22}$$

$$L_q(Q_1, \dots, Q_n)=q\,\frac{Q_1 \dots Q_n}{(p-1)^n}+\Theta(n+1)\,2^{n+1}(p^{1-\rho_n}+1)\log^{n+1}p. \tag{23}$$

Доказательство. Нетрудно проверить, что

$$L(Q_1, \dots, Q_n)=$$
$$=\frac{1}{(p-1)^n}\sum_{x=0}^{p-n-1}\sum_{y_1=1}^{Q_1}\cdots\sum_{y_n=1}^{Q_n}\sum_{z_1=0}^{p-2}\cdots\sum_{z_n=0}^{p-2} e^{\frac{2\pi i}{p-1}(z_1(\operatorname{ind}(x+1)-y_1)+\dots+z_n(\operatorname{ind}(x+n)-y_n))}.$$

Изменив порядок суммирования и выделив члены, соответствующие $z_1=\dots=z_n=0$, получим

$$L(Q_1, \dots, Q_n)=\frac{p-n}{(p-1)^n}\,Q_1 \dots Q_n+T, \tag{24}$$

где

$$T=\frac{1}{(p-1)^n}\sum_{z_1, \dots, z_n}^{*}\sum_{y_1=1}^{Q_1}\cdots$$
$$\cdots\sum_{y_n=1}^{Q_n}\sum_{x=0}^{p-n-1} e^{\frac{2\pi i}{p-1}(z_1(\operatorname{ind}(x+1)-y_1)+\dots+z_n(\operatorname{ind}(x+n)-y_n))},$$

причем $\sum^*$ распространяется на все $z_1, \dots, z_n$, независимо друг от друга пробегающие значения $0, 1, \dots, p-2$, за исключением $z_1=\dots=z_n=0$. Поэтому

$$|T| \leqslant \frac{1}{(p-1)^n} \sum_{z_1, \ldots, z_n}{}^{*} \left| \sum_{y_1=1}^{Q_1} \ldots \sum_{y_n=1}^{Q_n} e^{-\frac{2\pi i}{p-1}(y_1 z_1 + \ldots + y_n z_n)} \right| \times$$

$$\times \left(\left| \sum_{x=0}^{p-1} e^{-\frac{2\pi i}{p-1}(z_1 \operatorname{ind}(x+1) + \ldots + z_n \operatorname{ind}(x+n))} \right| + n \right).$$

Применяя к последней сумме правой части неравенство (2), получаем

$$|T| \leqslant \frac{n(p^{1-\theta_n}+1)}{(p-1)^n} \sum_{z_1, \ldots, z_n}{}^{*} \left| \sum_{y_1=1}^{Q_1} \ldots \sum_{y_n=1}^{Q_n} e^{-\frac{2\pi i}{p-1}(y_1 z_1 + \ldots + y_n z_n)} \right| <$$

$$< \frac{n(p^{1-\theta_n}+1)}{(p-1)^n} \sum_{z_1=0}^{p-2} \ldots \sum_{z_n=0}^{p-2} \left| \sum_{y_1=1}^{Q_1} e^{-\frac{2\pi i}{p-1} y_1 z_1} \right| \ldots \left| \sum_{y_n=0}^{Q_n} e^{-\frac{2\pi i}{p-1} y_n z_n} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{n(p^{1-\theta_n}+1)}{(p-1)^n} \left(Q_1 + \sum_{z_1=1}^{p-2} \frac{1}{2\left(\left(\frac{z_1}{p-1}\right)\right)} \right) \ldots \left(Q_n + \sum_{z_n=1}^{p-2} \frac{1}{2\left(\left(\frac{z_n}{p-1}\right)\right)} \right) <$$

$$< \frac{n(p^{1-\theta_n}+1)}{(p-1)^n} [Q_1 + (p-1)\log(p-1)] \ldots [Q_n + (p-1)\log(p-1)] <$$

$$< n 2^n (p^{1-\theta_n}+1) \log^n (p-1).$$

Следовательно, из (24) находим

$$L(Q_1, \ldots, Q_n) = \frac{p-n}{(p-1)^n} Q_1 \ldots Q_n + \Theta n 2^n (p^{1-\theta_n}+1) \log^n (p-1),$$

откуда непосредственно следует формула (22). Аналогично можно доказать формулу (23), если воспользоваться неравенством (4).

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии Наук СССР

Поступило
30 V 1941

ЛИТЕРАТУРА

[1] Davenport H., On character sums in finite fields, Acta Math., 71 (1939), 99—121.
[2] Landau E., Vorlesungen über Zahlentheorie, Bd. II, Leipzig (1927).
[3] Davenport H., On certain exponential sums, Journ. reine und angewandte Math. (Crelle), 169 (1932), 158—176.

B. SEGAL. CHARACTER SUMS AND THEIR APPLICATION

SUMMARY

In the present paper we use an estimate of character sums given by Davenport [1] and we deduce an estimate of a corresponding partial character sum in the case when the given finite field is a complete system of residues (mod p). Further by application of the estimates mentioned above we prove some general asymptotical formulae in the elementary theory of numbers. These formulae are connected with the distribution of power-residues, of primitive roots and of indices (mod p).

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 6 (1941), 411—422 Série mathématique

Л. И. ШАТРОВСКИЙ

К ВОПРОСУ О ДВУХ ТЕОРЕМАХ ЭРДЕША ДЛЯ МНОЖЕСТВ ЦЕЛЫХ ТОЧЕК n-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

(*Представлено академиком* **С. Л. Соболевым**)

Работа посвящена обобщению теорем Эрдеша, относящихся к базисам натурального ряда чисел, на случай базисов n-мерных целочисленных решеток.

§ 1

В 1936 г. Эрдеш опубликовал доказательство следующей теоремы [1]: *Пусть A — последовательность натуральных чисел плотности α, т. е.*

$$\inf_{n \geq 1} \frac{A(n)}{n} = \alpha,$$

а последовательность B образует базис натурального ряда порядка l (натуральный ряд мы будем обозначать через N), т. е. l — наименьшее натуральное число, для которого $lB = N$. Тогда плотность γ последовательности $A+B$ чисел $\varepsilon_1 a + \varepsilon_2 b$, где $a \in A$, $b \in B$, а ε_1 и ε_2 принимают значения 0 или 1, причем $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \neq 0$ удовлетворяет неравенству

$$\gamma \geq \alpha + \frac{\alpha(1-\alpha)}{2l}.$$

Ландау [2] усилил эту оценку, заменив число l величиной

$$\lambda = \sup_{n \geq 1} \frac{\sum_{m=1}^{n} g(m)}{n}, \tag{1}$$

где $g(m)$ — минимальное число слагаемых, необходимых для представления числа m, как суммы членов последовательности B. Таким образом, по Ландау

$$\gamma \geq \alpha + \frac{\alpha(1-\alpha)}{2\lambda},$$

где λ удовлетворяет условию (1). Однако, как показал Райков *, все последовательности, удовлетворяющие условию (1), являются базисами некоторого конечного порядка l, причем, как заметил И. М. Виноградов, $l \leq 2\lambda$.

---

* См. Д. А. Райков, О сложении множеств в смысле Шнирельмана, Матем. сборн., т. 5 (27) : 2, (1939), 425—440; сноска на стр. 435.

Аналогичная теорема доказана Эрдешом для суммы последовательности асимптотической плотности α^* с базисом порядка l (³). Имеется и аналог усиленной теоремы Эрдеша-Ландау, где вторым слагаемым является асимптотический базис B порядка l^*, т. е. такая последовательность, что для всякого $m > m_0$, $m \in l^*B$, причем в оценке асимптотической плотности суммы фиксируется число λ^*, определяемое следующим образом:

$$\lambda^* = \sup_{n > m_0} \frac{\sum\limits_{m=m_0+1}^{n} g(m)}{n}. \tag{2}$$

Эта теорема формулируется следующим образом:

Пусть последовательность A имеет асимптотическую плотность α^*, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n} = \alpha^*, \tag{3}$$

а последовательность B удовлетворяет условию (2).

Тогда асимптотическая плотность γ^* последовательности $A + B$ оценивается следующим образом:

$$\gamma^* \geqslant \alpha^* + \frac{\alpha^*(1-\alpha^*)}{2\lambda^*}.$$

Целью настоящей работы является доказательство аналогичных теорем в области целых точек n-мерного пространства, в частности, для целых гауссовых чисел. Выведенные оценки при $n = 1$ совпадают с приведенными выше усиленными оценками Эрдеша. Для доказательства используется метод E. Landau, который, однако, оказывается применимым лишь для множеств плотности $\alpha < \frac{1}{2^{n-1}}$. Возможно, что полное решение вопроса зависит от более точной оценки числа решений уравнения

$$\bar{a} + \bar{w} = a',$$

рассматриваемого в § 3 настоящей работы.

§ 2

Пусть M — множество всех точек $\bar{m}$ пространства E^n, координаты $m_1, m_2, \ldots, m_n$ которых суть целые неотрицательные числа, не равные одновременно нулю. Складывая точки $\bar{p} \in M$, $\bar{q} \in M$ как векторы, мы можем определить сложение подмножеств множества M аналогично сложению числовых последовательностей в смысле Шнирельмана. А именно, мы будем говорить, что $C = A + B$, где $A \subset M$, $B \subset M$, если C состоит из всевозможных сумм вида

$$\bar{c} = \varepsilon_1 \bar{a} + \varepsilon_2 \bar{b},$$

где $\bar{a} \in A$, $\bar{b} \in B$, а ε_1 и ε_2 принимают значения 0 или 1, причем

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \neq 0.$$

Пусть далее $\overline{m}' \subset \overline{m}$ означает, что координаты точки $\overline{m}'$ не превосходят соответствующих координат точки $\overline{m}$. Если теперь A, B, ... — подмножества M, то под $A(\overline{m})$, $B(\overline{m})$, ... будут пониматься числа элементов $\overline{a} \in A$, $\overline{b} \in B$, ... для которых $\overline{a} \subset \overline{m}$, $\overline{b} \subset \overline{m}$, ...

Определение I. *Плотностью множества A называется число*

$$D(A) = \inf_{\overline{m} \in M} \frac{A(\overline{m})}{M(\overline{m})} \tag{4}$$

Определение II. *Асимптотической плотностью множества A называется число*

$$D^*(A) = \underline{\lim}_{\overline{m} \in M} \frac{A(\overline{m})}{M(\overline{m})}.$$

Определение III. *Множество $B \subset A$ называется базисом порядка l для множества M, короче, просто базисом порядка l, если l — наименьшее целое положительное число, которое обладает тем свойством, что всякое $\overline{m} \in M$ представимо в виде*

$$\overline{m} = \overline{b}^{(1)} + \overline{b}^{(2)} + \ldots + \overline{b}^{(h)}, \quad (\overline{b}^{(i)} \in B), \tag{5}$$

где $h \leqslant l$. Число

$$\lambda = \sup_{\overline{m} \in M} \frac{\sum\limits_{\overline{m}' \subset \overline{m}} g(\overline{m}')}{M(\overline{m})}, \tag{6}$$

где $g(\overline{m})$ — наименьшее из возможных для $\overline{m}$ чисел h разложения (5), называется по Райкову (4) высотой базиса B. Аналогичное определение дадим для асимптотического базиса.

Определение IV. *Асимптотическим базисом порядка l^* называется такое множество B, которое обладает тем свойством, что для всех $\overline{m}$, удовлетворяющих соотношению $\overline{m} \supset \overline{m}^0$, возможно представление*

$$\overline{m} = \overline{b}^{(1)} + \overline{b}^{(2)} + \ldots + \overline{b}^{(h)}, \quad (\overline{b}^{(i)} \in B),$$

где $h \leqslant l$. Число

$$\lambda^* = \overline{\lim_{\overline{m}^0 \in M}} \lambda^*_{\overline{m}_0}, \tag{7}$$

где

$$\lambda^*_{\overline{m}_0} = \sup_{\overline{m} \supset \overline{m}_0} \frac{\sum\limits_{\overline{m}^0 \subset \overline{m}' \subset \overline{m}} g(\overline{m}')}{M(\overline{m})},$$

называется асимптотической высотой множества B.

§ 3

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* $A \subset M$ *и* $D(A) = \alpha < \frac{1}{2^{n-1}}$, *а* $B \subset M$ — *базис высоты* λ. *Если теперь* $C = A + B$ *и* $D(c) = \gamma$, *то*

$$\gamma \geqslant \alpha + \frac{\alpha(1 - 2^{n-1}\alpha)}{2^n \lambda}. \tag{8}$$

Очевидно, неравенство (8) достаточно доказать для $\gamma_1 = D(C_1)$, где C_1 — множество точек вида $\bar{a} + \varepsilon_2 \bar{b}$, так как $C_1 \subset C$.

Пусть $\bar{m}$ — любая точка из M и $\bar{w} \subset \bar{m}$. Если $A(\bar{m}) \geqslant \gamma M(\bar{m})$, то доказывать нечего. Поэтому предположим, что

$$A(\bar{m}) < \gamma M(\bar{m}). \tag{9}$$

Пусть, соответственно, $A_{\bar{w}}(\bar{m})$ и $\bar{A}_{\bar{w}}(\bar{m})$ — числа таких точек $\bar{a} + \bar{w} \subset \bar{m}$, где $\bar{a} \in A$, которые принадлежат A или $\bar{A} = M - A$. Очевидно, что

$$A_{\bar{w}}(\bar{m}) + \bar{A}_{\bar{w}}(\bar{m}) = A(\bar{m} - \bar{w}). \tag{10}$$

Отсюда

$$\sum_{\bar{w} \subset \bar{m}} A(\bar{m} - \bar{w}) = \sum_{\bar{w} \subset \bar{m}} A_{\bar{w}}(\bar{m}) + \sum_{\bar{w} \subset \bar{m}} \bar{A}_{\bar{w}}(m).$$

Легко видеть, что $\sum_{\bar{w} \subset \bar{m}} A_{\bar{w}}(\bar{m})$ — число решений уравнения $\bar{a} + \bar{w} = \bar{a}'$, где $\bar{a} \in A$, $\bar{a}' \in A$ и $\bar{a} \subset \bar{m}$, $\bar{a}' \subset \bar{m}$, $\bar{w} \subset \bar{m}$ $(\bar{a} \neq \bar{a}')$, т. е. во всяком случае это число не превышает $(A_2^{(m)})$*.

Итак,

$$\sum_{\bar{w} \subset \bar{m}} A_{\bar{w}}(\bar{m}) \leqslant \binom{A(\bar{m})}{2} = \frac{A^2(\bar{m})}{2} - \frac{A(\bar{m})}{2}. \tag{11}$$

Пусть теперь $R(\bar{m})$ — число точек $\bar{a} + \bar{b} \subset \bar{m}$, не принадлежащих A, т. е.

$$R(\bar{m}) = C_1(\bar{m}) - A(\bar{m}). \tag{12}$$

Покажем, что

$$\bar{A}_{\bar{w}}(\bar{m}) \leqslant g(\bar{w}) R(\bar{m}), \tag{13}$$

где $g(\bar{w})$ — наименьшее число слагаемых в представлении $\bar{w}$ в виде (5).

Действительно, пусть

$$\bar{w} = \bar{b}^{(1)} + \bar{b}^{(2)} + \ldots + \bar{b}^{(g(\bar{w}))}.$$

---

* Более точная оценка числа решений этого уравнения дала бы возможность доказать теорему для $\alpha \geqslant \frac{1}{2^{n-1}}$. Я предполагаю, что это число равно $\frac{1}{2^{n-1}} \binom{A(\bar{m})}{2} + \varphi(\bar{m})$, где φ — убывающая функция от $M(\bar{m})$.

Так как $\bar a + \bar w \in \bar A$, то найдется наименьшее $h \leq g(\bar w)$, для которого

$$\left.\begin{aligned} &\bar a + \sum_{i=1}^{h-1} \bar b^{(i)} = \bar a' \in A, \\ &\bar a + \sum_{i=1}^{R} \bar b^{(i)} = \bar a' + \bar b^{(h)} \in \bar A. \end{aligned}\right\}$$

Каждое $\bar a$, для которого $\bar a + \bar w \in A$, будет соответствовать некоторому R, а всего для фиксированного R будет

$$A_{\bar b}(\bar m) \leq R(\bar m)$$

таких $\bar a$. Суммируя по всем R от 1 до $g(\bar w)$, получим утверждение (13), так как

$$A_{\bar w}(\bar m) \leq \sum_{i=1}^{g(w)} A_{\bar b^{(i)}}(\bar m).$$

Просуммируем теперь $A(\bar w)$ по всем $\bar w \subset \bar m$. Из (10), (11), (13), (6) и (12) следует

$$\sum_{\bar w \subset \bar m} A(\bar w) = \sum_{\bar w \subset \bar m} A(\bar m - \bar w) + A(\bar m) \leq \frac{A^2(\bar m)}{2} + \frac{A(\bar m)}{2} +$$
$$+ \lambda R(\bar m) M(\bar m) \doteq \frac{A^2(\bar m)}{2} + \frac{A(\bar m)}{2} + \lambda M(\bar m)\left\{C_1(\bar m) - A(\bar m)\right\},$$

откуда

$$C(\bar m) \geq C_1(\bar m) \geq A(\bar m) - \frac{A^2(\bar m)}{2\lambda M(\bar m)} + \frac{\sum\limits_{\bar w \subset \bar m} A(\bar w)}{\lambda M(\bar m)} - \frac{A(\bar m)}{2\lambda M(\bar m)}. \tag{14}$$

Замечая теперь, что при $z = A(\bar m) \leq \lambda M(\bar m)$

$$z - \frac{z^2}{2\lambda M(\bar m)}$$

будет неубывающей функцией, получим

$$A(\bar m) - \frac{A^2(\bar m)}{2\lambda M(\bar m)} \geq \alpha M(\bar m) - \frac{\alpha^2 M(\bar m)}{2\lambda}. \tag{15}$$

Вычислим $\sum\limits_{\bar w \subset \bar m} A(\bar w)$. Из (4) следует

$$\sum_{\bar w \subset \bar m} A(\bar w) \geq \alpha \sum_{\bar w \subset \bar m} M(\bar w),$$

и так как

$$M(\bar w) = (w_1 + 1)(w_2 + 1)\ldots(w_n + 1),$$

где $w_1, w_2, \ldots, w_n$ — координаты точки $\bar{w}$, то

$$\sum_{\bar{w}\subset\bar{m}} A(\bar{w}) \geqslant \alpha \sum_{w_1=0}^{m_1} \ldots \sum_{w_n=0}^{m_n} \{(w_1+1)\ldots(w_n+1)-1\} =$$

$$= \alpha\left\{\sum_{w_1=0}^{m_1}(w_1+1)\sum_{w_2=0}^{m_2}(w_2+1)\ldots\sum_{w_n=0}^{m_n}(w_n+1) - \sum_{w_1=0}^{m_1}\ldots\sum_{w_n=0}^{m_n} 1\right\} =$$

$$= \alpha\left\{\frac{(m_1+1)\ldots(m_n+1)(m_1+2)\ldots(m_n+2)}{2^n} - (m_1+1)\ldots(m_n+1)\right\}.$$

Так как $\prod_{i=1}^{n}(m_i+2) - \prod_{i=1}^{n}(m_i+1) \geqslant 2^n$, если хотя бы один из $m_i > 0$ (что, впрочем, следует из $\bar{m} \in M$), то

$$\sum_{\bar{w}\subset\bar{m}} A(\bar{w}) \geqslant \alpha \prod_{i=1}^{n}(m_i+1)\left\{\frac{1}{2^n}\prod_{i=1}^{n}(m_i+2) - 1\right\} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\alpha}{2^n}\prod_{i=1}^{n}(m_i+1)^2 = \frac{\alpha}{2^n}\left\{M(\bar{m})+1\right\}^2 > \frac{\alpha}{2^n}\{M^2(\bar{m}) + 2M(\bar{m})\}. \tag{16}$$

Соотношения (9), (14), (15) и (16) дают

$$\frac{C(\bar{m})}{M(\bar{m})} > \alpha + \frac{\alpha(1-2^{n-1}\alpha)}{2^n\lambda}. \tag{17}$$

Так как неравенство (17) верно для любого $\bar{m} \in M$, то теорема 1 доказана.

§ 4

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $A \subset M$ и $D^*(A) = \alpha^* < \frac{1}{2^{n-1}}$, а B — асимптотический базис асимптотической высоты λ^*. Если теперь $C = A + B$ и $D^*(C) = \gamma^*$, то*

$$\gamma^* \geqslant \alpha^* + \frac{\alpha^*(1-2^{n-1}\alpha^*)}{2^n\lambda^*}.$$

Из (3) следует, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует такая точка $\bar{m}^0$, что для всех $\bar{m} \supset \bar{m}^0$ будет иметь неравенство

$$A(\bar{m}) \geqslant (\alpha^* - \varepsilon) M(\bar{m}). \tag{18}$$

Наложим на $\bar{m}^0$ еще одно условие, состоящее в том, что все точки $\bar{m} \supset \bar{m}^0$ допускают представление в виде (5). Такое $\bar{m}^0$ всегда возможно выбрать, так как B — асимптотический базис.

Пусть теперь $\bar{m} \supset 2\bar{m}_0$, а $\bar{w}$ удовлетворяет условию

$$\bar{m}^0 \subset \bar{w} \subset \bar{m}.$$

Пусть опять $A_{\bar w}(\bar m)$ и $\bar A_{\bar w}(\bar m)$ означает число точек $\bar a+\bar w\subset\bar m$, принадлежащих A или $\bar A$. Тогда, очевидно,

$$\sum_{\bar m^0\subset\bar w\subset\bar m} A(\bar m-\bar w)=\sum_{\bar m^0\subset\bar w\subset\bar m} A_{\bar w}(\bar m)+\sum_{\bar m^0\subset\bar w\subset\bar m}\bar A_{\bar w}(\bar m)\leqslant\sum_{\bar w\subset\bar m} A_{\bar w}(\bar m)+$$
$$+\sum_{\bar m^0\subset\bar w\subset\bar m}\bar A_{\bar w}(\bar m),$$

и, следовательно,

$$\sum_{\bar m^0\subset\bar w\subset\bar m} A(\bar m-\bar w)\leqslant\frac{A^2(\bar m)}{2}-\frac{A(\bar m)}{2}+\sum_{\bar m^0\subset\bar w\subset\bar m}\bar A_{\bar w}(\bar m).\qquad(19)$$

Оценим $\sum\limits_{\bar m^0\subset\bar w\subset\bar m}\bar A_{\bar w}(\bar m)$. Так как $\bar w\supset\bar m^0$, то существует разложение

$$\bar w=\bar b^{(1)}+\bar b^{(2)}+\ldots+\bar b^{(g(\bar w))},$$

и так как по условию $\bar a\in A$, $\bar a+\bar w\in\bar A$, то для каждого $\bar a$, обладающего этими свойствами, найдется наименьшее $h\leqslant g(\bar w)$, удовлетворяющее условиям:

$$\left.\begin{aligned}&\bar a+\sum_{i=1}^{h-1}\bar b^{(i)}=\bar a'\in A,\\&\bar a+\sum_{i=1}^{h}\bar b^{(i)}=\bar a'+\bar b^{(h)}\in\bar A.\end{aligned}\right\}$$

Все $\bar a$, сосчитанные в $\bar A_{\bar w}(\bar m)$, попадут в один из таких классов, соответствующий некоторому h, количество точек в котором мы обозначим через $\bar A_{\bar b^{(h)}}(\bar m)$. Очевидно,

$$\bar A_{\bar b^{(h)}}(\bar m)\leqslant R(\bar m),$$

а поэтому

$$\bar A_{\bar w}(\bar m)\leqslant g(\bar w)\,R(\bar m).$$

Суммируя по $\bar w$, для которых $\bar m^0\subset\bar w\subset\bar m$, и принимая во внимание (6), получим

$$\sum_{\bar m^0\subset\bar w\subset\bar m}\bar A_{\bar w}(\bar m)\leqslant\lambda^*_{\bar m_0}M(\bar m)\,R(\bar m).\qquad(20)$$

Остается оценить $\sum\limits_{\bar m^0\subset\bar w\subset\bar m} A(\bar m-\bar w)$. По (18)

$$\sum_{\bar m^0\subset \bar w\subset \bar m} A(\bar m-\bar w) \geq \sum_{\bar m^0\subset\bar w\subset \bar m- \bar m^0} A(\bar m-\bar w)^* \geq (\alpha^*-\varepsilon)\sum_{\bar m^0\subset \bar w\subset\bar m-\bar m^0} M(\bar m-\bar w) =$$

$$=(\alpha^*-\varepsilon)\sum\sum\cdots\sum_{m_i^0\leq w_i\leq m_i-m_i^0}\Big\{(m_1-w_1+1)(m_2-w_2+1)\dots(m_n-w_n+1)-1\Big\}=$$

$$=(\alpha^*-\varepsilon)\Big\{\sum_{m_1^0\leq w_1\leq m_1-m_1^0}(m_1-w_1+1)\dots\sum_{m_n^0\leq w_n\leq m_n-m_n^0}(m_n-w_n+1)-$$

$$-\sum\dots\sum_{m_i^0\leq w_i\leq m_i-m_i^0} 1\Big\}=$$

$$=(\alpha^*-\varepsilon)\prod_{i=1}^n (m_i-2m_i^0+1)\cdot\left\{\frac{\prod_{i=1}^n(m_i+2)}{2^n}-1\right\}.$$

Так как для любого $\delta>0$ при данном m_i^0 всегда можно выбрать m_i настолько большими, что $\frac{m_i-2m_i^0+1}{m_i+1}>1-\delta$, то при выбранном таким образом $\bar m=(m_1,m_2,\dots,m_n)$, ввиду

$$\prod_{i=1}^n(m_i+2)-2^n\geq\prod_{i=1}^n(m_i+1),$$

получим

$$\sum_{\bar m^0\subset\bar w\subset\bar m} A(\bar m-\bar w)\geq\frac{(\alpha^*-\varepsilon)(1-\delta)^n}{2^n}M^2(\bar m)$$

или, так как δ произвольно мало,

$$\sum_{\bar m^0\subset\bar w\subset\bar m} A(\bar m-\bar w)\geq\frac{1}{2^n}(\alpha^*-\varepsilon)M^2(\bar m). \tag{21}$$

Подставив (20) и (21) в (19), получим

$$\frac{\alpha^*-\varepsilon}{2^n}M^2(\bar m)\leq\frac{A^2(\bar m)}{2}-\frac{A(\bar m)}{2}+\lambda^*_{\bar m^0}M(\bar m)R(\bar m)=$$

$$=\frac{A^2(\bar m)}{2}-\frac{A(\bar m)}{2}+\lambda^*_{\bar m^0}M(\bar m)\{C_1(\bar m)-A(\bar m)\},$$

откуда

$$C(\bar m)\geq C_1(\bar m)\geq A(\bar m)-\frac{A^2(\bar m)}{2\lambda^*_{\bar m^0}M(\bar m)}+\frac{\alpha^*-\varepsilon'}{2^n\lambda^*_{\bar m^0}}M(\bar m)$$

или, принимая во внимание (15) и (18),

$$C(\bar m)\geq(\alpha^*-\varepsilon)M(\bar m)-\frac{(\alpha^*-\varepsilon)^2M(\bar m)}{2\lambda^*_{\bar m^0}}+\frac{(\alpha^*-\varepsilon')M(\bar m)}{2^n\lambda^*_{\bar m^0}}, \tag{22}$$

т. е.

$$\gamma^*\geq\alpha^*+\frac{\alpha^*(1-2^n\alpha^*)}{2^n\lambda^*_{\bar m^0}}, \tag{23}$$

так как (22) верно при всяком ε и ε' и для любого $\overline{m}$, если его координаты достаточно велики по сравнению с координатами $\overline{m}^0$, и так как $\overline{m}^0$ можно выбрать произвольно лишь бы все точки $\overline{m} \subset \overline{m}^0$ представлялись в виде (5), то $\lambda^*_{\overline{m}^0}$ можно в (23) заменить через λ^*, и теорема доказана.

Московский гос. университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
28 IV 1941

ЛИТЕРАТУРА

[1] Erdös P., On the arithmetical density of the sum of two sequences one of whic forms a basis for the integers. Acta Arithm., I, 2 (1936), 197—200. Перевод помещен в «Успехах матем. наук», вып. VII.

[2] Landau E., Über einige neuere Fortschritte in der additiven Zahlentheorie, Cambridge, 1937, p. 60—62.

[3] Erdös P., On the asymptotical density of the sum of two sequences one of which forms a basis for the integers, II. Труды Тбилисского Матем. ин-та, 3 (1938), 217—233.

[4] Райков Д. А., О сложении множеств в смысле Шнирельмана, Матем. сборник, т. 5 (47) : 2, (1939), 425—440.

L. SHATPOWSKY. ON TWO ERDÖS' THEOREMS FOR LATTICE POINT SETS OF THE SPACE OF n DIMENSIONS

SUMMARY

The following theorem was proved by P. Erdös (1).

Let A be a set of integers and the density of A be $\alpha > 0$, that is

$$\inf_{n \geq 1} \frac{A(n)}{n} = \alpha;$$

let B form a basis of the order l for the integers. Then the density γ of $A+B$ satisfies the condition

$$\gamma \geqslant \alpha + \frac{\alpha(1-\alpha)}{2l}.$$

E. Landau has introduced a number

$$\lambda = \sup_{n \geq 1} \frac{\sum\limits_{m=1}^{n}{}' g(m)}{n},$$

where $g(m)$ is the smallest quantity of the members of B which are necessary for a representation of m (We shall call this number after Raikov the h e i g h t of B). E. Landau has shown (2) that

$$\gamma \geqslant \alpha + \frac{\alpha(1-\alpha)}{2\lambda}.$$

There is a similar theorem for sets with asymptotical characteristics (3,4).

Let a set A have the asymptotical density α^*, that is

$$\varliminf_{n \to \infty} \frac{A(n)}{n} = \alpha^*;$$

let B satisfy the condition

$$\sum_{m=m_0+1}^{n}{}' g(m) \leq \lambda^* n$$

for all $n > m_0$. Then the asymptotical density γ^* of $A+B$ satisfies to the inequality

$$\gamma^* \geqslant \alpha^* + \frac{\alpha^*(1-\alpha^*)}{2\lambda^*}.$$

In this article similar theorems are proved by the method of E. Landau for the whole point sets of the space of n dimensions, but my theorems are true only for sets, whose the density is smaller than $\frac{1}{2^n-1}$.

Let M be a set of all points m of E^n with integral non-negative coordinates, such that the sum of these coordinates is not equal to zero. The addition of points is defined as vector addition. The set addition

is defined after L. Schnirelmann, viz. $A+B=C$ means that C is a set of all elements of the kind

$$\bar{c}=\varepsilon_1\bar{a}+\varepsilon_2\bar{b}$$

where $a\in A$, $\bar{b}\in B$, ε_1 and ε_2 are 0 or 1 and $\varepsilon_1+\varepsilon_2\neq 0$.

If the coordinates of $\bar{m}'$ and $\bar{m}$ satisfy the conditions

$$m_1'\leq m_1,\ldots,m_n'\leq m_n,$$

we shall write $\bar{m}'\subset\bar{m}$.

We shall denote by $A(\bar{m})$, $B(\bar{m})$, ... the numbers of elements $\bar{a}\in A$, $\bar{b}\in B,\ldots$, for which $\bar{a}\subset\bar{m}$, $\bar{b}\subset\bar{m},\ldots$

The number

$$\alpha=\inf_{\bar{m}\in M}\frac{A(\bar{m})}{M(\bar{m})}$$

is called the density $D(A)$ of the set A. The number

$$\alpha^*=\underline{\lim}_{\bar{m}\in M}\frac{A(\bar{m})}{M(\bar{m})}.$$

is called the asymptotical density $D^*(A)$ of A. The set B is called a basis of the order l for the set M, if l is the smallest number which has the property that every $\bar{m}\in M$ can be represented in the form

$$\bar{m}=\bar{b}^{(1)}+\bar{b}^{(2)}+\ldots+\bar{b}^{(h)}\quad(b^{(i)}\in B)\qquad(1)$$

where $h\leq l$.

The number

$$\lambda=\sup_{\bar{m}\in M}\frac{\sum\limits_{\bar{m}'\subset\bar{m}}g(\bar{m}')}{M(\bar{m})}$$

is called the height of B, if $g(\bar{m}')$ is the smallest number of elements which is necessary for the representation of $\bar{m}'$ in the form (1).

The set B is called an asymptotical basis of the order l^* for M, if there is a point $\bar{m}^0$, which has the property that all points $\bar{m}\supset\bar{m}^0$ can be represented in the form (1), and h is smaller than l^*.

Let now

$$\lambda^*_{\bar{m}^0}=\sup_{\bar{m}^0\subset\bar{m}}\frac{\sum\limits_{\bar{m}^0\subset\bar{m}'\subset\bar{m}}g(\bar{m}')}{M(\bar{m})}$$

The number

$$\lambda^*=\overline{\lim}\,\lambda^*_{\bar{m}^0}$$

is called an asymptotical height of B.

Two theorems are proved in this article:

Theorem I. *Let the density of A be $\alpha < \frac{1}{2^{n-1}}$ and let B form a basis of the height λ for M. Let γ be the density of $A+B$. Then*

$$\gamma \geqslant \alpha + \frac{\alpha(1-2^{n-1}\alpha)}{2^n\lambda}.$$

Theorem II. *Let the asymptotical density of A be $\alpha^* < \frac{1}{2^{n-1}}$ and let B form an asymptotical basis of the asymptotical height λ^* for M. Let γ^* be the asymptotical density of $A+B$. Then*

$$\gamma^* \geqslant \alpha^* + \frac{\alpha^*(1-2^{n-1}\alpha^*)}{2^n\lambda^*}.$$

I suppose that for the proof of these theorems for the general case $(0<\alpha<1)$ it is sufficient to enumerate the number of solutions of the equation

$$\overline{a} + \overline{w} = \overline{a}' \qquad (\overline{a} \in A,\ \overline{a}' \in A)$$

where $\overline{a} \subset \overline{m}$, $\overline{a}' \subset \overline{m}$, $\overline{w} \subset \overline{m}$. This number is equal $\binom{A(\overline{m})}{2}$ if $n=1$.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 6 (1941), 423–426 Série mathématique

Ю. С. ОЧАН

К ВОПРОСУ О ПРОБЛЕМЕ СУСЛИНА

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

Показано, что из справедливости локальной гипотезы Суслина следует справедливость тотальной гипотезы Суслина, содержащей как частный случай решение проблемы Суслина.

Как известно, проблема Суслина получила бы положительное решение, если бы была положительно решена следующая проблема более сильная, чем проблема Суслина: «Показать, что имеет место следующая гипотеза:

Тотальная гипотеза Суслина. *Всякое совершенно нормальное* бикомпактное хаусдорфово пространство имеет счетное, плотное в нем, множество».*

Наряду с этой гипотезой можно сформулировать следующую на первый взгляд более слабую гипотезу.

Локальная гипотеза Суслина. *Всякое совершенно нормальное бикомпактное хаусдорфово пространство имеет по крайней мере одно счетное множество, не являющееся никогда не плотным.*

Основной целью настоящей заметки является доказательство эквивалентности обеих гипотез.

То, что из тотальной гипотезы вытекает локальная,— очевидно. Итак, остается доказать теорему:

ТЕОРЕМА. *Если верна локальная гипотеза Суслина, то также верна и тотальная гипотеза**.*

Предварительно докажем следующую лемму.

ЛЕММА. *Если пространство E совершенно нормально и бикомпактно, то в нем найдется не более счетного числа попарно непересекающихся открытых множеств.*

Доказательство леммы. Допустим, что $\{G_1, G_2, \ldots, G_\alpha, \ldots\}$ — несчетная совокупность попарно непересекающихся открытых множеств. Пусть F_0 — дополнение к их сумме (оно не пусто, так как в противном случае $\{G_\alpha\}$ было бы покрытием всего пространства и из него можно было бы

* Пространство называется совершенно нормальным, если каждое замкнутое множество в этом пространстве является пересечением открытых в счетном числе.

** Таким образом, из положительного решения только локальной гипотезы уже следовало бы положительное решение проблемы Суслина.

извлечь, в силу бикомпактности E, конечное покрытие; однако это невозможно, так как все G_α попарно — без общих точек). Пусть $\Gamma_1 \supset \Gamma_2 \supset \ldots \supset \Gamma_n \supset \ldots$ — последовательность открытых множеств такая, что $\prod_n \Gamma_n = F_0$. Тогда для всякого n $\{\Gamma_n, G_1, G_2, \ldots, G_\alpha, \ldots\}$ образует покрытие E; выделенное из него конечное покрытие содержит Γ_n; отсюда следует (снова ввиду того, что все G_α попарно не пересекаются), что Γ_n включает почти все (за исключением конечного числа) множества G_α, а следовательно, $\prod_n \Gamma_n$ включает все G_α, за исключением счетного числа этих множеств, что противоречит предположению. Лемма доказана *.

Доказательство теоремы. Пусть $A_1 = \{a_1^1, a_1^2, \ldots, a_1^n, \ldots\}$ — некоторая счетная последовательность в бикомпактном хаусдорфовом совершенно нормальном пространстве E, причем такая, что $\overline{E - \overline{A}_1} \neq E$ (это возможно в силу локальной гипотезы). Следовательно, найдется открытое множество Γ_1^0, входящее в $\overline{A}_1$; в силу регулярности E, найдется также открытое множество Γ_1 такое, что $\overline{\Gamma}_1 \subset \Gamma_1^0$.

Допустим теперь, что нами построены открытые множества

$$\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_\alpha, \ldots \quad (\alpha < \beta),$$

обладающие следующими свойствами:

1° $\Gamma_{\alpha_1} \cdot \Gamma_{\alpha_2} = 0$ для любых $\alpha_1, \alpha_2 < \beta$;

2° $\Gamma_\alpha \subset \overline{A}_\alpha$, где A_α — счетное множество.

Покажем, что если $\overline{\sum_{\alpha<\beta} \Gamma_\alpha} \neq E$, то к этой системе множеств можно добавить множество Γ_β так, что система $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_\alpha, \ldots, \Gamma_\beta$ также удовлетворяет свойствам 1°—2°.

Пусть $M_\beta = E - \overline{\sum_{\alpha<\beta} \Gamma_\alpha}$. Выберем в M открытое множество Γ_β^{00}, входящее (вместе со своим замыканием) в M_β. Это возможно в силу регулярности E. Так как $\overline{\Gamma_\beta^{00}}$ бикомпактно (как замкнутое подмножество бикомпакта), то в нем найдется счетное множество A_β, замыкание которого включает некоторое множество Γ_β^0, открытое в $\overline{\Gamma_\beta^{00}}$.

Легко видеть, что пересечение $\Gamma_\beta^0 \Gamma_\beta^{00} = \Gamma_\beta$ является непустым открытым множеством в E. Действительно, $\Gamma_\beta^0 = G\overline{\Gamma_\beta^{00}}$ (где G — некоторое открытое в E множество), и $\Gamma_\beta = \Gamma_\beta^0 \cdot \Gamma_\beta^{00} = G\overline{\Gamma_\beta^{00}}\,\Gamma_\beta^{00} = G\Gamma_\beta^{00}$ открыто в E, как пересечение двух открытых в E множеств.

Но Γ_β и непусто. В самом деле, пусть $p \in \Gamma_\beta^0$. Тогда $p \in \overline{\Gamma_\beta^{00}}$, и, следовательно, любая окрестность p содержит точки, принадлежащие Γ_β^{00}.

* Эта лемма следует из одной теоремы Александрова и Урысона, см. (2).

Но тогда, в частности, и Γ_β^0 содержит некоторую точку из Γ_β^{00} (например, точку $p_1 \in \Gamma_\beta^{00}$), и тогда эта точка войдет в $\Gamma_\beta^0 \cdot \Gamma_\beta^{00} = \Gamma_\beta$.

Если теперь присоединить непустое открытое множество Γ_β к ранее построенной системе, то, как легко видеть, полученная система открытых множеств $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_\beta$, удовлетворяет условиям 1° и 2°.

На основании леммы мы можем утверждать, что этот процесс оборвется на некотором счетном трансфините γ. Таким образом,

$$\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_\beta, \ldots \quad (\beta < \gamma)$$

будет последовательностью попарно непересекающихся открытых множеств такой, что $\overline{\sum_{\beta<\gamma} \Gamma_\beta} = E$. А так как A_β плотно в E, то $\sum_{\beta<\gamma} A_\beta$ будет счетным множеством, плотным в E, так как

$$\overline{\sum_{\beta<\gamma} A_\beta} = \overline{\sum_{\beta<\gamma} \bar{A}_\beta} = \overline{\sum_{\beta<\gamma} \Gamma_\beta} = E,$$

что и требовалось доказать.

Московский ордена Ленина
Энергетический институт
им. В. М. Молотова

Поступило
17 VI 1941

ЛИТЕРАТУРА

[1] Alexandroff P. et Urysohn E., Mémoire sur les espaces topologiques compacts, Verhandl. der Koninkl. Akad. te Amsterdam, XIV (1929), p. 38.

G. OTCHAN. SUR UNE QUESTION LIÉE AU PROBLÈME DE SOUSLIN

RÉSUMÉ

Il est connu que le problème de Souslin serait résolu par l'affirmative, si l'on avait résolu par l'affirmative le problème suivant (plus fort que celui de Souslin): Démontrer que l'hypothèse suivante a réellement lieu:

Hypothèse totale de Souslin. *Chaque espace de Hausdorff parfaitement normal et bicompact contient un espace dénombrable dense dans cet espace**.

À côté de cette hypothèse on peut énoncer une autre (au premier abord plus faible):

Hypothèse locale de Souslin. *Chaque espace de Hausdorff bicompact et parfaitement normal contient au moins un ensemble dénombrable qui n'est pas partout non dense.*

Le but de la présente Note est de démontrer l'équivalence de ces deux hypothèses.

---

* Un espace est nommé parfaitement normal si chaque ensemble fermé dans cet espace est l'intersection d'une infinité dénombrable d'ensembles ouverts.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 6 (1941), 427—430 Série mathématique

Ю. С. ОЧАН

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ БЭРА

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

Теорема Бэра о монотонных последовательностях замкнутых множеств распространяется в несколько обобщенном виде на компактные совершенно регулярные пространства.

Как известно, во всяком топологическом пространстве R со счетной базой имеет место следующая теорема Бэра [1]:

Всякая вполне упорядоченная монотонная система открытых (замкнутых) множеств пространства R содержит не более как счетное число различных множеств.

Отсюда, в частности, следует, что сумма (соотв. пересечение) вполне упорядоченной системы монотонно возрастающих замкнутых (соотв. убывающих открытых) множеств в любом числе есть F_σ (соотв. G_δ).

Если пространство R не имеет счетной базы, то теорема Бэра, вообще говоря, неверна. Однако только что сформулированное следствие из нее сохраняется для компактных пространств гораздо более широкого класса, чем пространства со счетной базой, именно, для компактных совершенно регулярных пространств.

Определение. *Совершенно регулярным называется регулярное пространство, в котором каждая точка есть G_δ.*

ТЕОРЕМА I. *В компактном совершенно регулярном пространстве сумма (соотв. пересечение) вполне упорядоченной системы монотонно возрастающих замкнутых (соотв. монотонно убывающих открытых) множеств в любом числе есть замкнутое множество или F_σ (соотв. открытое или G_δ)**.

* Теорема Бэра в такой формулировке: «Всякая вполне упорядоченная *монотонно убывающая* последовательность открытых множеств содержит не более счетного числа различных» для компактных совершенно регулярных пространств, вообще говоря, не имеет места. Действительно, Серпинским показано [2], что выполнение этой теоремы в хаусдорфовом пространстве эквивалентно наличию в нем счетного, плотного в нем множества. Однако уже совокупность всех трансфинитных чисел $< \Omega$ с известной топологией [3] является компактным совершенно регулярным пространством без счетного, плотного в нем, множества.

Имеет ли место теорема Бэра в несколько более узком классе пространств — именно, в бикомпактных совершенно нормальных — неизвестно; из только что цитированной теоремы Серпинского следует, что выполнение в них теоремы Бэра влекло бы положительное решение проблемы Суслина.

Эта теорема является непосредственным следствием следующей более точной теоремы.

ТЕОРЕМА II. *В компактном совершенно регулярном пространстве R пересечение любой вполне упорядоченной системы монотонно убывающих открытых множеств является открытым, если эта система не конфинальна счетной.*

Доказательство. Опишем около каждой точки счетную систему открытых множеств, определяющую данную точку; ввиду регулярности R можно считать, что эта система окрестностей $V_1, V_2, \ldots$ такова, что $V_i \supset V_{i+1}$. Пусть G — произвольное открытое множество, включающее точку p. Докажем, что начиная с некоторого номера все V_i, определяющие точку p, будут включаться в G.

В самом деле, в противном случае для любого номера i нашлись бы точки из V_i, не входящие в G; следовательно, $V_i \cdot (E-G) \neq 0$ для всех i; значит, и $\overline{V}_i \cdot (E-G) \neq 0$. Но так как $\overline{V}_{i+1}(E-G) \subset \overline{V}_i(E-G)$, то $\prod \overline{V}_i(E-G) \neq 0$ (как пересечение монотонной последовательности вложенных замкнутых множеств в компактном пространстве); так как $\overline{V}_{i+1} \subset V_i$, то $\prod\limits_i V_i(E-G) \neq 0$, т. е. $(E-G)\prod\limits_i V_i \neq 0$, и так как $\prod\limits_i V_i = p$, то $p \cdot (E-G) \neq 0$, или $p \in E-G$, вопреки предположению о том, что $p \in G$.

Перейдем к самому доказательству теоремы.

Пусть $G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_\alpha \supset \ldots (\alpha < \beta)$ — вполне упорядоченная монотонная последовательность открытых множеств, не конфинальная со счетной последовательностью, и $\prod\limits_{\alpha<\beta} G_\alpha$ — пересечение всех элементов этой последовательности. Если оно пусто, то все доказано (так как пустое множество открыто). Итак, пусть $\prod\limits_\alpha G_\alpha \neq 0$ и p — точка из $\prod\limits_\alpha G_\alpha$. Пусть $V_1 \supset V_2 \supset \ldots \supset V_n \supset \ldots$ — счетная последовательность открытых множеств, стягивающая к p и такая, что $V_n \supset \overline{V}_{n+1}$.

Найдется такой номер n_1, что $V_{n_1} \subset G_1$; пусть, кроме того, $V_{n_1} \subset G_2$, $V_{n_1} \subset G_3, \ldots$ и т. д., и α_1 — первое трансфинитное число такое, что $V_{n_1} \not\subset G_{\alpha_1}$; но тогда $G_{\alpha_1} \supset V_{n_2}$ (где $n_2 > n_1$) и т. д. Вообще, если определены числа $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ и $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_{k-1}$, то α_k определим как первое из трансфинитных чисел, такое, что $V_{n_k} \not\subset G_{\alpha_k}$; а n_{k+1} определим как наименьшее натуральное число такое, что $G_{\alpha_k} \supset V_{n_{k+1}}$.

Легко видеть, что этот процесс не может быть продолжен на все натуральные k, а обрывается на некотором $k = k_0$. Действительно, пусть $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_k \ldots$. $\alpha_0 = \lim\limits_k \alpha_k$; так как все $\alpha_k < \beta$ и β — трансфинитное число, не конфинальное счетному, то $\lim\limits_k \alpha_k = \alpha_0 < \beta$.

Но в таком случае G_{α_0} не включает ни одного V_n (так как $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ составляют неограниченно возрастающую последовательность) и включает p, что невозможно.

Итак, остается предположить, что все G_α для $\alpha \geqslant \alpha_{k_0}$ включают $V_{n_{k_0}+1}$.

Отсюда следует (ввиду того, что p — произвольная точка из $\prod_{\alpha<\beta} G_\alpha$), что $\prod_{\alpha<\beta} G_\alpha$ — открыто, что и требовалось доказать.

Переходом к дополнениям доказывается

ТЕОРЕМА III. *В компактном совершенно регулярном пространстве сумма любой вполне упорядоченной системы монотонно возрастающих замкнутых множеств замкнута, если эта система не конфинальна счетной.*

Московский ордена Ленина
Энергетический институт
им. В. М. Молотова

Поступило
17 VI 1941

ЛИТЕРАТУРА

[1] Хаусдорф Ф., Теория множеств, ОНТИ, 1937, стр. 136.
[2] Sierpinski, Sur l'equivalence de trois propriétés..., Fund. math., t. II, p. 179.
[3] Alexandroff P. et Urysohn P., Mémoire sur les espaces topologiques compacts, Verhandl. der Koninkl. Akad. te Amsterdam, XIV (1929), 8.

G. OTCHAN. SUR UN THÉORÈME DE BAIRE

RÉSUMÉ

Il est bien connu que dans chaque espace topologique R avec une base dénombrable on a le théorème suivant de Baire ([1]).

Chaque système bien ordonné et monotone d'ensembles ouverts (fermés) de l'espace R contient au plus une infinité dénombrable d'ensembles différents.

Il en résulte, en particulier, que la somme (respectivement l'intersection) d'ensembles fermés d'un système bien ordonné croissant (respectivement d'ensembles ouverts d'un système bien ordonné décroissant) en nombre quelconque est un F_σ (respectivement G_δ).

Si l'espace R n'a pas de base dénombrable, le théorème de Baire, en général, tombe en défaut. Cependant le corollaire que nous venons d'énoncer subsiste pour les espaces compacts d'une classe beaucoup plus vaste que les espaces à base dénombrable, à savoir, pour les espaces compacts parfaitement réguliers.

Définition. *Un espace régulier est nommé parfaitement régulier, si chaque point de ces espaces est un G_δ.*

Théorème I. *Dans un espace compact parfaitement régulier la somme (respectivement l'intersection) d'un système bien ordonné croissant d'ensemblet fermés (respectivement l'intersection d'un système bien ordonné décroissans d'ensembles ouverts) en nombre quelconque est un ensemble fermé ou bien un F_σ (respectivement ouvert ou bien G_δ).*

Ce théorème est une conséquence immédiate du théorème suivant plus précis:

Théorème II. *Dans un espace compact parfaitement régulier R l'intersection d'un système quelconque bien ordonné décroissant d'ensembles ouverts est ouvert si ce système n'est pas confinal à un système dénombrable.*

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 6 (1941), 431–439 Série mathématique

В. С. ПУГАЧЕВ

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ИНТЕГРАЛОВ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ПАРАМЕТР. II.

(*Представлено академиком* **Н. Е. Кочиным**)

В работе дается обобщение результатов автора, относящихся к системам уравнений первого ранга на системы уравнений любого ранга.

В настоящей работе дается обобщение результатов, опубликованных нами в статье под таким же заглавием * на системы уравнений любого ранга.

Условимся обозначать через H любую матрицу, элементы которой являются функциями независимого переменного x и параметра α, стремящимися к нулю равномерно относительно x при $\alpha \to \infty$ по пути, лежащему в некоторой области D. Кроме того, условимся обозначать матрицы большими буквами, а их элементы — соответствующими малыми.

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\frac{dY}{dx} = YP + \Pi. \tag{1}$$

Предположим, что P и Π — однозначные функции независимого переменного x, $a \leq x \leq b$, и параметра α, $\alpha \subset D$, допускающие представление

$$P(x, \alpha) = \alpha^r \left\{ \sum_{\nu=0}^{m+r} P^{(\nu)}(x)\, \alpha^{-\nu} + H\alpha^{-m-r} \right\} \quad (m \geq 0), \tag{2}$$

$$\Pi(x, \alpha) = \alpha^s Z(x, \alpha) \left\{ \sum_{\nu=0}^{m+r-l} \Pi^{(\nu)}(x)\, \alpha^{-\nu} + H\alpha^{l-m-r} \right\} \quad (m \geq 0), \tag{3}$$

где r, s и l — некоторые целые числа, $0 \leq l \leq r$, а $Z(x, \alpha)$ — интеграл однородной системы рассматриваемого типа

$$\frac{dZ}{dx} = ZQ; \quad Q = \alpha^r \left\{ \sum_{\nu=0}^{m+r} Q^{(\nu)}(x)\, \alpha^{-\nu} + H\alpha^{-m-r} \right\}. \tag{4}$$

---

* См. Известия Акад. Наук, серия матем., 5 (1941), 75—84.

Мы ограничимся случаем, когда характеристические числа матрицы $P^{(0)}$ различны на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$. Нетрудно видеть, что в этом случае подстановкой вида

$$Y = U \sum_{\nu=0}^{r} S_\nu \alpha^{-\nu}, \tag{5}$$

где S_0 — матрица, приводящая матрицу $P^{(0)}$ к диагональной форме, однородная система

$$\frac{dY}{dx} = YP \tag{6}$$

может быть преобразована к виду

$$\frac{dU}{dx} = U(\Lambda + H), \tag{7}$$

где Λ — диагональная матрица, элементы которой определяются формулами

$$\lambda_i^*(x, \alpha) = \sum_{\nu=0}^{r} \lambda_i^{(\nu)}(x)\,\alpha^{r-\nu}, \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda_i^{(\nu)}(x) &= a_{ii}^{(\nu)} + \sum_{\mu=1}^{\nu-1} \sum_{k=1}^{n_i} A_{ik}^{(\mu)} a_{ki}^{(\nu-\mu)} \quad (\nu = 2, 3, \ldots, r), \\ \lambda_i^{(0)}(x) &= a_{ii}^{(0)}, \quad \lambda_i^{(1)}(x) = a_{ii}^{(1)}, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

где $a_{ij}^{(\nu)}$ — элементы матриц

$$\left.\begin{aligned} A^{(\nu)} &= S_0 P^{(\nu)} S_0^{-1} \quad (\nu = 0, 1, \ldots, r-1), \\ A^{(r)} &= S_0 P^{(r)} S_0^{-1} - S_0' S_0^{-1}, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

а $A_{ij}^{(\nu)}$ определяются рекуррентной формулой

$$A_{ij}^{(\nu)} = \frac{1}{\lambda_i^{(0)} - \lambda_j^{(0)}} \left\{ a_{ij}^{(\nu)} + \sum_{\mu=1}^{\nu-1} \left[\sum_{k=1}^{n} {}^{i}\, A_{ik}^{(\mu)} a_{kj}^{(\nu-\mu)} - \lambda_i^{(\nu-\mu)} A_{ij}^{(\mu)} \right] \right\}. \tag{11}$$

Для этого достаточно принять

$$S_\nu = W^{(0)^{-1}} W^{(\nu)} S_0 \quad (\nu = 1, \ldots, r), \tag{12}$$

где $W^{(0)}$ — произвольная диагональная матрица, все элементы которой отличны от нуля, а $W^{(k)}$ — матрицы, диагональные элементы которых произвольны, а остальные элементы определяются формулами

$$w_{ij}^{(\nu)} = \sum_{\mu=0}^{\nu-1} A_{ij}^{(\nu-\mu)} w_{ii}^{(\mu)}. \tag{13}$$

Назовем полиномы

$$\lambda_i(x, \alpha) = \sum_{\nu=0}^{r-1} \lambda_i^{(\nu)}(x)\,\alpha^{r-\nu} \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{14}$$

характеристическими полиномами системы (6).

Мы будем рассматривать не только такие системы, характеристические полиномы которых обладают следующим свойством: каковы бы ни были числа i и j $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$, величина $R(\lambda_i - \lambda_j)$ ограничена сверху, или ограничена снизу. Для краткости мы будем называть такие системы системами класса A. Для систем этого класса имеют место следующие две теоремы.

ТЕОРЕМА 1. *Если системы* (6) *и* (4) *имеют одни и те же характеристические полиномы и если матрицы $P^{(k)}$ и $Q^{(k)}$ $(k = 0, 1, \ldots, m+r)$ имеют производные до порядка $\left[\frac{m+r-k}{r}\right] + 1$ включительно, то существует интеграл системы* (6), *допускающий представление*

$$Y(x, \alpha) = Z(x, \alpha)\left\{\sum_{\nu=0}^{m} Y^{(\nu)}(x)\,\alpha^{-\nu} + H\alpha^{-m}\right\}, \tag{15}$$

где $Z(x, \alpha)$ — любой интеграл системы (4). *При этом матрицы $Y^{(\nu)}(x)$ определяются формальной подстановкой выражения* (15) *в уравнение* (6) *и сравнением коэффициентов при одинаковых степенях α.*

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что система* (4) *есть система класса A и ее характеристические полиномы*

$$\mu_i(x, \alpha) = \sum_{\nu=0}^{r-1} \mu_i^{(\nu)}(x)\,\alpha^{r-\nu} \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{16}$$

обладают тем свойством, что каковы бы ни были i и j $(i, j = 1, \ldots, n)$, величина $R(\mu_i - \lambda_i)$ ограничена сверху или ограничена снизу, а разность $\mu_i^{(0)} - \lambda_j^{(0)}$ не имеет нулей на отрезке $a \leqslant x \leqslant B$ или тождественно равна нулю; если $\mu_i^{(0)} - \lambda_j^{(0)} \equiv 0$, то $\mu_i^{(\nu)} - \lambda_j^{(\nu)} \equiv 0$ $(\nu = 1, \ldots, l_{ij} - 1)$, а $\mu_i^{(l_{ij})} - \lambda_i^{(l_{ij})}$ не имеет нулей на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$. Наконец, предположим, что матрицы $P^{(k)}$ и $Q^{(k)}$ $(k = 0, 1, \ldots, m+r)$ имеют производные до порядка $\left[\frac{m+r-k}{r}\right] + 1$ включительно, а матрицы $\Pi^{(k)}$, $(k = 0, 1, \ldots, m+r-l)$ — производные до порядка $\left[\frac{m+r-l-k}{r}\right] + 1$ включительно. Тогда существует интеграл системы (1), *допускающий представление*

$$Y(x, \alpha) = \alpha^{s+l-r} Z(x, \alpha)\left\{\sum_{\nu=0}^{m} Y^{(\nu)}(x)\,\alpha^{-\nu} + H\alpha^{-m}\right\}, \quad l = \max\{l_{ij}\}. \tag{17}$$

При этом матрицы $Y^{(\nu)}$ определяются формальной подстановкой выражения (17) *в уравнение* (1) *и сравнением коэффициентов при одинаковых степенях α.*

Доказательство этих теорем опирается на следующую лемму.

ЛЕММА. *Если матрицы $P^{(1)}, \ldots, P^{(r)}$ дифференцируемы, а матрица $P^{(0)}$ дважды дифференцируема, то существует интеграл уравнения* (6) *вида*

$$Y = e^{\Phi(x, \alpha)} F(x, \alpha), \tag{18}$$

где $\Phi(x, \alpha)$ — диагональная матрица, определяемая формулой

$$\Phi(x, \alpha) = \left[\int_a^x \lambda_1(x, \alpha)\, dx, \; \ldots, \; \int_a^x \lambda_n(x, \alpha)\, dx \right], \tag{19}$$

а матрица $F'(x, \alpha)$ равномерно ограничена относительно x при $\alpha \to \infty$ по области D.

Доказательство леммы ничем не отличается от доказательства аналогичной леммы для системы первого ранга (см. нашу цитированную статью). При этом очевидно, что достаточно доказать лемму для канонического уравнения (7).

Доказательство теоремы 1. Полагая в уравнении (6)

$$Y = Z \cdot \sum_{\nu=0}^{m+r} Y^{(\nu)} \alpha^{-\nu}, \tag{20}$$

получим

$$\sum_{\nu=0}^{m} \frac{dY^{(\nu)}}{dx} \alpha^{-\nu} = \sum_{\nu=-r}^{m} \alpha^{-\nu} \sum_{\mu=0}^{\nu+r} \left(Y^{(\mu)} P^{(\nu-\mu+r)} - Q^{(\nu-\mu+r)} Y^{(\mu)} \right) + H\alpha^{-m}. \tag{21}$$

Пусть S_0 и T_0 — матрицы, приводящие соответственно $P^{(0)}$ и $Q^{(0)}$ к диагональному виду. Умножая (21) слева на T_0, а справа на S_0^{-1}, полагая

$$\left.\begin{aligned}
&S_0 P^{(0)} S_0^{-1} = T_0 Q^{(0)} T_0^{-1} = \Lambda_0, \\
&A^{(\nu)} = S_0 P^{(\nu)} S_0^{-1}, \quad B^{(\nu)} = T_0 Q^{(\nu)} T_0^{-1} \\
&(\nu = 1, \ldots, r-1, \; r+1, \ldots, m+r), \\
&A^{(r)} = S_0 P^{(r)} S_0^{-1} - S_0' S_0^{-1}, \quad B^{(r)} = T_0 Q^{(r)} T_0^{-1} T_0' T_0^{-1}, \\
&U^{(\nu)} = T_0 Y^{(\nu)} S_0^{-1} \quad (\nu = 0, 1, \ldots, m+r)
\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

и сравнивая коэффициенты при $\alpha^{\varkappa}$ ($\varkappa = r, r-1, \ldots, m$) в правой и левой частях уравнения, получим

$$\left.\begin{aligned}
0 &= U^{(\nu)} \Lambda_0 - \Lambda_0 U^{(\nu)} + \sum_{\mu=0}^{\nu-1} \left(U^{(\mu)} A^{(\nu-\mu)} - B^{(\nu-\mu)} U^{(\mu)} \right) \\
&\qquad (\nu = 0, 1, \ldots, r-1), \\
\frac{dU^{(\nu)}}{dx} &= U^{(\nu+r)} \Lambda_0 - \Lambda_0 U^{(\nu+r)} + \sum_{\mu=0}^{\nu+r-1} \left(U^{(\mu)} A^{(\nu+r-\mu)} - B^{(\nu+r-\mu)} U^{(\mu)} \right) \\
&\qquad (\nu = 0, 1, \ldots, m).
\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Отсюда находим

$$u_{ij}^{(\nu)} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=0}^{\nu-1} D_{ijk}^{(\nu-s)} u_{kk}^{(s)}, \quad \text{если} \quad i \neq j, \tag{24}$$

$$\frac{du_{ii}^{(\nu)}}{dx}=\left\{a_{ii}^{(r)}-b_{ii}^{(r)}+\sum_{\mu=1}^{r-1}\sum_{k=1}^{n}{}' \left(a_{ki}^{(r-\mu)}D_{iki}^{(\mu)}-b_{ik}^{(r-\mu)}D_{kii}^{(\mu)}\right)\right\}u_{ii}^{(\nu)}+$$

$$+\sum_{s=0}^{\nu-1}\left(a_{ii}^{(\nu-s+r)}-b_{ii}^{(\nu-s+r)}\right)u_{ii}^{(s)}+$$

$$+\sum_{h=1}^{n}\sum_{s=0}^{\nu-1}\sum_{\mu=s+1}^{\nu+r-1}\sum_{k=1}^{n}{}' \left(a_{ki}^{(\nu-\mu+r)}D_{ikh}^{(\mu-s)}-b_{ik}^{(\nu-\mu+r)}D_{kih}^{(\mu-s)}\right)u_{hh}^{(s)}, \tag{25}$$

где $D_{ikh}^{(s)}$ — символические множители, определяемые рекуррентной формулой

$$\left.\begin{aligned}D_{ijh}^{(\nu+1)}&=\frac{1}{\lambda_i^{(0)}-\lambda_j^{(0)}}\left\{\sum_{\mu=1}^{\nu}\left(\sum_{k=1}^{n}{}' a_{kj}^{(\nu-\mu+1)}D_{ikh}^{(\mu)}-\sum_{k=1}^{n}{}' b_{ik}^{(\nu-\mu+1)}D_{kjh}^{(\mu)}\right)-\right.\\&\qquad\left.-\frac{d}{dx}D_{ijh}^{(\nu-r+1)}\right\}+J_{ijh}^{(\nu+1)},\quad D_{ijh}^{(0)}=0,\\J_{iji}^{(\nu)}&=\frac{a_{ij}^{(\nu)}}{\lambda_i^{(0)}-\lambda_j^{(0)}},\quad J_{ijj}^{(\nu)}=-\frac{b_{ij}^{(\nu)}}{\lambda_i^{(0)}-\lambda_j^{(0)}},\quad J_{ijh}^{(\nu)}=0,\ \text{при}\ h\neq i,\,j.\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Уравнения (24) и (25) определяют матрицы $U^{(0)},\ldots,U^{(m)}$. Что же касается матриц $U^{(m+1)},\ldots,U^{(m+r)}$, то их диагональные элементы остаются произвольными ограниченными функциями, дифференцируемыми необходимое число раз, а остальные элементы определяются линейными дифференциальными операциями над диагональными элементами. Очевидно, что матрица

$$\mathring{Y}=Z\sum_{\nu=0}^{m+r}Y^{(\nu)}\alpha^{-\nu} \tag{27}$$

при соблюдении условий теоремы удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\mathring{Y}}{dx}=\mathring{Y}P+ZH\alpha^{-m}. \tag{28}$$

Далее доказательство завершается совершенно так же, как и для случая системы первого ранга в нашей предыдущей статье.

Доказательство теоремы 2. Полагая в уравнении (1)

$$Y=\alpha^{s-r+l}Z\sum_{\nu=0}^{m+r}Y^{(\nu)}\alpha^{-\nu}, \tag{29}$$

получим

$$\sum_{\nu=0}^{m}\frac{dY^{(\nu)}}{dx}\alpha^{-\nu}=\sum_{\nu=-r}^{m}\alpha^{-\nu}\left\{\sum_{\mu=0}^{\nu+r}\left(Y^{(\mu)}P^{(\nu-\mu+r)}-Q^{(\nu-\mu+r)}Y^{(\mu)}\right)+\right.$$

$$\left.+\Pi^{(\nu+r-l)}\right\}+H\alpha^{-m}. \tag{30}$$

Применяя то же преобразование, что и при доказательстве теоремы 1, и сравнивая коэффициенты при $\alpha^{\varkappa}$ ($\varkappa = r,\ r-1,\ \ldots,\ m$), получим уравнения

$$\frac{dU^{(\nu-r)}}{dx} = U^{(\nu)}\Lambda_0 - M_0U^{(\nu)} + \sum_{\mu=0}^{\nu-1}(U^{(\mu)}A^{(\nu-\mu)} - B^{(\nu-\mu)}U^{(\mu)}) + \Sigma^{(\nu-l)}, \quad (31)$$

где

$$\left.\begin{aligned} \Lambda_0 = S_0P^0S_0^{-1}, \quad M_0 = T_0Q^{(0)}T_0^{-1}, \\ \Sigma^{(\nu)} = T_0\Pi^{(\nu)}S_0^{-1} \quad (\nu = 0,\ 1,\ \ldots,\ m+r-l). \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

Из уравнения (31) находим:
если $\mu_i^{(0)} \neq \lambda_j^{(0)}$, то

$$u_{ij}^{(\nu)} = \frac{1}{\mu_i^{(0)} - \lambda_j^{(0)}}\left\{\sum_{\mu=0}^{\nu-1}\sum_{k=1}^{n}(a_{kj}^{(\nu-\mu)}u_{ik}^{(\mu)} - b_{ik}^{(\nu-\mu)}u_{kj}^{(\mu)}) - \frac{du_{ij}^{(\nu-r)}}{dx} + \sigma_{ij}^{(\nu-l)}, \quad (33)\right.$$
$$\nu = 0,\ \ldots,\ m+r;$$

если $\mu_i^{(0)} \equiv \lambda_j^{(0)}$, то

$$u_{ij}^{(\nu-l_{ij})}(\mu_i^{(l_{ij})} - \lambda_j^{(l_{ij})}) = \Phi_{ij}^{(\nu-l_{ij})} - \frac{dU_{ij}^{(\nu-r)}}{dx} + \sigma_{ij}^{(\nu-l)}, \quad (34)$$
$$\nu = l_{ij},\ \ldots,\ m+r,$$

где $\Phi_{ij}^{(\nu-l_{ij})}$ — линейная комбинация величин $u_{pq}^{(h)}$ ($h = 0,\ 1,\ \ldots,\ \nu - l_{ij} - 1$), индексы которых $p,\ q$ таковы, что $\mu_p^{(0)} - \lambda_q^{(0)} \equiv 0$, и производных этих величин до порядка $\left[\frac{\nu - l_{ij} - h - 1}{r}\right]$ включительно.

Уравнения (33) и (34) определяют матрицы $U^{(0)},\ \ldots,\ U^{(m+r-l)}$. Что же касается матриц $U^{(m+r-l+1)},\ \ldots,\ U^{(m+r)}$ (если $l \neq 0$), то их элементы определяются линейными дифференциальными операциями над теми из них, индексы $p,\ q$ которых таковы, что $\mu_p^{(0)} - \lambda_q^{(0)} \equiv 0$. Последние остаются произвольными, ограниченными и дифференцируемыми необходимое число раз функциями.

Очевидно, что при выполнении условий теоремы матрица

$$\mathring{Y} = \alpha^{s-r+l}Z\sum_{\nu=0}^{m+r}Y^{(\nu)}\alpha^{-\nu} \quad (35)$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\mathring{Y}}{dx} = \mathring{Y}P + \Pi + \alpha^{l+s-m-r}ZH. \quad (36)$$

Полагая

$$Y = \alpha^{s-r+l}Z\left\{\sum_{\nu=0}^{m+r}Y^{(\nu)}\alpha^{-\nu} + K\alpha^{-m}\right\}, \quad (37)$$

получим уравнение

$$\frac{d(ZK)}{dx} = ZKP - ZH. \tag{38}$$

Дальше доказательство завершается совершенно так же, как доказательство соответствующих теорем для систем первого ранга.

Примечание 1. При доказательстве теоремы 2 мы предполагали, что системы (1) и (4) имеют одинаковый ранг. Очевидно, что случай, когда ранг одной из систем (1) и (4) меньше ранга другой, может рассматриваться как частный случай, когда все коэффициенты характеристических полиномов одной из этих систем при α^r, α^{r-1}, ... обращаются в нуль и коэффициенты при наибольшей степени α, фактически входящей в характеристические полиномы, различны всюду на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$.

Примечание 2. Так же, как и для системы первого ранга, изложенные результаты остаются в силе, когда аргумент x изменяется в произвольной комплексной области B или вдоль произвольной спрямляемой кривой. Только условие односторонней ограниченности величин $R(\lambda_i - \lambda_j)$ и $R(\mu_i - \lambda_j)$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ заменяется: в первом случае — условием односторонней ограниченности величин $R\left[(\lambda_i - \lambda_j)\frac{f}{f'}\right]$ и $R\left[(\mu_i - \lambda_j)\frac{f}{f'}\right]$ $(i, j = 1, \ldots, n)$, где $f(x)$ — функция, реализующая конформное отображение области B на произвольный параллелограм с вершиной в начале координат; во втором случае — условием односторонней ограниченности величин $R\left(\frac{\lambda_i - \lambda_j}{f'}\right)$ и $R\left(\frac{\mu_i - \lambda_j}{f'}\right)$, где $f(x)$ — функция, реализующая конформное отображение односвязной области, ограниченной контуром, составленным из данного криволинейного отрезка и произвольного другого спрямляемого отрезка, дополняющего данный отрезок до замкнутого контура, при котором данный криволинейный отрезок преобразуется в отрезок действительной оси.

Военная Воздушная ордена Ленина
Академия КА им. Жуковского

Поступило
12 VI 1941

V. POUGATCHEFF. SUR LES REPRÉSENTATIONS ASYMPTOTIQUES DES INTÉGRALES DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES CONTENANT UN PARAMÈTRE

RÉSUMÉ

Considérons un système d'équations différentielles linéaires présenté en forme d'une matrice (1). Convenons de désigner par la lettre H une matrice arbitraire dont les éléments sont des fonctions d'une variable indépendante x et d'un paramètre α, qui tendent vers zéro uniformément par rapport à x pour $\alpha \to \infty$ le long d'un chemin qui est entièrement situé dans un certain domaine D. Supposons que P et Π dans l'équation (1) sont des fonctions uniformes de x et α admettant pour $\alpha \subset D$ les représentations (2) et (3), où $Z(x, \alpha)$ est l'intégrale d'un système homogène du type considéré (4), et r, s, l — certains nombres entiers $0 \leqslant l \leqslant r$.

Nous nous bornerons au cas où les nombres caractéristiques de la matrice $P^{(0)}$ sont différents sur le segment $a \leqslant x \leqslant b$. Dans ce cas le système homogène (6) peut être transformé au moyen d'une substitution du type (5) de sorte qu'elle prend la forme (7), où Λ est une matrice diagonale, dont les éléments sont déterminés par les formules (8) et (9), où les $a_{ij}^{(\nu)}$ sont les éléments de la matrice (10) et les $A_{ij}^{(\nu)}$ sont déterminés par les formules (11).

Donnons aux polynomes (14) le nom de polynomes caractéristiques du système (6).

Nous n'allons considérer que les systèmes dont les polynomes caractéristiques jouissent de la propriété suivante: quels que soient les nombres entiers i et j $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$, la quantité $R(\lambda_i - \lambda_j)$ est bornée supérieurement ou bien bornée inférieurement. Les systèmes de cette nature seront nommés systèmes de classe A. Pour les systèmes de cette classe les théorèmes suivants ont lieu:

Théorème 1. *Si les systèmes* (6) *et* (4) *ont les mêmes polynomes caractéristiques et si les matrices* $P^{(k)}$ *et* $Q^{(k)}$ $(k = 0, 1, \ldots, m+r)$ *possèdent des dérivées jusqu'à l'ordre* $\left[\frac{m+r-k}{r}\right] + 1$ *inclusivement, alors il existe une intégrale du système* (6) *admettant la représentation* (15), *où* $Z(x, \alpha)$ *est une intégrale quelconque du système* (4) *et les matrices* $Y^{(\nu)}(x)$ *sont déterminées par la substitution formelle de l'expression* (15) *dans l'équation* (6) *et la comparaison dans les deux membres de l'équation des coefficients des termes dont les degrés de* α *sont les mêmes.*

Théorème 2. *Supposons que le système* (4) *est un système de classe* A *et que ses polynomes caractéristiques* (16) *jouissent de la propriété: quels que soient* i *et* j $(i, j = 1, \ldots, n)$, *la différence* $\mu_i^{(0)} - \lambda_j^{(0)}$ *n'a pas de zéros sur le segment* $a \leqslant x \leqslant b$ *ou bien* $\mu_i^{(0)} - \lambda_j^{(0)} \equiv 0$ *pour* $a \leqslant x \leqslant b$; *dans le dernier cas, soit* $\mu_i^{(\nu)} - \lambda_j^{(\nu)} \equiv 0$ $(\nu = 1, \ldots, l_{ij} - 1)$ *et supposons que* $\mu_i^{(l_{ij})} - \lambda_j^{(l_{ij})}$ *n'a pas de zéros pour* $a \leqslant x \leqslant b$; *enfin supposons que les matrices* $P^{(k)}$ *et* $Q^{(k)}$ $(k = 0, 1, \ldots, m+r)$ *possèdent des dérivées jusqu'à l'ordre* $\left[\frac{m+r-k}{r}\right] + 1$ *inclusivement, et les matrices* $\Pi^{(k)}$ $(k = 0, 1, \ldots, m+r-l,$

$l = \max\{l_{ij}\}$) *des dérivées jusqu'à l'ordre* $\left[\frac{m+r-k-l}{r}\right]+1$ *inclusivement. Dans ces conditions il existe une intégrale du système* (1), *admettant une représentation* (17) *pour laquelle les matrices* $Y^{(\nu)}$ *sont déterminées par la substitution formelle de l'expression* (17) *dans l'équation* (1) *et la comparaison des coefficients des mêmes degrés de* α *dans les deux membres de l'équation.*

La démonstration de ces théorèmes est basée sur le lemme suivant:

Lemme. *Si les matrices* $P^{(1)}, \ldots, P^{(r)}$ *sont dérivables et la matrice* $P^{(0)}$ *deux fois dérivable, alors il existe une intégrale de l'équation* (6) *de la forme* (18), *où la matrice* F *est uniformément bornée par rapport à* x *pour* $\alpha \to \infty$ *dans le domaine* D, *et la matrice* Φ *est déterminée par la formule* (19).

La démonstration du lemme et des théorèmes est tout-à-fait identique à leur démonstration pour le cas d'un système de rang un.

Tous les résultats que nous avons obtenus sont encore valables dans le cas où la variable indépendante x varie dans un domaine complexe B quelconque ou bien le long d'une courbe rectifiable L. Seulement la condition que les quantités $R(\lambda_i - \lambda_j)$ et $R(\mu_i - \lambda_j)$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ soient bornées d'un côté doit être remplacée:

1) dans le premier cas par la condition que les quantités $R\left[(\lambda_i - \lambda_j)\frac{f}{f'}\right]$ et $R\left[(\mu_i - \lambda_j)\frac{f}{f'}\right]$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ soient uniformément bornées, $f(x)$ étant la fonction qui réalise la représentation conforme du domaine B sur un parallélogramme quelconque;

2) dans le second cas par la condition que les quantités $R\left(\frac{\lambda_i - \lambda_j}{f'}\right)$ et $R\left(\frac{\mu_i - \lambda_j}{f'}\right)$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ soient bornées d'un côté, $f(x)$ étant la fonction qui réalise une représentation conforme telle qu'un domaine arbitraire simplement connexe dont une partie de la frontière est le contour L est transformé de telle manière qu'au contour L correspond un segment de l'axe réel.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 6 (1941), 441–444 Série mathématique

И. Е. ОГИЕВЕЦКИЙ

О КРИТЕРИИ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ ДИРИХЛЕ

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

Устанавливается, что критерий Дирихле о равномерной сходимости выражает не только достаточные, но и необходимые условия равномерной сходимости рядов.

Содержанием этой заметки, как и предыдущей [1], является вопрос о необходимых и достаточных условиях равномерной сходимости рядов $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i(x) u_i(x)$. Здесь устанавливается теорема, обнаруживающая, что критерий Дирихле [2] представляет собою не только достаточные, но и необходимые условия равномерной сходимости указанных рядов.

ТЕОРЕМА. *Для того, чтобы при помощи последовательности функций $\alpha_i(x)$ любой ряд $\sum_{i=0}^{\infty} u_i(x)$ с равномерно ограниченными частными суммами на множестве M преобразовывался в ряд $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i(x) u_i(x)$, равномерно сходящийся на этом же множестве, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\alpha_i(x)$ равномерно сходилась к нулю и чтобы ряд $\sum_{i=0}^{\infty} |\Delta\alpha_i(x)|$ сходился равномерно, где $\Delta\alpha_i(x) = \alpha_i(x) - \alpha_{i+1}(x)$.*

Достаточность условий установлена Дирихле [2].

Докажем необходимость условия равномерной сходимости $\alpha_n(x)$ к нулю для $x \in M$. В самом деле, из неравномерного приближения $\alpha_n(x)$ к нулю следует, что не для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое m, для которого $|\alpha_m(x)| < \varepsilon$ для всех $m > m_0$, каково бы ни было $x \in M$. Благодаря этому ряд

$$u_i(x) = (-1)^i, \tag{1}$$

частные суммы которого ограничены, преобразовывается в ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i(x) u_i(x),$$

для которого

$$|S'_{m+1}(x) - S'_m(x)| = |\alpha_{m+1}(x)(-1)^{m+1}| \nless \varepsilon,$$

где $S'_m(x)$ — частная сумма ряда $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i(x) u_i(x)$.

Отсюда следует, что нельзя найти такое m, для которого

$$|S'_{m+1}(x) - S'_m(x)| < \varepsilon$$

для всех $x \in M$ как бы мало ни было положительное число ε, следовательно, ряд $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i(x) u_i(x)$ не сходится равномерно.

Докажем теперь, что для равномерной сходимости ряда $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i(x) u_i(x)$ необходимо также, чтобы ряд $\sum_{i=0}^{\infty} |\Delta\alpha_i(x)|$ равномерно сходился.

В самом деле, из неравномерной сходимости $\sum_{i=0}^{\infty} |\Delta\alpha_i(x)|$ следует, что существует такое $2\varepsilon > 0$ и некоторая последовательность точек $x_l \in M$, где $l = 1, 2, \ldots$, обладающих тем свойством, что при каждом $l = 1, 2, \ldots$ и некотором соответствующем ему $m + 1 = S_l \geqslant N_l$, где $N_1, N_2, \ldots, N_l$ — неограниченно возрастающая последовательность целых чисел, имеет место:

$$\sum_{i=m+1}^{n} |\Delta\alpha_i(x_l)| > 2\varepsilon,$$

каково бы ни было целое число $n \geqslant n_0 > m + 1$, где n_0 — соответствующее целое число. Рассмотрим специальный ряд, для которого

$$S_i(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} \Delta\alpha_i(x), & i = m+1, m+2, \ldots \\ 0 & 0 \leqslant i \leqslant m, \end{cases} \tag{2}$$

где $m = S_l - 1$ для точек x_l, и $m = 0$ для других $x \in M$. Применяя абелево преобразование, находим

$$\sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i(x) u_i(x) = \sum_{i=m+1}^{n} S_i(x) \Delta\alpha_i(x) - S_m(x) \alpha_{m+1}(x) + S_n(x) \alpha_{n+1}(x). \tag{3}$$

Выражение это для ряда (2) запишется так:

$$\sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i(x_l) u_i(x_l) = \sum_{i=m+1}^{n} |\Delta\alpha_i(x_l)| + \operatorname{sgn} \Delta\alpha_n(x_l) \alpha_{n+1}(x_l). \tag{4}$$

Вследствие равномерной сходимости $\alpha_i(x)$ к нулю, равномерной ограниченности частных сумм (2) и неравномерной сходимости $\sum_{i=0}^{\infty} |\Delta\alpha_i(x)|$ из (4) следует, что при достаточно большом n

$$\left|\sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i(x_l)\, u_i(x_l)\right| \geqslant \sum_{i=m+1}^{n} |\Delta\alpha_i(x_l)| - \varepsilon > \varepsilon,$$

т. е. существует такое $\varepsilon > 0$ и некоторая последовательность точек $x_l \in M$, где $l = 1, 2, \ldots$, что при каждом $l = 1, 2, \ldots$, и некотором соответствующем ему $m + 1 = S_l \geqslant N_l$, где $N_1, N_2 \ldots, N_l, \ldots$ — неограниченно возрастающая последовательность целых чисел, имеет место

$$\left|\sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i(x)\, u_i(x)\right| > \varepsilon$$

для последовательности точек $x_1, x_2, \ldots, x_l \ldots$, при $n \geqslant n_0 > m + 1$, т. е. ряд $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i(x)\, u_i(x)$ неравномерно сходится.

Замечание. Известные теоремы о равномерной сходимости рядов $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i(x)\, u_i(x)$, для которых частные суммы равномерно ограничены и, в частности, теоремы о равномерной сходимости тригонометрических рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx, \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx$$

и другие теоремы ([3, 4]), а также теорема Абеля ([5]) о сходимости численных рядов и ее следствия вытекают из приведенной теоремы.

Поступило
17 VI 1941

ЛИТЕРАТУРА

1 Огиевецкий И. Е., Обобщение теоремы Hadamard'a, Доклады Акад. Наук СССР, XXXI (1941), № 3.

2 Bromwich T. J. I'a, An introduction to the theory of infinite series, London, 1931, p. 246.

3 Зигмунд А., Тригонометрические ряды, 1939, стр. 9 и 10.

4 Knopp K., Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, Berlin, 1931 § 43, 48.

5 Лежен-Дирихле П. Г., Лекции по теории чисел, М.—Л., 1936, § 143

I. OGUIEWETZKI. ON DIRICHLET'S TEST FOR UNIFORM CONVERGENCE

SUMMARY

In the present note we prove the following

Theorem. *A necessary and sufficient condition for the uniform convergence of the series* $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i(x) u_i(x)$ *within a certain region* M, *where* $\Sigma u_n(x)$ *oscillates between finite limits for all points* x *of* M, *is that* $\alpha_n(x)$ *tends to zero uniformly at all points* x *of* M *and that* $\sum_{i=0}^{\infty} |\alpha_i(x) - \alpha_{i+1}(x)|$ *is uniformly convergent in* M.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

BULLETIN DE L'ACADEMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Серия математическая 6 (1941), 445—447 Série mathématique

КРИТИКА И БИБЛИОГРАФИЯ

Л. С. ПОНТРЯГИН. Непрерывные группы.

М., 1938, 315 стр.

Рецензируемая книга удостоена Сталинской премии и принадлежит к числу тех работ, появление которых отмечает собою рождение новых и крупных дисциплин Со времени своего выхода в свет (советское издание 1938 г., английский перевод в С.Ш.А. 1939 г.) она оказала и продолжает оказывать сильное и плодотворное влияние на самые широкие круги математиков. Благодаря чрезвычайной ясности и простоте изложения она получила самое широкое распространение и среди студенчества и стала настольной книгой многих тысяч лиц. Чтобы понять причину такого исключительного значения этой книги, достаточно вспомнить общий ход развития данной науки и те сдвиги, которые произошли в математике за последние десятилетия.

Во второй половине прошлого века С. Ли была создана теория таких бесконечных групп, элементы которых можно рассматривать, как точки n-мерного эвклидова пространства, а закон умножения $z_i=\varphi_i(x_1,\ldots, x_n, y_1,\ldots, y_n)$ дается аналитическими функциями φ_i ($z_1,\ldots, z_n$—координаты точки z, являющейся групповым произведением точек x и y). Однако функции φ_i приходится предполагать определенными и аналитическими только в некоторой области. В связи с этим и сама теория становится уже не теорией групп, а теорией так называемых локальных групп, свойства которых похожи только на свойства куска группы. С. Ли удалось показать, что изучение этих локальных групп, называемых теперь группами Ли, сводится к изучению объектов чисто алгебраической природы—колец Ли. Этим термином сейчас обозначают n-мерное векторное пространство, в котором кроме сложения векторов и умножения вектора на число определена еще операция коммутирования $[\bar{a}, \bar{b}]$, обладающая свойствами, аналогичными свойствам обыкновенного векторного произведения: коммутатор двух векторов есть однозначно определенный вектор,

$$[\bar{a}, \bar{b}] = -[\bar{b}, \bar{a}],\ [\lambda\bar{a}+\mu\bar{b}, c] = \lambda[\bar{a}, \bar{c}]+\mu[\bar{b}, \bar{c}],$$
$$[\bar{a}, [\bar{b}, \bar{c}]]+[\bar{b}, [\bar{c}, \bar{a}]]+[\bar{c}, [\bar{a}, \bar{b}]]=0.$$

Вскоре после создания теории лиевских групп Гильбертом была сформулирована проблема: нельзя ли условие аналитичности функций φ_i в теории Ли заменить более слабым требованием непрерывности их. Эта проблема оказалась чрезвычайно трудной и оказала определяющее влияние на дальнейшее развитие теории групп. Начиная с этого времени, в теории групп Ли можно заметить два течения: одно—это более детальное изучение колец Ли и другое—изучение топологической структуры групп. Первым существенным успехом во втором направлении явилась работа Шрейера 1924 г., в которой было отчетливо сформулировано понятие топологической группы. Введение нового понятия оказалось весьма плодотворным и позволило самому Шрейеру окончательно выяснить взаимоотношения между полным изоморфизмом топологических групп и их локальным изоморфизмом.

Однако решающие успехи, позволившие говорить о возникновении новой математической дисциплины, были сделаны только в 1929—1935 гг. В 1929 г. появилась

работа Петера и Вейля, в которой было введено инвариантное интегрирование по группе и с помощью его доказано существование полной системы представлений для компактных групп Ли. Непосредственно после появления этой работы Хаар построил инвариантную меру в локально-компактных топологических группах и тем самым показал возможность переноса результатов Петера-Вейля на произвольные топологические группы. Пользуясь этим, фон Нейман смог решить проблему Гильберта для компактных топологических групп и, таким образом, включить теорию Ли в общую теорию топологических групп.

Почти одновременно с этим Л. С. Понтрягин дал полный анализ структуры компактных топологических групп, который по своему значению выходит далеко за пределы только узкого решения проблемы Гильберта. Дальнейший крупный успех был сделан Л. С. Понтрягиным созданием своей теории абелевых топологических групп и их характеров. Среди замечательных фактов этой теории имеется и полное решение проблемы Гильберта для абелевых групп. Понтрягинская теория характеров сразу завоевала широкое признание, нашла ряд замечательных приложений в различных областях математики и является в настоящее время полем исследования для многих математиков.

Все это богатство новых идей, методов и фактов нашло в рецензируемой книге свое первое законченное и систематическое изложение, которое сделало его доступным широким кругам математиков. Трудно переоценить значение этой книги. Она подвела итог всему предыдущему развитию данной науки и стала отправным пунктом всего дальнейшего развития.

Содержание книги разбито на 9 глав, из которых первые две являются вводными и содержат основные понятия и факты абстрактной теории групп и теоретико-множественной топологии. В гл. III вводится понятие топологической группы, подгруппы, нормального делителя и т. п. и доказываются основные теоремы для них. Более детально излагаются свойства нульмерных групп. В конце главы вводится понятие локальных групп и доказывается ряд их свойств. Начиная с главы IV, идет изложение основных фактов. В самой главе IV излагается общая теория представлений компактных групп, вводится инвариантное интегрирование по группе и доказывается существование полной системы представлений компактных групп. В главе V дается законченное изложение теории абелевых топологических групп, вершиной которой служит понтрягинский закон взаимности. В конце главы в качестве приложения доказывается известная теорема Понтрягина о структуре топологических тел. Глава VI занимает промежуточное положение. В ней вводится, наконец, понятие группы Ли. Однако автор ограничивается здесь только строгим введением основных понятий общей теории лиевских групп и доказательством существования канонических координат, откладывая более подробное изучение их до IX главы. Глава VII снова содержит фундаментальные результаты. В ней подробно изучается структура компактных топологических групп и, в частности, для таких групп дается решение проблемы Гильберта. Глава VIII содержит изложение результатов Шрейера о конструкции и свойствах универсальных накрывающих. На этом заканчивается общая теория топологических групп. Заключительная IX глава содержит уже результаты теории групп Ли. Здесь вводится понятие кольца Ли инфинитезимальной группы и доказываются теоремы Ли о соответствии между группами Ли и кольцами Ли. Далее подробно рассматривается вопрос о построении полной топологической группы по заданной локальной и о соответствии между их подгруппами. Здесь ставится также несколько проблем [одна из них (стр. 298), впрочем, решается в отрицательном смысле ранее приведенным примером (прим. 67)]. В заключение изучается структура компактных связных лиевских групп и приводится классификация Киллинга-Картана простых групп. Конец этой главы носит обзорный характер и поэтому значительное число теорем приведено в нем без доказательств.

Таково содержание этой книги. Написана она чрезвычайно ясно и просто, с полной заботой об удобствах ее читателя. В начале дается схема зависимости отдельных глав. Нумерацией снабжены не только теоремы, но и определения и примеры, что очень облегчает всевозможные ссылки и справки. Первые две главы могут быть с успехом

использованы для первоначального изучения абстрактной теории групп и теоретико-множественной топологии.

В заключение хочется высказать два замечания, которые естественно возникают при чтении рецензируемой книги. Первое из них особенно часто возникает у читателей, которые сами хотят работать в области непрерывных групп, и заключается в следующем. Общеизвестно, что в математических теориях важны не только окончательные результаты, но и пути и средства, с помощью которых удалось получить их. Таким важнейшим вспомогательным средством в теории непрерывных групп является теория представлений, которая и сама по себе имеет выдающийся интерес. Однако эта теория, как нам кажется, не занимает в книге того места, которое ей следовало бы уделить. Далее, для той категории читателей, о которой сейчас идет речь, очень интересно было бы узнать, какие проблемы автор считает стоящими перед его наукой на-сегодня, каковы, по его мнению, возможные направления развития дисциплины в дальнейшем, какие проблемы и задачи встречались автору в его работе. Это, может быть, сделало бы книгу формально менее законченной, но зато еще более повысило бы ее действенность.

Второе замечание—более частного характера. В книге сначала излагается общая теория топологических групп. Затем из этих групп выделяются все более частные классы и дается глубокий обзор их свойств. Наконец, выделяется класс лиевских групп и показывается, что их теория сводится к теории колец Ли. Однако сама теория лиевских колец не излагается. Это вполне законно, но для читателя было бы гораздо приятнее, если бы к книге были добавлены две-три главы, в которых с той же ясностью и чистотой излагались бы и основные результаты теории лиевских алгебр.

А. Мальцев

СОДЕРЖАНИЕ ТОМА 5

Стр.

Александров П. С. и **Проскуряков И. В.** О приводимых множествах . . . 217—224
Артемьев Н. А. Исследование осуществимости периодических движений 127—158
Бернштейн С. Н. О приближении непрерывной функции линейным дифференциальным оператором от многочлена . . . . 15—42
Бернштейн С. Н. О «доверительных» вероятностях Фишера . . . . . . 85—94
Боярский А. Я. О геометрической корреляции . . . . 159—164
Веденисов Н. Б. О размерности в смысле E. Čech'a . . . . 211—216
Гельфонд А. О. О коэффициентах периодических функций . . . . 95—98
Гельфонд А. О. О совместных приближениях алгебраических чисел рациональными дробями . . . . 99—104
Геронимус Я. Л. О характере решения проблемы моментов в случае предельно-периодической ассоциированной дроби . . . . 203—210
Грошев А. В. Область притяжения закона Пуассона . . . . 165—172
Ермилин К. С. Об экстремуме интегралов в случае разрывной подинтегральной функции . . . . 269—276
Еругин Н. П. Замечание к статье Л. М. Шифнера . . . . 377—380
Колмогоров А. Н. Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей . . . . 3—14
Кошляков Н. С. Применение преобразования Mellin'a к выводу некоторых сумматорных формул . . . . 43—56
Купрадзе В. Д. К теории интегральных уравнений с интегралом в смысле главного значения по Коши . . . . 255—262
Курош А. Г. Проблемы теории колец, связанные с проблемой Бернсайда о периодических группах . . . . 233—240
Лидиев С. Ф. О представимости решения уравнения теплопроводимости в виде интеграла Пуассона . . . . 263—268
Любельский З. М. О двух теоремах Вегнера . . . . 395—398
Любельский З. М. Обобщение и обращение одной теоремы Гильберта . . 399—400
Микеладзе Ш. Е. О численном интегрировании уравнений эллиптического и параболического типа . . . . 57—74
Огиевецкий И. Е. О критерии равномерной сходимости Дирихле́ . . . . 441—444
Очан Ю. С. К вопросу о проблеме Суслина . . . . 423—426
Очан Ю. С. Об одной теореме Бэра . . . . 427—430
Пархоменко А. С. Об уплотнениях в компактные пространства . . . . . 225—232
Подсыпанин В. Д. Об одном неопределенном уравнении . . . . 305—324
Привалов И. И. К определению субгармонической функции . . . . . . 281—284
Пугачев В. С. Об асимптотических представлениях интегралов систем линейных дифференциальных уравнений, содержащих параметр . . . . 75—84
Пугачев В. С. Об асимптотических представлениях интегралов систем линейных дифференциальных уравнений, содержащих параметр. II . . 431—439
Розенсон Н. А. О римановых пространствах класса I. ч. II . . . . 325—352
Розенфельд Б. А. Теория конгруэнций и комплексов прямых в эллиптическом пространстве . . . . 105—126
Розенфельд Б. А. Внутренняя геометрия множества m-мерных плоскостей n-мерного эллиптического пространства . . . . 353—368
Сегал Б. И. Суммы характеров и их применение . . . . 401—410
Тихомиров А. И. Одно обобщение понятия скрещенного произведения . . 297—304
Урмаев Н. А. Приведенная длина геодезической линии . . . . 369—376
Фельдхейм Э. Об обобщенных полиномах Лежандра . . . . 241—254

Стр.

Шагинян А. Л. К вопросу об аппроксимации в среднем в комплексной области . . . . 285—296

Шатровский Л. И. К вопросу о двух теоремах Эрдеша для множеств целых точек n-мерного пространства . . . . 411—422

Николай Максимович Гюнтер (некролог) . . . . 193—202

Иван Иванович Привалов (некролог) . . . . 389—394

Всесоюзное совещание по математической статистике . . . . 173—186

Критика и библиография:

Л. Я. Окунев, Высшая алгебра *(А. Г. Курош)* . . . . 187—188

G. H. Hardy and **E. M. Wright,** An introduction to the theory of numbers *(А. Гельфонд)* . . . . 188—192

Л. В. Канторович, Определенные интегралы и ряды Фурье *(И. И. Привалов)* . . . . 277—278

B. L. van-der Waerden, Einführung in die algebraische Geometrie *(А. И. Узков)* . . . . 278—280

В. Немыцкий, М. Слудская, А. Черкасов, Курс математического анализа *(Л. В. Канторович, И. П. Натансон)* . . . . 381—383

А. Зигмунд, Тригонометрические ряды *(Н. Бари)* . . . . 384—387

Л. С. Понтрягин, Непрерывные группы *(А. Мальцев)* . . . . 445—447

TABLES DES MATIÈRES DU TOME 5

Page

Alexandroff P. und **Proskuriakoff I.** Über reduzible Mengen . . . . 217—224
Artemieff N. Die Bestimmung der Realisierbarkeit der periodischen Bewegungen . . . . 127—158
Bernstein S. Sur l'approximation d'une fonction continue par un opérateur linéaire différentiel d'un polynome . . . . 15—42
Bernstein S. On «fiducial» probabilities of Fisher . . . . 85—94
Bojarsky A. Sur la corrélation géométrique . . . . 159—164
Ermilin K. Sur l'extrêmum des intégrales des fonctions discontinues . . . . 269—276
Erouguine N. Une remarque sur l'article de L. Shifner . . . . 377—380
Feldheim E. Sur les polynomes généralisés de Legendre . . . . 241—254
Gelfond A. On the coefficients of periodic functions . . . . 95—98
Gelfond A. On the simultaneous approximations of algebraic numbers by rational fractions . . . . 99—104
Geronimus J. On the character of the solution of the moment-problem in the case of the periodic in the limit associated fraction . . . . 203—210
Groshev A. Sur le domaine d'attraction de la loi de Poisson. . . . . 165—172
Kolmogoroff A. Interpolation und Extrapolation von stationären zufälligen Folgen . . . . 3—14
Koschliakov N. Application of Mellin's transformation to the deduction of some summation formulae . . . . 43—56
Kupradze V. Zur Theorie der Integralgleichungen mit dem Integral im Sinne des Cauchyschen Hauptwertes . . . . 255—262
Kurosch A. Ringtheoretische Probleme, die mit dem Burnsideschen Problem über periodische Gruppen in Zusammenhang stehen . . . . 233—240
Lidjaev S. Über die Darstellbarkeit der Lösung der Wärmeleitungsgleichung durch das Poissonsche Integral . . . . 263—268
Lubelski S. Über zwei Wegnersche Sätze . . . . 395—398
Lubelski S. Verallgemeinerung und Umkehrung eines Hilbertschen Satzes 399—400
Mikeladze Sch. Numerische Integration der Gleichungen vom elliptischen und parabolischen Typus . . . . 57—74
Oguiewetzki I. On Dirichlet's test for uniform convergence . . . . 441—444
Otchan G. Sur une question liée au problème de Souslin . . . . 423—426
Otchan G. Sur un théorème de Baire . . . . 427—430
Parhomenko A. Über eineindeutige stetige Abbildungen auf kompakte Räume 225—232
Podsipanin W. Über eine unbestimmte Gleichung . . . . 305—324
Pougatcheff W. Sur les expressions asymptotiques pour les intégrales des systèmes d'équations différentielles linéaires contenant un paramètre 75—84
Pougatcheff W. Sur les expressions asymptotiques pour les intégrales des systèmes d'équations différentielles linéaires contenant un paramètre. II 431—439
Privalov I. Sur la définition d'une fonction subharmonique . . . . 281—284
Rosenfeld B. Théorie des congruences et des complexes de droites dans un espace elliptique . . . . 105—126
Rosenfeld B. Géométrie intérieure de l'ensemble des plans m-dimensionnels dans l'espace elliptique à n-dimensions . . . . 353—368
Rosenson N. Sur les espaces Riemanniens de classe I. 2-de p. . . . . 325—352
Šaginjan A. Sur le problème de l'approximation en moyenne dans le domaine complexe . . . . 285—296
Segal B. Character sums and their application . . . . 401—410

Page

Shatrowsky L. On two Erdös'theorems for lattice point sets of the space of n-dimensions . . . . 411—422
Tihomirov A. Eine Verallgemeinerung des Begriffes des verschränkten Produktes . . . . 297—304
Urmajev N. Die reduzierte Länge der geodätischen Linie . . . . 369—376
Vedenissoff N. Sur la dimension au sens de E. Čech . . . . 211—216
N. Gunther (nécrologe) . . . . 193—202
I. Privalov (nécrologe) . . . . 389—394
Conférence statistique mathématique . . . . 173—186

Critique et bibliographie:

L. Ocounieff, Algèbre supérieure *(Kurosch)* . . . . 187—188
G. H. Hardy and **E. M. Wright,** An introduction to the theory of numbers *(A. Gelfond)* . . . . 188—192
L. Cantorovitch, Intégrales déterminées et séries de Fourier *(I. Privalov)* 277—278
B. L. van-der Waerden, Einführung in die algebraische Geometrie *(A. Uzkov)* 278—280
V. Niemitzky, M. Sloudskaja et **A. Tchérkassoff,** Cours d'analyse mathématique *(L. Cantorovitch* et *I. Natanson)* . . . . 381—383
A. Szigmund, Séries trigonométriques *(N. Bary)* . . . . 384—387
L. Pontrjaguin, Groupes continues *(A. Maltzeff)* . . . . 445—447

Редактор издательства Е. А. Чернов Подписано к печати 13/II 1942 г.
Л-6836. Объем 4 печ. л. и 1 вкл. 5,7 уч.-авт. л. Тираж 1050 экз. Цена 6 руб.
1-я типография треста «Полиграфкнига». Москва, Трехпрудный пер., д. 9. Заказ 1479.